Ferdinand GONSETH (1890-1975) a enseigné les mathématiques à l'Université de Berne, puis à l'École polytechnique de Zurich, où il a également été chargé d'un séminaire de philosophie des sciences. Il a écrit, outre des livres d'enseignement des mathématiques, des ouvrages de philosophie des sciences parmi lesquels il faut citer *Les fondements des mathématiques* (1926), *Les mathématiques et la réalité* (1936), *La géométrie et le problème de l'espace* (1945-1955), *Le problème du temps* (1964) et des ouvrages de caractère plus philosophique : *Philosophie néoscolastique et philosophie ouverte* (1954), *La métaphysique et l'ouverture à l'expérience* (1955), *Le référentiel* (1975) et *Mon itinéraire philosophique* (1994, posthume). À ces ouvrages, il faut ajouter de très nombreux articles dont beaucoup ont été publiés dans *Dialectica*, la revue de philosophie de la connaissance qu'il a fondée en 1947 avec Gaston BACHELARD et Paul BERNAYS. Il y défend une position philosophique qui a été appelée «idonéisme», puis «philosophie ouverte» dans laquelle, refusant tout *a priori* et tout dogmatisme, il prône une ouverture de la philosophie à l'expérience et en particulier aux leçons à tirer de l'évolution de la science. Vers la fin de sa vie, il s'est aussi intéressé à des sujets plus proches des sciences humaines : le langage, la morale, le référentiel qui constitue le cadre de notre réflexion et de notre action.

La pensée de Ferdinand GONSETH a fait l'objet de nombreux colloques et ouvrages, parmi lesquels il faut citer ceux d'Edmond BERTHOLET, d'Eric EMERY et, tout récemment, de Pierre-Marie POUGET. Une Association F. Gonseth s'est donné pour tâche de diffuser et de prolonger sa pensée. Elle déploie depuis près de quarante ans une activité régulière à Bienne, puis à St-Imier en particulier dans le cadre d'un Institut de la Méthode, devenu entretemps Conseil scientifique et philosophique.

Ferdinand GONSETH

LA GÉOMÉTRIE ET LE PROBLÈME DE L'ESPACE

3e édition

AFG 2022

Première édition :
Éditions du Griffon, Neuchâtel; diffusion : Dunod, Paris.
Bibliothèque scientifique — *La science dialectique*
Collection publiée sous la direction de Ferdinand GONSETH

Chapitre I :	*La doctrine préalable*	N° **3** (1945)
Chapitre II :	*Les trois aspects de la géométrie*	N° **6** (1946)
Chapitre III :	*L'édification axiomatique*	N° **11** (1947)
Chapitre IV :	*La synthèse dialectique*	N° **17** (1949)
Chapitre V :	*Les géométries non euclidiennes*	N° **25** (1952)
Chapitre VI :	*Le problème de l'espace*	N° **27** (1955)

Copyright by Éditions du Griffon — Neuchâtel (Suisse).

Présente édition : Association Ferdinand Gonseth, St-Imier (Suisse).

À la mémoire de Pierre CÉRÉSOLE

AVANT-PROPOS[*]

En publiant cet ouvrage, nous restons fidèle à une intention qui n'a jamais cessé d'être la nôtre. Pour l'essentiel, c'est la même que celle dont nous nous inspirions en écrivant *Les fondements des mathématiques*, parus en 1926. À ce moment déjà, nous nous attachions à dégager de l'histoire et de la pratique des sciences les linéaments d'une théorie de la connaissance, d'une méthode adéquate à l'expérience de notre temps. Nous tendons aujourd'hui encore vers le même but.

La Géométrie et le problème de l'espace constitue une reprise des parties de ce premier ouvrage relatives à la géométrie; cette indication permet d'évaluer le chemin parcouru depuis vingt ans. À la réflexion, nous nous apercevons que l'idée directrice de notre pensée a toujours été le refus de toute fermeture. Cette attitude n'est plus une affaire de sentiment ou de pressentiment; elle a maintenant pour elle une expérience assez longue et assez rude; elle a trouvé son assiette : ce n'est rien moins qu'une philosophie.

En même temps qu'elle se précisait, la question du fondement des sciences s'est graduellement élargie et maintenant, nous commençons à y voir clair. On ne fonde pas une discipline sans avoir fait sienne une doctrine préalable des vérités élémentaires, sans avoir adopté, explicitement ou non, telle ou telle philosophie de la connaissance. Et si chaque discipline, pour atteindre sa perfection naturelle, a tendance à se constituer en doctrine fermée, l'histoire et la critique des sciences font éclater ses cadres. La philosophie de toute discipline en évolution ne peut être qu'une philosophie ouverte. Le problème de la Méthode est, pour une part essentielle, le problème du juste choix de cette philosophie.

Mais ce n'est pas sous ce biais que les choses peuvent être abordées ici. Nous voulons, au contraire, les approcher par leur côté le plus élémentaire. Elles se présenteront à nous dans leur simple évidence. Lorsqu'on verra la géométrie s'édifier selon ses propres moyens et ses propres nécessités, on acceptera peut-être alors qu'elle témoigne en faveur de la méthode qui lui permet simplement d'être tout ce qu'elle peut être.

[*] Lors de la première parution aux Éditions du Griffon, l'avant-propos a été publié avec le chapitre II : *Les trois aspects de la géométrie* (1946).

Bien des appuis d'amis et d'anciens élèves nous ont été acquis pour la mise en place des matières, pour la mise au point et la révision des textes. Nous sommes heureux de les remercier : en premier lieu, M. H.-S. GAGNEBIN pour sa constante collaboration et M. A. PREISSMANN, à Bâle; pour le second chapitre spécialement, le professeur M. MONNIER, chef des travaux à l'Institut physiologique de l'Université de Zurich; MM. S. GAGNEBIN, F. FIALA, L. PAULI et H. SUTER, tous professeurs à Neuchâtel.

F. GONSETH.

INTRODUCTION

LE PROBLÈME DE L'ESPACE

1. LE MOUVEMENT NATUREL DE LA CONNAISSANCE.

Pour savoir, il n'est pas nécessaire de savoir comment on sait. L' homme dispose de moyens naturels de connaître qu'il peut mettre en œuvre sans avoir à se contempler lui-même. Sans devoir y réfléchir particulièrement, il est capable d'une connaissance active et étendue. Sans avoir à se demander comment la chose est possible et pourquoi elle est possible, il épouse par l'esprit la forme et la nature des objets qui l'entourent. Les épouse-t-il complètement et parfaitement ? Au niveau de la connaissance dont nous parlons, cette question paraît factice, oiseuse. Cette connaissance répond à ses fins naturelles : elle est efficace.

Nulle part la chose n'apparaît aujourd'hui[1] plus nettement que dans notre connaissance de *l'espace*. Pour distinguer une largeur, une profondeur, une hauteur, nous n'avons pas besoin de réflexions complémentaires sur notre faculté d'imaginer un corps, — ou un vide, — à trois dimensions. L'homme normal n'a qu'à ouvrir les yeux pour en recueillir la vision, une vision qui lui semble à la fois pleine et immédiate. Dans cet espace qu'il perçoit sans penser à la façon dont il le perçoit, il se déplace sans se demander par quel miracle il sait s'y déplacer.

C'est un des caractères de la connaissance, dite *intuitive*, de ne pas exiger de relais, où se cristalliserait quelque connaissance secondaire des moyens, des conditions ou des qualités de la connaissance. C'est même un des caractères de la connaissance *par évidence* de ne souffrir aucune réflexion qui veuille l'atteindre ou l'éclairer.

À ce niveau, il n'y a pas de problème de l'espace. Il n'y a pas de problème de la connaissance, de même qu'il n'y a pas, pour un homme normal, de problème de la marche ou de problème de la station debout. Connaître est une activité naturelle. Même si la connaissance comporte des degrés comme peut en comporter l'habileté à exécuter tel ou tel mouvement, à manier tel ou tel outil, le fait de connaître peut rester inconscient. Il ne s'impose pas à

[1] Il va de soi que notre analyse se réfère à l'homme actuel. Le lecteur trouvera dans le chapitre VI des notes relatives à l'évolution du problème de l'espace.

l'attention. Il ne sollicite pas plus la réflexion, — et même moins, — que le fait de respirer.

Le problème de l'espace naîtra-t-il au moment où l'instrument viendra seconder notre intuition naturelle ? Au moment où nous soumettrons nos appréciations individuelles des distances ou des volumes au contrôle expérimental, où notre connaissance primaire de l'étendue s'adjoindra une technique de la mesure ?

Sans doute, une technique ne naît pas sans avoir été gagnée, même une technique très simple. La réflexion n'est pas absente de l'emploi de l'équerre et du fil à plomb. Si l'imagination ne précédait l'action, l'homme resterait enfermé dans le cycle de ses gestes naturels, comme certains insectes semblent l'être. Et si la réflexion n'accompagnait et ne suivait l'action, aucun acte ne comporterait d'expérience et d'enseignement. Nous serions incapables d'inventer et de retenir aucune conduite efficace, aucune technique nouvelle.

Mais l'activité de l'esprit qui accompagne l'exercice de nos fonctions naturelles est également une fonction naturelle. Elle ne réclame pas d'être surveillée consciemment. Rien ne nous oblige à nous étonner de nous-mêmes et de nos succès.

En touchant du regard deux points d'une ligne de visée, en déroulant la chaîne de l'arpenteur, nous ne sommes pas saisis par le sentiment de nous être heurtés à quelque énigme. Notre attitude ne nous apparaît nullement problématique. Nous restons dans la ligne de conduite que le bon sens juge et détermine.

En mesurant l'espace, peut-être rencontrerons-nous des problèmes qui ne pourront être résolus que par un effort spécial de réflexion; mais ce seront des problèmes *techniques*, à propos desquels nous ne mettrons aucunement en doute la qualité de notre représentation spatiale, l'évidence de notre information naturelle, l'adéquation de notre comportement. Notre attention se portera vers la possession d'un monde dont la réalité ne souffre aucun doute. Nous rencontrerons des problèmes relatifs à l'espace, mais nous ne rencontrerons pas *le problème de l'espace*.

L'invention d'une technique de la mesure ne nécessite en rien l'ouverture d'une question située dans un autre plan de la connaissance, d'une question ayant une autre *dimension spirituelle*. Cette technique ne nous apporte pas une connaissance d'une autre essence : celle-ci est seulement plus précise que celle que nous possédions avant d'y avoir recours; mais ne la contredit pas. Elle lui est analogue; elle lui reste comparable. Il n'y a de l'une à l'autre, ni saut, ni rupture.

Le problème de l'espace surgira-t-il au moment où la spéculation théorique viendra s'ajouter à la pratique de la mesure et à l'intuition de l'étendue ? Au moment où nous concevrons le point, la droite, le cercle comme des notions séparables dès choses matérielles; où nous apercevrons en elles une réalité d'un

autre ordre, présentant ses évidences propres, objet d'une connaissance de nature nouvelle; où notre technique de la mesure se complétera d'une technique mentale de la déduction et de la démonstration ?

Certes, la distance qui sépare cette nouvelle forme de la connaissance de l'espace de l'intuition primaire et de la perception immédiate de l'étendue est bien apparente. Si nous étions tentés de l'ignorer, l'histoire de la géométrie, des Egyptiens à EUCLIDE, nous la ferait mesurer dans le temps. En se rendant maître du jeu déductif qui lui permet d'édifier la géométrie, l'homme n'a-t-il pas ouvert une voie essentiellement neuve au savoir ? En progressant sur cette voie, n'est-il pas visible que nous franchissons les limites de notre information naturelle, que nous ne bénéficions plus seulement de moyens innés ou créés par le développement héréditaire et prédéterminé de notre être biologique, mais que nous contribuons consciemment à augmenter en même temps notre savoir et notre faculté de connaître ? Lorsque nous acceptons d'ordonner la multitude de nos représentations spatiales suivant une ligne déductive, nous n'obéissons plus à un instinct incontrôlable; nous nous soumettons au contraire à une discipline dont nous sommes nous-mêmes les créateurs. En découvrant qu'elle est capable de s'organiser rationnellement, la connaissance a trouvé prise sur elle-même; et cette découverte vient, en retour, toucher et modifier les formes du savoir primitif.

Ce retour de l'esprit sur lui-même, cette emprise de la connaissance sur elle-même, ne marquent-ils pas l'instant où surgit le problème de la connaissance ? L'instant à partir duquel la connaissance, pour être aussi pleine qu'elle pourrait l'être, exige qu'on sache quelque chose d'elle ? Avec quelle simplicité le problème de la connaissance et le problème conjoint de l'espace prendraient-ils leur départ, si la réponse à cette question pouvait être franchement affirmative.

Mais si nous cherchons le moment où le problème de l'espace se pose sans rémission sur la ligne d'évolution de la connaissance spatiale (abstraction faite des suggestions venues d'ailleurs), ce n'est pas encore la distinction entre la face pensée et la face réalisée des êtres géométriques qui permettra de le fixer. Nous avons déjà fait observer qu'au moment où la déduction vient greffer son ordre rationnel sur une connaissance déjà organisée intuitivement et expérimentalement, il n'est pas nécessaire de faire valoir le caractère mental de cette opération pour qu'elle réussisse. Il nous faut maintenant ajouter que, si ce caractère est clairement perçu, il ne revêt de lui-même aucun aspect problématique. Il peut fort bien s'insérer dans notre vision des choses sans la mettre en doute et sans la compromettre. La ligne de notre pensée géométrique n'en sera pas brisée.

La distinction entre l'idéal et le réel peut s'installer en nous comme un simple élément de connaissance. Sans que nous y prenions garde, elle peut se joindre, comme une ombre fidèle, à tous les objets de la connaissance spatiale.

Pourquoi ferait-elle naître une question ou un remords ? L'ombre qui suit tous nos pas ne nous gêne guère, à moins que nous ne nous avisions de sauter plus loin qu'elle. De même, tant que l'idée pourra se tenir aux côtés de la connaissance primaire de l'objet, sans que celle-ci cesse d'être sûre d'elle-même, le problème de la connaissance, et tout spécialement le problème de l'espace, pourront rester latents.

2. La crise de la connaissance : émergence du problème de l'espace.

Mais viendra-t-il un tournant du développement de la science de l'espace où nous nous heurterons inévitablement à ce problème ? Sous quelle forme s'imposera-t-il à nous ? Sous quel angle la connaissance que nous avons de l'espace peut-elle donner lieu à un problème de connaissance ?

Pour répondre à ces questions, nous nous reporterons à certains moments de l'histoire de la géométrie. Examinons tout d'abord la découverte des géométries non-euclidiennes. Cet épisode critique a été maintes fois commenté, il n'a cependant pas encore perdu sa force explicative.

Au niveau de l'information naturelle, le climat de la géométrie est le climat de l'évidence. C'est ainsi qu'au moment où les premières vérités, — celles qu'on ne démontre pas, — sont formulées, elles s'imposent à l'esprit sans que nous songions à les fonder sur quelque autre vérité mieux assurée.

C'est au nom de l'évidence que certains commentateurs d'EUCLIDE mirent en doute le postulat des parallèles; c'est dans le climat de l'évidence que bien des géomètres en tentèrent la démonstration. C'est de l'évidence que se réclamaient aussi bien LEGENDRE faisant la preuve que le postulat ne pouvait être faux[1] que BOLYAI et LOBATSCHEVSKY construisant la géométrie hyperbolique dans laquelle il ne peut être juste. Ces deux géomètres s'étaient en effet posé la question suivante : est-il possible d'édifier une géométrie en renonçant à faire intervenir le postulat des parallèles. Ils y parvinrent contre toute espérance, contre toute évidence. Ce résultat révolutionnaire ne provoqua pas alors la réaction qui nous semblerait naturelle. Les contemporains étaient trop persuadés de l'évidente invraisemblance d'une pareille géométrie pour attacher le moindre crédit à des théories aussi fantaisistes. La géométrie, dite hyperbolique, pouvait-elle être autre chose qu'une illusion ? Mais lorsqu'elle eut été traduite en formules, lorsqu'elle eut pris la structure d'un chapitre, d'un simple

[1] LEGENDRE, comme plusieurs de ses prédécesseurs, a trouvé une démonstration parfaitement correcte. Elle l'était au sens que le mot démonstration pouvait prendre en géométrie, à ce moment-là. Par un raisonnement conforme à la norme du raisonnement géométrique, il réduisait bel et bien l'énoncé contesté à d'autres énoncés dont l'évidence ne lui paraissait pas contestable. L'esprit aiguisé par la pratique de l'axiomatisation sait distinguer aujourd'hui, parmi ces évidences, l'énoncé équivalent au postulat d'EUCLIDE.

chapitre de l'analyse, il devint clair que son existence logique ne pouvait être mise en doute, sans que l'on mît également en doute les fondements de toute la pensée mathématique. La géométrie euclidienne, concurrencée efficacement par une seconde géométrie, tout aussi vraisemblable du point de vue d'une évidence arithmétique, se trouvait ébranlée jusque dans son fondement : *la notion de l'espace*. En effet, en deux mille ans, la représentation intuitive de l'espace s'était à ce point explicitée au contact de la géométrie que l'espace euclidien et l'espace sensible ne semblaient former que deux aspects inséparables d'une même réalité. L'existence possible d'un espace non-euclidien mettait en question cet accord consacré, semblait-il, par tout le développement de la géométrie. Pour sortir de cette impasse, le géomètre ne pouvait éviter de répondre à l'une ou à l'autre des questions suivantes, si ce n'est aux deux : Quelle est la vraie géométrie ? Qu'est-ce que l'espace ?

La question de la vérité de l'une ou l'autre des géométries en présence perdait d'ailleurs sa signification au niveau de l'analyse, au sens de laquelle ces deux géométries sont complètement équivalentes; le problème crucial est donc bien celui de l'espace. Du même coup, un problème plus général avait surgi : celui de la légitimité du recours à l'évidence. En effet, la doctrine de l'évidence, fondement et justification du raisonnement géométrique, se donnait à elle-même le désaveu de se réaliser à la fois dans l'euclidien et dans le non-euclidien.

Les faits que nous venons de rappeler en un très bref raccourci sont bien connus. Ce ne sont pas des faits historiques quelconques; ils représentent une expérience décisive de la connaissance spatiale. Leur enseignement porte loin.

Ils démontrent que le cheminement de l'esprit, même dans les disciplines les mieux assurées, même lorsque l'évidence semble l'éclairer d'une lumière définitive, ne se fait pas nécessairement sur une voie directe et bien tracée. La connaissance a ses remous. Dans sa progression, l'esprit ne cesse d'expérimenter et ne cesse d'être exposé à tous les risques de la recherche. Même en géométrie, le plus grand de ces risques ne lui est pas épargné : celui de *découvrir sa propre relativité*.

Il peut arriver, — la crise du non-euclidien en fournit l'exemple, — que le mouvement qui porte la connaissance en avant découvre et expose les bases sur lesquelles elle s'appuyait. L'idée qu'elle a d'elle-même ne recouvre plus fidèlement ce dont elle est capable. Le problème qui surgit ainsi ne peut pas être traité en continuant à géométriser suivant les normes observées jusque-là. Ce n'est plus un problème de géométrie; c'est un *problème de critique*. L'instance qui le formule a pour fonction l'examen, la comparaison critiques de nos activités; c'est la gardienne de notre cohérence intime.

Il s'agit d'un problème philosophique puisqu'il ne peut pas être résolu par l'engagement dans une discipline déterminée, et parce qu'il exige, comme première démarche, une reprise de l'esprit vers son autonomie.

La crise à laquelle nous venons de faire allusion est, nous semble-t-il, d'un type très caractérisé : celui où le problème de critique surgit à l'intérieur d'une discipline bien organisée par sa pratique même. L'évolution interne de la connaissance y conduit. Sans que les autres branches du savoir y contribuent notablement, cette discipline atteint un horizon où la réalité se structure autrement que dans l'horizon où elle s'est antérieurement constituée. Ne faut-il pas y voir le type du problème philosophique inévitable ?

Il existe d'autres situations dans lesquelles une technique mentale peut tomber sous le coup de la critique et donner naissance au problème philosophique qui la prend comme objet. Le problème peut surgir de la confrontation de deux disciplines qui aboutissent à des vues incompatibles.

Dans la connaissance élémentaire, on trouve souvent confondus les caractères qui, en se différenciant, donneront naissance à des disciplines distinctes. Dans notre vision naturelle de l'espace, dans laquelle l'espace physique et l'espace-représentation ne se séparent pas, il y a autant de physique que de géométrie, l'une et l'autre restant à un niveau peu évolué.

Les voies de ces deux disciplines sont maintenant séparées; la géométrie se constitue sous le signe de la nécessité rationnelle, la physique sous celui de l'expérimentation. L'espace ne cesse pas d'être le lien de leur rencontre. Mais quel espace ?

Pour la physique atomique, la forme tridimensionnelle de l'espace n'est plus qu'un moyen subsidiaire de représentation : on en fait usage pour rendre compte d'une réalité qui ne saurait plus y être localisée exactement et complètement. Ici, l'espace de l'expérience perd ses caractères intuitifs les plus évidents; le divorce avec l'espace sensible et euclidien ne saurait être plus net. Les diverses formes de notre connaissance semblent vouloir entrer en conflit les unes avec les autres, conflit qui les ébranle toutes puisqu'il porte sur ce qui fait leur base commune, leur cadre nécessaire : l'étendue.

Certes, le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme donnés *a priori* les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace que la confrontation des vues et des aboutissements ne peut manquer de faire surgir. Il l'évitera, mais il n'aura rien fait pour l'éclairer. Et il abandonnera une part essentielle de l'intention géométrique qui n'était certes pas de se mettre en marge de *l'espace réel*.

Pour la géométrie, la rencontre avec l'atomisme représente donc le type de l'expérience extérieure qui pose l'espace en problème dans un cadre où la géométrie n'est plus la seule discipline en cause.

Mais pourquoi, dans ce cadre élargi, ce problème mérite-t-il tant d'être pris en considération ? C'est que le mouvement qui porte la connaissance en avant menace maintenant l'unité et la cohérence de la pensée scientifique.

C'est une question que la pensée scientifique se pose à elle-même. Mais ce n'est pas un problème scientifique au sens ordinaire puisqu'il ne fait l'objet d'aucune discipline déterminée. Encore une fois, c'est un problème de critique. L'instance devant laquelle il se pose est la critique de la connaissance objective. C'est la conscience collective gardienne de l'unité et de la cohérence de la science.

Si le savant peut différer le problème de l'espace aussi longtemps qu'il n'est pas entraîné dans les remous d'une crise de la connaissance, c'est la mission du philosophe de distinguer le problème pendant qu'il est encore latent, c'est son devoir de l'attaquer dans un effort d'imagination abstraite, alors même qu'on ne se trouve pas au bénéfice des enseignements d'une crise de la connaissance.

Sa tendance sera de le porter devant l'instance critique la plus générale. Sa tentation sera d'imaginer une conscience inconditionnelle veillant à l'unité à la fois intime et universelle de tous et de chacun.

Sa critique, cependant, restera au niveau de la connaissance de son temps. Comment pourrait-elle précéder l'expérience à venir dont le caractère le plus profond est de ne pas être déjà totalement dans l'expérience et dans la connaissance antérieures ?

Il commettrait une erreur en fermant prématurément l'expérience, en considérant comme accomplie la connaissance qui l'informe et qui ne saurait être qu'un moment, qu'un horizon de la connaissance qui se fait. Ce serait vain de s'abandonner à l'illusion que le problème de la connaissance puisse être résolu sans le concours de la plus exigeante des connaissances, que le problème de l'espace puisse être traité en l'absence des sciences de l'espace.

Mais le problème de l'espace comporte-t-il une solution ? La question qu'il soulève recevra-t-elle jamais une réponse ? S'il est vrai que le progrès de la connaissance disjoint la notion d'espace en aspects qui ne se recouvrent plus entièrement, pourrons-nous jamais effacer ces disparités ? L'unité une fois perdue n'est-elle pas à jamais compromise ?

3. Le principe de la solution : dialectiques de l'espace.

L'étude que ce chapitre inaugure a précisément pour but de répondre à ces questions et de dégager les conditions générales dans lesquelles le problème de l'espace peut être résolu et l'unité de la connaissance spatiale recréée.

Il nous arrivera assez fréquemment d'avoir recours à des considérations d'ordre historique; mais ce ne sera jamais dans l'intention de faire œuvre d'historien des mathématiques. Nous ne chercherons à faire revivre certains épisodes de l'évolution géométrique, à en reconstituer le climat que pour en faire des expériences intellectuelles dont nous tirerons parti. L'ordre dans lequel

nous choisirons nos exemples ne sera pas nécessairement l'ordre historique. Cet ordre sera déterminé par la place que ces exemples viendront prendre dans notre argumentation dont ils constitueront à plusieurs reprises des chaînons importants. C'est en particulier les phases essentielles du développement de la géométrie pendant le siècle dernier que nous serons fatalement amenés à éclairer du point de vue dialectique.

En un mot, nous voulons faire œuvre de géomètre, mais d'un géomètre qui incorpore la critique philosophique à sa vision objective; d'un géomètre qui, des récentes crises de la géométrie et de la science, tire les enseignements qu'elles comportent; pour qui toute réponse à un problème philosophique tel que celui de l'espace finit par se traduire en un progrès de sa discipline. C e c i d i t, reprenons notre question. Une crise se fait jour en géométrie et menace l'unité de la connaissance. (Ce n'est pas une supposition gratuite; l'histoire le prouve.) Certains désaccords entre les notions en présence deviennent manifestes. Le problème de l'espace se pose. Comment allons-nous l'aborder ?

Avant de répondre, il convient de dissiper certaines illusions. Ainsi que nous l'avons dit, un problème de ce genre ne saurait être adéquatement résolu au niveau même de la connaissance où il émerge. À ce niveau, les disparités qui sont apparues sont des disparités réelles, les incompatibilités auxquelles on s'est heurté, des incompatibilités véritables. Un penchant naturel nous induira peut-être à ne pas les mettre en présence les unes des autres, à les isoler pour que les contradictions ne soient pas trop gênantes. Le problème ne sera pas résolu pour autant. On ne pourra réaliser des conditions favorables à la solution qu'en se plaçant à un niveau supérieur de la connaissance, où les désaccords constatés pourront être arbitrés, c'est-à-dire intégrés dans un ensemble de jugements cohérents.

Mais il n'est pas possible de rejoindre ce niveau supérieur en restant dans des généralités. L'information la plus exigeante et la technique la plus poussée seront les instruments indispensables de notre progrès. Pour pouvoir envisager le passage à ce niveau supérieur de la connaissance, pour concevoir les éléments dont il faut tenir compte à ce niveau, il est nécessaire de connaître parfaitement tous les aspects de l'horizon dans lequel les désaccords se sont produits. On devra en particulier posséder à fond la technique du raisonnement qui s'y révèle efficace. Seul le géomètre familiarisé, par une pratique prolongée, avec les conditions de pensée dans lesquelles les désaccords se sont manifestés, peut se ressaisir sans abandonner l'essentiel de son information. Seul il peut dégager les idées encore valables et prévoir les efforts qui restent à faire. C'est au travers de cette information, pour une part implicite, qu'il devient possible d'atteindre le nouvel horizon où apparaissent les conditions de la solution.

Nous nous proposons maintenant de décrire brièvement ces conditions. Nous aurons à imaginer, dans une reprise créatrice de notre information, une

dialectique capable de fonder tout nouvel arbitrage. Une dialectique comporte trois moments principaux.

Il y a, tout d'abord, un ensemble de vues prises dans le nouvel horizon de la connaissance et portant sur les faits les plus élémentaires, sur la façon dont l'abstrait et le concret s'y répondent par exemple, sur le rôle qu'y joue l'idée de vérité, etc. C'est ce que nous appelons *la doctrine préalable des vérités élémentaires à ce niveau*.

En second lieu, la dialectique formule les règles fondamentales d'associations des différents éléments de la doctrine préalable. Ces règles forment en quelque sorte l'armature, la structure de la dialectique. Dans la mesure où elles peuvent être séparées et fixées, elles constituent la logique formelle.

Dans ces deux premières démarches, la dialectique a dégagé une sorte de logique, la logique propre à un esprit formé pour la connaissance à ce niveau. Mais elle va plus loin encore et, dans sa dernière étape, elle doit être orientée par les fins en vue desquelles elle a été conçue.

En résumé, lors de la constitution et dans l'exercice d'une dialectique, l'esprit est informé par la doctrine préalable des vérités élémentaires, régi par les règles et orienté par ses fins.

En général, la dialectique efficace réunira différents aspects du niveau antérieur : nous dirons qu'elle en opère la synthèse dialectique.

Les considérations précédentes feront comprendre au lecteur que les chapitres d'intérêt général devront être précédés de parties techniques et que nous ne pourrons lui épargner certains efforts d'abstraction et d'imagination.

Dans le premier chapitre, intitulé *La doctrine préalable des vérités élémentaires*, nous nous livrons à une enquête sur la façon dont on conçoit habituellement les notions géométriques, dans le cas particulier celle de droite et celle d'axiome. Nous verrons que tout engagement réel dans la géométrie, même la plus élémentaire, s'accompagne d'un certain ensemble d'idées sur la nature des êtres géométriques et sur leur rapport avec la réalité physique, etc. Ces idées ne sont pas toujours claires et explicites, elles restent parfois à l'arrière-plan. Mais jamais elles ne sont complètement absentes.

L'enquête révélera-t-elle une unité de ces vues préalables ? Bien au contraire. Nous serons alors conduits à examiner la façon dont elles peuvent ou dont elles doivent être choisies. Nous éliminerons d'abord deux principes de choix : celui qui poserait que tous les choix se valent, et celui qui exigerait qu'un choix puisse être fait et légitimé une fois pour toutes.

Nous en conclurons que le seul principe applicable est celui de la meilleure convenance. Nous devrons nous faire à l'idée que la doctrine préalable doit rester révisable et ne représente qu'un choix provisoire, valable jusqu'à plus ample informé.

Le second chapitre, *Les trois aspects de la géométrie*, aura pour premier

objet de dégager les aspects sous lesquels la géométrie se constitue : l'aspect intuitif, expérimental et rationnel apparaîtront successivement et seront étudiés au niveau de l'information naturelle. Une question s'imposera : comment, à ce niveau, ces trois aspects se recouvrent-ils ?

Ou, en termes encore plus précis : comment la géométrie élémentaire conçoit-elle la rencontre de ces trois aspects ?

Pour répondre tout à fait équitablement à cette question, nous sommes peut-être des juges trop instruits. Nous ne saurions faire abstraction de toute l'information dont nous bénéficions aujourd'hui et dont les premiers géomètres ne pouvaient avoir le moindre soupçon.

Le mieux est donc de nous reporter à une époque où le niveau de connaissance répondait à la doctrine géométrique classique. Les géomètres du XVIIIe siècle, par exemple, pratiquaient tous la méthode de l'évidence (où l'influence de la philosophie cartésienne se superposait à la méthode d'EUCLIDE). À leurs yeux, les vérités élémentaires étaient également évidentes pour les trois aspects de la géométrie; bien plus, ces trois aspects restaient confondus. On ne songeait pas même à les distinguer l'un de l'autre.

La doctrine de l'évidence n'a plus pour nous son immédiate certitude et l'édifice géométrique perd le caractère de nécessité absolue qui en fut tout d'abord inséparable. Que représente-t-il encore pour nous ? Nous y distinguons une dialectique de l'espace répondant à une idée dominante fort simple que l'état de la connaissance semblait justifier : l'équivalence totale des trois aspects de la géométrie.

Rétrospectivement l'édification de la géométrie informée par l'évidence nous apparaît donc comme une solution involontaire du problème de l'espace, au niveau de l'information naturelle.

L'information dont nous bénéficions aujourd'hui dépouille cette solution de son caractère absolu sans la déclasser totalement. Elle la ramène au rang d'une réussite à la fois merveilleuse et provisoire; merveilleuse tant que nous ne quitterons pas le niveau d'information sommaire auquel elle est conforme; provisoire en face de l'état actuel du savoir. Cette confrontation, en effet, ne peut manquer de faire paraître approximative l'idée dominante de la géométrie dont il vient d'être question.

Dès cet instant, le problème de l'espace. se pose à nouveau pour nous dans un climat plus exigeant, dans des circonstances plus difficiles. Comment allons-nous l'aborder ?

Fidèles à l'intention dialectique que nous avons exposée, nous commencerons par reprendre tous les termes, tous les éléments en présence, pour en approfondir la connaissance. Est-il tout d'abord possible de conférer une certaine autonomie à l'aspect déductif, de le spécifier par une technique déductive appropriée ? Le chapitre III, *L'édification axiomatique de la géométrie*, réalisera cette intention dans la mesure du possible. Il est entièrement consacré à l'exposé de la méthode axiomatique, — créatrice de l'autonomie (relative) du théorique, — et à l'édification axiomatique de la géométrie.

Remarquons que la pratique déductive qui établit les théorèmes à partir des axiomes est elle-même une dialectique, la dialectique de la déduction. Mais ce n'est qu'un des éléments de notre étude. L'axiomatisation ne reprend pas, à elle seule, l'ensemble des intentions qui caractérisent la géométrie en tant que science de l'espace. L'édification axiomatique écarte systématiquement, dans la mesure du possible, tout ce qui se rapporte à l'intuitif et à l'expérimental. Elle ne constitue pas à elle seule la synthèse dialectique de l'espace. Mais cette dernière étendra aussi sa juridiction sur la dialectique de la déduction.

L'aspect expérimental et l'aspect intuitif devront eux aussi être mieux délimités, mieux compris et mieux décrits. C'est à ce prix seulement que nous pourrons concevoir les modalités d'un nouvel accord de ces deux aspects avec l'aspect axiomatique assumant désormais tout le rôle déductif.

Cet examen se place au chapitre IV, intitulé *La synthèse dialectique de la géométrie euclidienne*. Il exige pour être mené à bien l'intervention d'une série de notions telles que celles de schéma, de modèle, d'horizon de réalité, etc... Ces notions forment les instruments d'un certain stade de connaissance où l'esprit ne saisit plus une réalité entière et bien délimitée, mais seulement une réalité approximative ou sommaire.

À ce moment l'idée dominante d'une nouvelle dialectisation s'impose presque d'elle-même : l'équivalence schématique des trois aspects. Fondée dans la représentation qu'on a gagnée des rapports que les notions nouvellement introduites peuvent entretenir entre elles, la synthèse dialectique peut prendre son essor.

Elle constitue un système cohérent de jugements où se retrouvent toutes les intentions qui présidèrent à la création da la géométrie. Les êtres géométriques élémentaires : point, droite, étendue, axiome, y prennent part avec leurs trois significations, significations entre lesquelles la dialectique établit, dans un jeu souple et strict, les distinctions et les assimilations convenables.

L'édification de cette dialectique représente une nouvelle solution du problème de l'espace, au niveau de l'information instruite par notre expérience quotidienne et notre intuition naturelle. Cette solution est-elle définitive ? On aura remarqué que le non-euclidien n'y joue encore aucun rôle. L'expérience historique qui aboutit à la création des nouvelles géométries n'y est par conséquent pas encore englobée. Celle-ci ne va-t-elle pas introduire des exigences auxquelles nous n'avons pas encore satisfait ? Un nouvel examen, une nouvelle refonte de la doctrine préalable ne sont-ils pas inévitables ? La confrontation des géométries non-euclidiennes avec la technique de la mesure et avec notre représentation spatiale pose en effet certaines questions de

méthode auxquelles la doctrine de la connaissance schématique ne répond pas de façon entièrement satisfaisante. La situation se présente avec des caractères inédits, mais le principe de la dialectisation reste le même. Un approfondissement de la connaissance des termes et des méthodes au niveau précédent doit cependant préparer toute solution mieux adaptée.

C'est pourquoi le chapitre V, *Les géométries non-euclidiennes*, reprend la question de l'axiomatisation sous le signe de l'expérience dans le schéma. C'est ici qu'un résultat du chapitre IV prend toute sa signification. L'horizon de réalité du schéma, dans lequel la dialectique de la déduction opère, autorise la substitution d'un axiome à un autre, sans que la déduction ait à retoucher ses méthodes. La légitimité des géométries non-euclidiennes se trouve ainsi concrètement fondée. L'axiomatisation de ces géométries une fois terminée, le problème de l'espace est-il à nouveau résolu ? Certes non. Le commentaire que nous faisions tout à l'heure sur l'axiomatisation de la géométrie classique conserve ici toute sa valeur. L'axiomatisation abandonne volontairement, par méthode, quelques-unes des intentions sans lesquelles le mot de géométrie perd une bonne part de sa signification.

Ces intentions doivent être encore une fois retrouvées, reprises et renouées. Ce sera l'objet d'une dialectisation réalisatrice d'une nouvelle solution du problème de l'espace. L'évolution de la géométrie s'engagera dès lors dans un climat plus abstrait, plus logique. Ce n'est plus le problème de l'espace qui en formera le cadre naturel, mais un problème plus général, celui de la méthode des sciences. Cet aspect sera étudié en détail dans un autre ouvrage.

Quant à la dialectisation qui doit permettre à l'euclidien de prendre place à côté du non-euclidien dans un ensemble cohérent, elle fait l'objet du début du chapitre VI, *Le problème de l'espace*.

Jusqu'ici nous imaginions que l'aspect théorique de la géométrie euclidienne correspondait de façon schématique à notre représentation intuitive de l'espace. Dans le cadre des géométries non-euclidiennes, le divorce entre ces deux aspects est complet. Il nous faut reconstruire une représentation concrète de l'espace à la mesure de l'aspect abstrait des nouvelles géométries. Maintenant notre connaissance du concret dépend des vues théoriques et réagit sur elles; l'abstrait et le concret se construisent ainsi simultanément dans une dialectique de l'*abstrait-concret*.

Le concret se réalise alors sous la forme d'un nouvel espace, l'espace universel qui joue, vis-à-vis du non-euclidien, un rôle équivalent à celui de l'espace sensible vis-à-vis de la géométrie euclidienne. En dernière analyse, le problème de la synthèse de l'euclidien et du non-euclidien se ramène à l'étude de la compatibilité de ces deux espaces. Ils sont compatibles en ce sens que l'homme, considérant l'espace universel, en reçoit une image qu'il peut confondre en première approximation avec l'espace euclidien.

Cette troisième solution du problème de l'espace sera la dernière que nous examinerons dans cet ouvrage. Il ne sera d'ailleurs pas nécessaire d'en dire plus pour légitimer nos conclusions. Sous la forme de répliques à cette introduction, celles-ci souligneront l'accord de nos thèses générales avec toutes les péripéties de notre étude :

La critique pose les problèmes, la technique apporte les éléments d'information, la synthèse dialectique construit les solutions.

Le chapitre VI sera suivi de notes bibliographiques et historiques.

CHAPITRE I

LA DOCTRINE PRÉALABLE DES VÉRITÉS ÉLÉMENTAIRES

Parmi ceux à qui cet ouvrage s'adresse, il n'est personne qui n'ait déjà bénéficié d'un enseignement de la géométrie élémentaire. Il n'est personne qui ne possède une certaine pratique des constructions géométriques, une certaine habileté dans la résolution des problèmes et une certaine assurance dans la démonstration des théorèmes. Les uns et les autres disposent donc d'un fond de connaissances communes qu'il ne vient à l'esprit de personne de mettre en doute.

L'étude que nous allons entreprendre, en partant de la géométrie élémentaire, semble donc bénéficier d'un avantage initial extrêmement précieux : l'avantage de ne laisser aucune équivoque derrière elle, de s'appuyer au départ sur une complète unanimité de vues. Quelqu'un protesterait-il, si je demandais d'accepter la chose comme certaine ? Quelqu'un jugerait-il cette affirmation trop audacieuse ? La refuserait-il comme prématurée et demanderait-il qu'on s'en assurât avant de ne rien entreprendre ? Le fait me semble peu probable, si grand est le sentiment de certitude qui s'attache aux démarches de la géométrie.

D'autre part, si nous nous trompions, si l'accord au point de départ n'était qu'apparent, serait-il sage de se mettre en chemin sans s'en être aperçu ? Une aussi grosse erreur d'appréciation ne devrait-elle pas se retrouver une fois ou l'autre ? Comment pourrions-nous être sûrs de ne pas voir éclater tout à coup la confusion dissimulée dans « nos bagages » ?

Tout bien pesé, le risque d'une erreur au départ ne doit pas être accepté. Aussi allons-nous, — contre le bon sens, dira-t-on peut-être, — imaginer une méthode de contrôle. Nous allons rappeler les tout premiers débuts de l'enseignement de la géométrie, les instants où le maître s'efforce de faire saisir ce que sont les notions fondamentales de surface, de ligne, de point, de droite et de plan. Nous ne pouvons naturellement faire parler tous les maîtres à la fois; adressons-nous donc à l'un d'eux et écoutons-le attentivement. Ses explications nous serviront de termes de comparaison. Nous les commenterons et, par leur intermédiaire, nous procéderons à une confrontation générale des opinions et des doctrines, sur certains points spécialement choisis.

4. LES NOTIONS FONDAMENTALES.

Voici donc la première étape de cette confrontation, celle où le maître a la parole :

« L'idée de surface est au nombre de ces idées familières dont nous nous servons couramment sans en mesurer l'exacte portée : nous parlons de la surface de la terre, de celle d'un lac, de celle d'une lentille de verre. Il y a cependant quelque difficulté à préciser la signification de ce mot.

» Voici comment l'idée de surface, telle qu'il nous faut la concevoir en géométrie, peut être suggérée et précisée.

» Proposons-nous de subdiviser aussi exactement que possible un espace en deux parties, la salle où nous sommes, par exemple. On peut commencer par établir une paroi de quelque épaisseur. Pour rendre la subdivision plus précise, on remplacera cette paroi par une cloison plus mince, située tout entière dans l'espace que la paroi occupait. Cette cloison elle-même pourrait être remplacée par une membrane très mince située encore dans l'espace que la cloison occupait. Et ainsi de suite.

» Dans la réalité, il arrive toujours un instant où nous sommes arrêtés par des difficultés d'ordre matériel. Mais rien ne nous empêche de continuer notre jeu *en pensée* et d'imaginer, à l'intérieur de toute cloison, une cloison plus mince encore. Nous sommes alors conduits à la notion de *surface géométrique, séparation parfaite et sans épaisseur, de deux régions contiguës de l'espace*.[1] »

Après l'idée de surface, celle de ligne, puis celle de point sont introduites de façon analogue. Voici ce que le maître peut dire de la dernière de ces notions : « Dans le langage courant[2], le mot « point » désigne simplement une image visuelle très nette : une étoile au ciel n'est qu'un point brillant, un ballon qu'on va perdre de vue n'est qu'un point noir.

» En géométrie, le même mot doit désigner un endroit déterminé avec la plus grande précision.

» Supposons, par exemple, cet endroit situé dans la salle où nous sommes. Pour préciser, imaginons qu'on ait partagé cette salle par une cloison verticale; on indiquera dans laquelle des parties il se trouve. Cette dernière étant partagée à son tour par une cloison horizontale, on indiquera à nouveau celle des parties qui contient l'endroit à définir; et ainsi de suite.

» Sans nous laisser arrêter par les difficultés que l'exécution de ce programme comporte inévitablement, nous la poursuivons en pensée. Nous imaginons un espace de plus en plus restreint, délimité par des cloisons de plus en plus minces, qui se resserre indéfiniment sur un endroit *parfaitement déterminé; cet endroit est un point géométrique*.

[1] F. GONSETH et S. GAGNEBIN : *Éléments de Géométrie; I. Géométrie plane*. Payot, Lausanne, 1942, p. 3-4.

[2] *Loc. cit.*, p. 6-7.

» On explique de façon analogue comment on peut situer un point sur une surface ou sur une ligne, et comment s'effectue, par des points, la délimitation ou la séparation de segments sur une ligne.

» *Le point géométrique n'a plus aucune grandeur*. Un grain de poussière ne nous en offre qu'une représentation grossière. Cependant, il est utile et même nécessaire de se servir de représentations approximatives à l'aide d'objets ou de signes matériels assez petits : la marque d'une pointe de crayon ou de compas sur une feuille de papier, le point blanc fait à la craie sur le tableau. »

Le plan et la droite, en tant qu'éléments géométriques, sont ensuite évoqués et suggérés à partir de certaines réalisations du monde physique, qui ne sont qu'approximativement planes ou rectilignes : tels sont, par exemple, la surface d'un étang tranquille, un fil ténu et bien tendu.

Ces notions idéales, une fois introduites et saisies, il reste à expliquer comment seront aperçues les propriétés qui leur appartiennent et les relations qu'elles ont entre elles.

« Il nous faudra, dira le maître, étendre aux notions idéales certaines propriétés bien évidentes des réalisations que nous savons construire. »

Les explications que nous venons de prêter au maître forment, avons-nous dit, la première étape de la confrontation des points de vue. Passons maintenant à la seconde, c'est-à-dire au commentaire de ces mêmes explications.

5. NÉCESSITÉ D'UNE JUSTIFICATION.

Nous ne pensons pas soumettre à la critique chacune des phrases du maître. Nous manquerions ainsi notre but. Rien n'est plus délicat à exposer que les premières démarches par lesquelles une discipline se fonde. Les exigences auxquelles ces démarches ont à répondre ne peuvent être appréciées équitablement dès le début, mais seulement à un stade plus avancé, lorsqu'on a compris où l'on voulait en venir.

C'est dans un tout autre sentiment que nous examinerons les premières déclarations du maître. Puisqu'il est encore trop tôt pour demander pourquoi il parle comme il l'a fait, nous nous attacherons à sa façon de présenter les choses, à la position qu'il occupe, au terrain sur lequel il se place pour donner ses explications.

Veuillez remarquer tout d'abord que, dans les explications que nous lui prêtons, le maître exige de ses élèves un effort mental très particulier : il leur demande de faire la distinction entre la droite idéale et sa réalisation rectiligne par exemple. « La première, dira-t-il, est une idée formée par notre intelligence. La seconde est un objet ou plus généralement une réalité du monde physique. Pour pouvoir comprendre ce que veut la géométrie, il faut être à la fois capable de dissocier et de réunir l'idéal et le physique. Il faut savoir les dissocier en considérant la droite géométrique comme un être abstrait conçu à partir de

certains objets concrets; il faut savoir les réunir en considérant ces objets comme des réalisations de l'idée abstraite. »

Ce qui vient d'être dit de la droite pourrait l'être aussi de toutes les autres notions fondamentales de la géométrie, de l'angle, du cercle, etc.

Vous le voyez, le maître demande à ses élèves d'imaginer en quelque sorte deux mondes différents l'un de l'autre : un monde de la nature physique et un monde des idées abstraites. Il leur demande encore davantage : sur l'exemple de la droite, il leur propose d'imaginer comment ces deux mondes peuvent et doivent être mis en relations l'un avec l'autre, l'un comme monde des abstractions, l'autre comme monde des réalisations.

Mais d'où le maître tire-t-il la *doctrine des deux mondes* qu'il présente, d'où tient-il sa connaissance de la façon dont ils s'unissent et dont ils s'opposent ? D'où lui vient le droit de présenter ses idées à ce propos comme justes et sûres, si sûres même qu'il n'hésite pas à en faire le fondement de son enseignement ?

Est-ce que ce sont là des vérités évidentes ? Est-ce qu'il suffit d'y réfléchir avec attention pour les apercevoir comme des certitudes que nous portons en nous ? Est-ce qu'il suffit de les énoncer clairement pour que leur vérité s'impose avec nécessité ? Si tel était le cas, le maître ne ferait que formuler ce qui se trouve latent en chacun de nous et qui ne demande que l'occasion de s'exprimer. Si tel était le cas, une confrontation générale des points de vue devrait révéler, sur ces matières, un accord tout prêt à s'établir, une convergence toute prête à se manifester. Peut-être n'est-il pas prudent d'y compter.

Mais si le maître ne fait pas simplement appel à des connaissances déjà présentes en nous, comment pourrons-nous savoir qu'il n'a pas tort ? Comment pourrons-nous juger de l'objectivité de ce qu'il avance ? Comment saurons-nous qu'il n'expose pas simplement un point de vue individuel, incontrôlable ? Si tel était le cas, pourquoi devrions-nous en faire nous-mêmes un article de foi ?

Cependant, à côté de la connaissance innée et de l'article de foi, il y a encore la connaissance qui s'acquiert, dans une existence d'homme ou par l'expérience des générations. Il se pourrait donc aussi que le point de vue du maître, — le point de vue que nous lui prêtons, — répondît à un certain état de connaissance, à un certain état de ce qu'on nomme la connaissance objective. Dans ce cas, le maître ne ferait pas appel à des vérités prêtes à s'éveiller dans notre intelligence, il s'efforcerait au contraire de nous suggérer, pour commencer, les vues qu'il estime indispensables et légitimes pour fonder la géométrie.

6. La doctrine des vérités élémentaires.

Nous venons de distinguer trois possibilités. La première était celle d'un accord prêt à s'éveiller en nous et que le maître tente d'expliciter; la seconde était celle de l'opinion individuelle, le maître proposant un article de foi; la troisième, celle de la connaissance qui s'acquiert et dont le maître cherche déjà à tenir compte. Ces trois cas s'excluent mutuellement. Pour caractériser la position du maître, seul l'un des trois convient. Il serait extrêmement pénible de devoir rester dans l'indécision. Mais notre choix ne doit certainement pas être arbitraire. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ce point. Pour l'instant, bornons-nous aux remarques suivantes :

Nous ne nous arrêterons pas sérieusement au cas de l'article de foi. Deux éventualités restent donc en présence l'une de l'autre, celle de la connaissance innée et celle de la connaissance acquise. Dans la première, les explications du maître se justifient d'elles-mêmes et trouvent nécessairement notre assentiment. Dans la seconde, ces explications ne peuvent être jugées avec une équité parfaite qu'une fois rejoint le niveau de connaissance où le maître s'est placé. Celui-ci ne demandera pas qu'on lui apporte une foi aveugle, mais bien qu'on lui fasse confiance, qu'on lui accorde une attention qu'il a le devoir de mériter et qui se justifiera en temps opportun.

L'expérience que nous allons tenter tranchera l'alternative sans équivoque. Jusque-là, contentons-nous de noter que dans les deux cas, c'est avec des vues préconçues — préconçues ne veut pas dire ici incorrectes ou illégitimes — que nous abordons l'étude de la géométrie. Les premières explications qui nous sont adressées s'inspirent d'une *doctrine préalable concernant la réalité de l'espace et des objets qui s'y trouvent et la connaissance que nous pouvons en acquérir ou en posséder*. Il importe d'observer que ce n'est pas l'esprit vierge de toute opinion préalable que nous entrons dans le raisonnement géométrique, mais au contraire l'esprit armé d'une *doctrine des vérités élémentaires* au nom et sous l'égide de laquelle nos premières démarches géométriques s'accompliront.

La présence d'une telle doctrine dès l'instant où une discipline, dite rationnelle, — telle que la géométrie, — va être fondée, peut paraître inopportune; il ne servirait à rien d'en nier l'existence. Ce serait nous tromper nous-mêmes sans profit.

Ayant ainsi décelé, dans les explications du maître, la présence d'une doctrine des vérités élémentaires, d'une doctrine préalable et préconçue, passons à la troisième étape de notre confrontation.

De nombreux étudiants de l'Ecole polytechnique fédérale se sont prêtés à l'enquête que nous avons ouverte pour les inviter à examiner des idées qu'ils n'avaient pas l'habitude de discuter explicitement. Voici les questions qui leur ont été soumises à cette intention :

Veuillez expliquer en quelques mots,
1° *ce qu'est une droite,*
2° *ce qu'est un axiome.*

7. Qu'est-ce qu'une droite ?

Nous avons reçu entre autres les réponses suivantes :

Première réponse. — *Comment pourrais-je expliquer exactement ce qu'est une droite puisqu'il ne fait aucun doute que ce que je me représente comme une droite n'en est pas une ?*

Je ne puis relire cette réponse sans un grain d'irritation et une certaine admiration. Elle esquive fort spirituellement la question, ce qui est peut-être, à parler objectivement, la plus juste des réponses, car la question, — il faut le reconnaître, a un caractère assez spécieux.

Et pourtant, pour notre enquête, ce n'est pas une réponse perdue. Elle joue sur la distinction qu'il faut établir entre deux conceptions différentes de la droite, entre la droite de l'intuition naturelle que l'on croit voir réalisée dans un fin rayon de lumière, dans un fil tendu, dans l'arête d'un cristal, et la droite idéale dotée de toutes les propriétés théoriques que la géométrie lui confère.

Ainsi, pour ne point répondre à la question posée, l'étudiant n'en évoque pas moins les deux mondes dont nous parlions à propos de la doctrine des vérités élémentaires du maître, le monde des réalisations et le monde des idées pures. Par une simple allusion, il est vrai, mais par une allusion qui n'est pas douteuse.

Enfin, en refusant de s'engager davantage, l'auteur de cette réponse évasive pose nettement en problème la correspondance de l'une des conceptions de la droite à l'autre. Comment expliquer, en effet, en quelques lignes ce qui est un problème essentiel de la connaissance ?

Deuxième réponse. — *Une droite est quelque chose qui n'existe pas. Dès lors, comment pourrais-je en donner la définition ?*

Voilà une réponse singulière !

Le sentiment qui l'inspire est peut-être analogue à celui qui a dicté la réponse précédente. Mais le résultat est moins satisfaisant.

Pour ce qui concerne notre enquête, elle contient cependant des indications fort précises. On notera l'idée que la droite n'a pas d'existence, que par conséquent l'existence est le fait des objets concrets. On rapprochera cette idée de cette autre, à savoir que ce qui ne possède pas cette existence ne peut être défini, et que par conséquent les objets *existants* doivent pouvoir l'être.

Sans vouloir discuter la valeur de ces idées, la possibilité qu'elles offrent ou n'offrent pas d'y asseoir l'idée d'une géométrie, n'est-il pas visible qu'elles expriment une certaine doctrine préalable concernant l'existence, le définissable, etc., qu'elles répondent à certaines opinions préconçues sur les vérités élémentaires ?

D'autre part, l'absence de toute allusion au côté abstrait de la question ne peut passer inaperçue. On ne peut s'empêcher de se demander : mais de quel genre d'existence l'auteur de cette réponse va-t-il doter les notions géométriques, comment va-t-il supposer qu'elles lui sont données ? Il doit imaginer un monde des idées complètement autonome. Le problème de la concordance des deux mondes ne se pose pas pour lui.

Mais cela est encore un caractère de sa doctrine de la connaissance élémentaire.

Troisième réponse. — *Il n'est guère possible, je dirai même qu'il est impossible, de définir une droite de façon concrète, c'est-à-dire de la mettre en relation avec le monde extérieur. Une définition abstraite s'imposerait, — mais je n'en connais pas de satisfaisante.*

Encore une réponse négative.

Du point de vue de notre enquête, elle est clairement interprétable. Car elle se réduit à quelques affirmations nettement exprimées relatives à la doctrine des vérités élémentaires de son auteur. Nous y retrouvons tout d'abord la même idée que dans la réponse précédente : pour expliquer ce que c'est qu'une droite, il faut la définir. Vraie ou fausse, — ce que nous ne discutons pas ici, — cette idée représente un point de doctrine, un point essentiel concernant la nature et les moyens de la connaissance.

Relevons ensuite l'affirmation que cette définition ne peut être donnée dans le monde physique, et l'affirmation complémentaire qu'elle devrait pouvoir l'être dans le monde des idées abstraites.

La nette distinction — qui va jusqu'à l'opposition — ainsi marquée entre l'existence concrète et la nécessité abstraite montre que notre auteur est très consciemment partisan de la doctrine des deux mondes.

Mais (*in cauda venenum*), la remarque finale : « je n'en connais pas de satisfaisante » dévoile au moins deux choses : premièrement, une certaine incapacité de saisir que la géométrie puisse participer à la fois aux deux mondes dont la doctrine pose l'existence, et deuxièmement, la faillite totale de l'intention de fonder la géométrie, au sens pédagogique le plus simple et le plus immédiat.

Quatrième réponse. — *On peut définir une chose en disant comment on l'engendre : on nous a dit : la droite est engendrée par le mouvement d'un point ou mobile qui conserve sa direction.*

Cette définition de la droite est naturellement très contestable; elle se sert en effet de notions non définies telles que celles de point, de mouvement, de direction, qui sont géométriques au même titre que celle de droite et dont on ne sait pourquoi elles exigent moins que cette dernière d'être définies.

Mais, juste ou fausse, cette réponse n'en présente pas moins un vif intérêt.

Contrairement à ce que nous avons observé dans la réponse précédente, le problème du fondement de la géométrie est présenté ici comme résolu en principe. Quel est le point de doctrine correspondant ? Remarquons que, dans cette réponse, il n'est fait nulle allusion à l'opposition de l'abstrait et du concret. Le problème de l'accord du physique et du géométrique est ici tranché de la façon la plus simple : en posant par avance qu'ils existent de la même existence. Ce n'est plus la doctrine des deux mondes distincts qui est ici à l'arrière-plan, mais la doctrine des deux mondes confondus.

Relevons encore l'affirmation selon laquelle « on peut définir une chose en disant comment on l'engendre ». N'est-elle pas, elle aussi, un point de doctrine concernant la nature et l'exercice de la pensée ?

Indépendamment de leur justesse ou de leur fausseté, indépendamment de leur incompatibilité avec certaines des opinions exprimées dans les réponses précédentes, les opinions qui ont suggéré cette quatrième réponse ne forment-elles pas au moins l'esquisse d'une doctrine des vérités élémentaires ?

Cinquième réponse. — *La droite s'obtient par un passage à la limite; par exemple un fil tendu qui devient de plus en plus ténu.*

Cette réponse présuppose aussi, semble-t-il, la doctrine des deux mondes confondus. L'expression de passage à la limite est employée ici dans un sens fort impropre. Sans peut-être s'en rendre compte, l'auteur de cette cinquième réponse reporte sur le monde physique les procédés d'approximations successives et de convergence vers une limite définie par le calcul infinitésimal.

En d'autres termes, la réponse précédente se fonde sur une certaine conception de l'espace physique, sur l'idée de la structure infinitésimale de ce dernier.

Sixième réponse. — *Je prendrais tout de même la droite comme la limite d'un fil extrêmement mince, sans souci de la réalité.*

À première vue, cette réponse diffère assez peu de la précédente. En y regardant de plus près, on s'étonne toutefois du conditionnel, du « tout de même » et de la remarque finale : « sans souci de la réalité ». Quel peut être le sens de ces réserves ? La réponse elle-même ne permet guère de s'en faire une idée.

Sollicité de s'expliquer, l'auteur de cette réponse sibylline laissa entendre que, pour lui, l'existence mathématique a la primauté. Elle se fonde en elle-même, « sans souci de la réalité ». Imaginer la droite comme la limite d'un fil tendu n'est alors qu'un moyen de parvenir à la conception de la droite idéale. Une fois celle-ci rejointe, peu importe le chemin par lequel l'esprit a passé.

Belle réponse de jeune mathématicien ! Mais son auteur s'apercevra peut-être un jour que, dans sa fierté abstraite, il néglige tout un pan du problème de la connaissance.

Relevons la nuance de la doctrine préliminaire qui s'est ainsi dévoilée; c'est la doctrine des deux mondes avec une prééminence décisive du monde des idées. Une nuance bien différente de celle de la réponse précédente.

Septième réponse. — *La droite peut être définie de façon empirique, mais il faut ensuite idéaliser.*

Huitième réponse. — *Bien que la physique atomique me l'interdise, je ne puis me représenter une droite que comme un fil tendu très mince.*

Neuvième réponse. — *Une droite en géométrie est l'image idéale de ce qu'on nomme une droite dans le langage courant (par exemple, l'arête d'une règle). Une droite n'existe que dans notre esprit, en tant que représentation. Elle ne peut donc pas être définie par des choses du monde concret.*

Il y a entre ces trois réponses des différences visibles. Tandis que la septième prétend, par exemple, qu'une droite peut être définie empiriquement, la neuvième le conteste expressément. Mais elles présentent cependant un caractère commun : de façon assez vague dans la première, de façon très nette dans la dernière, elles font appel à un nouvel élément d'explication, à l'idée de représentation. Nous passons ainsi à une variante psychologique de la doctrine des deux mondes. Le monde des idées prend figure de monde mental que l'idée de représentation relie à la réalité physique. Entre l'image que l'on se fait d'une chose et la chose elle-même, il y a maintenant place pour tous les degrés de l'inadéquation.

Dans les deux réponses qui viennent enfin clore cette liste, l'idée de représentation prend presque la nuance de l'a priori kantien.

Dixième réponse. — *La notion de droite m'apparaît aussi évidente que celle de chaleur. Mes souvenirs ne remontent pas assez haut pour m'empêcher de croire qu'elle est innée.*

Onzième réponse. — *Avec l'idée de droite, je considère certains éléments de la réalité que je perçois. Parcourant, par exemple, une route que je vois rectiligne, je sais que je ne reviendrai pas à mon point de départ. Cette propriété appartiendra aussi à la droite, et ainsi de suite.*

Encore une fois, il ne s'agit pas, pour l'instant, de savoir si l'auteur de la dixième réponse a tort ou raison de croire que l'idée de droite est innée; seule l'observation de la genèse des représentations spatiales chez l'enfant pourrait en décider. Il ne s'agit pas ici de juger si l'auteur de la onzième réponse se trompe ou ne se trompe pas en pensant que les propriétés de la droite lui viennent de ce que celle-ci est d'avance dans notre représentation et de l'usage auquel elle se prête. Ce qu'il nous importe de constater, c'est que ces deux dernières réponses ne font pas exception à la règle. La dernière contient en

particulier une tentative d'accorder entre eux les deux rôles que la droite joue dans l'établissement de la connaissance, une première fois en tant que forme a priori de notre représentation, et une seconde fois en tant que représentation d'objets fournis par l'expérience *a posteriori*.

8. COMMENTAIRES. Nous voulons arrêter là la liste des réponses à notre première question. En l'allongeant, nous rencontrerions sans doute d'autres nuances, plus ou moins acceptables, plus ou moins originales ou plus ou moins singulières. Mais elles ne pourraient que confirmer les constatations qui s'imposent dès maintenant. Notre enquête n'est pas terminée et ce n'est pas encore le moment d'en formuler les conclusions, il y a cependant quelques remarques que nous ne voulons pas différer.

1) En commentant les premières explications du maître, nous avions relevé qu'elles s'inspirent d'une certaine doctrine préalable des vérités élémentaires. Or il saute aux yeux qu'il en est de même pour chacune des réponses que nous venons d'examiner. Derrière chacune d'elles, l'informant et l'inspirant, il y a un point de vue préconçu, posé d'avance comme certain. Aucune ne laisse complètement « en blanc » les réponses à certaines questions concernant la nature et le rôle des notions géométriques.

2) Entre les diverses positions qui nous sont ainsi révélées, ce n'est pas l'accord qui est la règle. C'est au contraire la dispersion des opinions et l'incompatibilité des affirmations.

Par là se trouve déjà tranchée l'alternative que nous avions laissée en suspens concernant le caractère inné ou acquis de la doctrine préalable du maître. Dans le premier cas, dans le cas de la vérité *a priori* de cette doctrine, il eût fallu que toutes les réponses fussent informées et orientées par une même évidence générale. Il eût fallu que chacune d'elles nous offrît le reflet plus ou moins vif d'une même lumière naturelle de l'esprit. Or la réalité est tout autre. Ce que certaines des réponses précédentes suggèrent, les autres l'ignorent, ce que les unes tiennent pour certain, les autres le tiennent pour douteux, ce que les unes admettent pour vrai, les autres le rejettent comme faux.

L'expérience est faite et son résultat, pour incommode qu'il soit, ne peut pas être mis en doute : ni la doctrine du maître, ni aucune de celles qui apparaissent dans les réponses à notre première question ne doivent être considérées comme données d'avance avec certitude. Ce résultat se trouvera d'ailleurs entièrement confirmé par les réponses à notre seconde question.

3) Il est assez piquant d'observer que le vocabulaire adéquat à la description des divers points de vue que nous voyons ainsi entrer en compétition, voire en contradiction, les uns avec les autres est le vocabulaire usuel de la philosophie et plus spécialement de la théorie de la connaissance. De telle de ces réponses, on pourrait dire qu'elle penche vers un réalisme mathématique, de telle autre qu'elle se rapproche de l'idéalisme platonicien, d'une troisième qu'elle rappelle l'idéalisme kantien, etc. Il n'est presque aucune des théories que l'histoire de la philosophie a retenues qui n'apparaisse en germe, en esquisse ou en intention dans l'une ou l'autre des réponses de cette première série.

Il n'en sera pas autrement de la seconde série.

9. QU'EST-CE QU'UN AXIOME ?

Première réponse. — *L'axiome est une vérité évidente par elle-même.*

C'est là une réponse traditionnelle. Une affirmation aussi simple comporte-t-elle un *apport doctrinal* quant à l'organisation des vérités élémentaires ? Sans aucun doute. Elle pose en fait qu'il existe des vérités évidentes par elles-mêmes. Elle exige donc que l'on se fasse du monde et de la pensée humaine une idée telle que les vérités axiomatiques ainsi comprises n'en soient pas exclues.

Ces vérités, puisqu'il s'agit ici de géométrie, engagent aussi en quelque façon le monde physique. On se trouve ainsi porté, d'exigence en exigence, vers un rationalisme mathématique intégral auquel peu de jeunes esprits n'ont pas goûté.

La réponse qui suit fait précisément ressortir ce rationalisme inconditionnel.

Deuxième réponse. — *Un axiome est une vérité absolue qui se détache de toute matière et que la raison peut seule poser.*

L'axiome est ainsi une vérité de raison, non une vérité d'expérience, — une vérité *a priori*. Sa vérité n'est point une affaire d'apparence ou d'approximation. Elle est totale, dans un monde adéquat à sa nature.

Troisième réponse. — *Un axiome est une vérité absolue qui se vérifie dans l'expérience.*

Le rôle que cette réponse concède à l'expérience ne la rend-il pas incompatible avec la précédente ? Il y a certainement entre elles une nuance appréciable. Mais il ne semble pas que l'auteur de la dernière ait voulu limiter la vérité sans condition de l'axiome par une exigence à remplir. Il pose simplement en fait, comme un fait qui va de soi, que le siège des vérités inconditionnelles est aussi bien le monde physique que le monde des idées.

Les trois réponses qui précèdent ont un caractère commun : elles ne supposent pas qu'il faille une certitude humaine pour conférer à un axiome son sceau de vérité absolue. Cette vérité est dans l'axiome et non dans l'esprit de celui qui le conçoit.

Les deux réponses qui suivent, en faisant intervenir la conscience et l'intuition, tempèrent un peu l'absolu de ce point de vue.

Quatrième réponse. — *On appelle axiome une vérité évidente par elle-même, quelque chose qui s'impose à nous avec la même nécessité que la conscience de notre existence.*

Cinquième réponse. — *Un axiome est une proposition indémontrable qu'on admet à cause de son évidence intuitive.*

Remarquons que l'axiome est considéré ici comme indémontrable en soi, et non par rapport à un certain ensemble d'autres propositions. C'est d'ailleurs une idée très conforme au sentiment *purement rationaliste* qui informe ce premier groupe de cinq réponses.

Dans les réponses qui vont suivre, nous verrons cette position rationaliste s'affaiblir progressivement pour faire place à une série de points de vue assez divers.

Sixième réponse. — *Un axiome est un fait — de la géométrie, par exemple — que l'esprit humain a dû admettre sans avoir pu jusqu'à maintenant le démontrer.*

L'auteur de cette réponse n'éprouve pas le besoin d'indiquer pourquoi l'esprit humain s'est trouvé dans la nécessité d'admettre des propositions du genre d'un axiome. Il ne semble pas repousser l'idée que ce soit là une position de simple commodité, une position d'attente que l'on pourra peut-être abandonner un jour, lorsque la démonstration aura été découverte.

On notera combien cette idée s'éloigne de celle de l'axiome indémontrable par nature de la quatrième réponse.

Septième réponse. — *Un axiome est une proposition qui ne peut pas être démontrée à partir de propositions plus simples.*

On se trouve ici en présence d'une tentative d'expliquer pourquoi l'esprit humain ne peut échapper à la nécessité de s'arrêter à des énoncés axiomatiques.

L'auteur pose en principe qu'une démonstration est une réduction de la proposition à démontrer à des énoncés plus simples. Dans toute démonstration effective, cette réduction doit une fois trouver son terme. Les énoncés auxquels on s'est arrêté sont donc indémontrables parce qu'ils sont les plus simples possible.

L'apport de cette septième réponse est extrêmement contestable; il consiste à admettre que les énoncés démontrables peuvent être rangés dans un ordre ramifié de simplicité croissante. Or on ne possède en fait aucun critère de simplicité qui puisse justifier ce point de vue.

Huitième réponse. — *L'axiome est une proposition suffisamment élémentaire pour qu'il puisse être démontré par l'intuition ou par l'expérience.*

Cette réponse s'inspire de la même idée de simplicité relative des énoncés que la précédente. Mais ce qui décide de la vérité des propositions élémentaires, ce n'est plus la raison, comme dans notre tout premier groupe de réponses. L'axiome est au contraire assimilé à une vérité de fait ou à une vérité d'expérience dans le monde physique.

Voici encore une réponse du même genre, mais dans laquelle la nécessité de la vérité des axiomes semble encore s'affaiblir.

Neuvième réponse. — *Démontrer un théorème, c'est le déduire d'autres énoncés déjà connus. Si ces derniers ont été démontrés, ils sont réductibles à leur tour à des énoncés plus élémentaires. De cette façon, on remonte finalement à des énoncés qui ne sont plus démontrables mais qui sont évidents à chacun. Ces derniers sont des axiomes.*

Tous les essais de définition ou d'explication qui précèdent peuvent être réunis sous un même titre : ils prennent tous pour objet *l'axiome en tant qu'énoncé vrai*. L'axiome peut-il être autre chose ? Si l'on ne savait que les premiers commentateurs d'EUCLIDE mettaient déjà en doute *le postulat des parallèles* parce qu'il ne leur paraissait pas suffisamment évident, si l'on ne savait que dans la géométrie non-euclidienne, dans la mécanique, etc., l'axiome ne correspond aucunement aux explications précédentes, on pourrait s'étonner de la tournure que vont prendre les réponses suivantes. Le caractère de vérité des axiomes, leur qualité de vérité va, en effet, passer au second plan, même au rang de qualité négligeable.

Dixième réponse. — *Un axiome, — ou mieux encore, un postulat, — est une proposition que l'on demande d'admettre sans démonstration.*

On le voit, l'auteur de cette réponse ne fait plus aucune allusion à la vérité de la proposition que l'on demande d'admettre. Il ne trouve pas même utile d'indiquer quelles raisons l'on peut avoir de ne pas le faire.

Les trois réponses suivantes sont un peu plus explicites sur ce point :

Onzième réponse. — *L'axiome est le point de départ d'une théorie.*

Douzième réponse. — *L'axiome est une proposition fondamentale dont on ne donne pas de démonstration.*

Treizième réponse. — *L'axiome est un énoncé dont on ne peut se passer comme fondement d'une théorie, mais qu'on ne peut pas démontrer.*

Ces dernières réponses sont fort proches les unes des autres. Elles forment un groupe ayant de l'axiome une idée qui s'oppose très sensiblement à celle du groupe purement rationaliste des cinq premières. Cette dernière conception ne saurait admettre, par exemple, que deux énoncés incompatibles soient acceptés

tous deux comme axiomes. Si l'un est juste, dira le partisan de la vérité inconditionnelle, l'autre est faux. Et si l'on bâtit une première théorie à la base de laquelle se trouve l'un de ces axiomes et une seconde théorie à la base de laquelle se trouve le second, l'une au moins de ces théories est incorrecte.

« C'est là un point de vue beaucoup trop exclusif, répondra le partisan de l'axiome-point-de-départ-d'une-théorie. Il y a bien des axiomes, — en mécanique. par exemple, — dont on ne peut savoir d'avance s'ils sont justes ou faux. C'est la théorie qu'on en déduit qui tranche après coup : l'axiome est juste si la théorie est réussie, si elle est efficace.

» Il est même tout à fait légitime d'essayer deux axiomes incompatibles entre eux mais, bien entendu, à la base de deux théories différentes... »

Ce n'est pas le moment de poursuivre la discussion qui pourrait ainsi s'engager entre les défenseurs de l'une ou de l'autre des conceptions de l'axiome. Il est trop tôt pour chercher à qui l'on doit donner tort ou raison. Nous voulons au contraire revenir sans nous lasser à la question que notre enquête a la mission d'éclaircir. La conception de l'axiome dont il est maintenant question est-elle aussi organiquement liée à certaines façons de concevoir les réalités et les vérités élémentaires ? Le partisan de cette conception ne devra-t-il pas nécessairement se réclamer d'une doctrine préalable dont il est à peine conscient, mais que la discussion mettrait en lumière ?

La chose n'est pas douteuse. En passant de l'idée de l'axiome-vérité inconditionnelle à celle de l'axiome-vérité à l'essai, on abandonne toute une façon de se représenter le vrai, le réel et les modalités de leur accord, pour leur substituer une pratique des incompatibles, une autre façon de fonder les théories, une autre façon de les interpréter dans le réel, etc. Et la doctrine des vérités élémentaires devient ce qu'il faut qu'elle soit pour qu'elle ne s'inscrive pas en faux contre cette pratique des incompatibles, pour qu'elle ne s'oppose pas à cette nouvelle façon de fonder les théories.

On dira peut-être avec quelque scepticisme : y a-t-il vraiment tant de choses dans une affirmation aussi simple, dans une déclaration aussi nette, par exemple, que l'une ou l'autre des deux réponses suivantes :

Quinzième réponse. — *L'axiome est une hypothèse de travail, dans les sciences.*

Seizième réponse. — *Un axiome est une définition au fond arbitraire, mais heureuse.*

La qualité de vérité d'un axiome se trouve complètement éliminée de ces deux réponses. Le divorce avec la conception de l'axiome-vérité en soi y est accompli.

Mais est-on libre de dire : l'axiome est une vérité absolue, l'axiome est une vérité d'expérience, l'axiome est une hypothèse, l'axiome est une définition ?

L'axiome ne saurait être toutes ces choses à la fois. Un axiome déterminé, le suivant par exemple :

par deux points passe exactement une droite

ne saurait être à la fois une vérité d'expérience et une hypothèse.

Il est clair que ces diverses affirmations ne peuvent pas être toutes véridiques. Il est impossible que tout le monde ait raison en même temps. Chacun donnera naturellement tort à tous les autres, mais comment peut-il se faire que chacun puisse de bonne foi s'adjuger le mérite de la vérité ?

Puisque tous parlent des mêmes axiomes, leurs opinions peuvent être confrontées entre elles. N'existe-t-il en la matière aucun critère objectif auquel on puisse faire appel ?

Dire que *l'axiome est le point de départ d'une théorie* ou qu'*il est une hypothèse*, ce n'est pas simplement affirmer quelque chose des axiomes, des hypothèses et des théories; c'est, en réalité, affirmer que la façon dont ces êtres abstraits existent, car ils existent d'une certaine façon, — est en accord avec ce qu'on en affirme. On l'assure, mais d'où le sait-on ? De science immédiate, on ne le sait que fort imparfaitement. Quant au reste, c'est le fait de notre doctrine, de notre propre théorie de la connaissance.

Ainsi donc, chacune des explications qui précèdent est en même temps l'affirmation d'une conception de la connaissance, d'une théorie de l'esprit et de ses rapports avec le monde, d'une conception et d'une théorie pouvant servir de justification ou de légitimation à l'idée de l'axiome qui se trouve expliquée. C'est parce que chacun s'en réfère à sa propre doctrine et non à une doctrine commune que la bonne foi de chacun n'exclut pas la contradiction universelle.

Chacune de nos réponses se présente entourée, comme d'un halo, d'un rudiment de théorie de la connaissance, d'une théorie pour laquelle tout ce que cette réponse affirme ou présuppose se traduit en vérités préalables, en conditions à satisfaire, en exigences à remplir.

Ces remarques sont en particulier vérifiées par le groupe des trois réponses suivantes :

Dix-septième réponse. — *Un axiome est une définition. Comme tel, c'est une réalité de mon esprit dont je prends connaissance précisément de cette façon. Les réalités mentales de ce genre et la réalité perçue par les sens s'accordent par des éléments qu'elles ont en commun.*

Dix-huitième réponse. — *Tout axiome doit exprimer quelque chose qui est conditionné par notre façon même de penser, quelque chose par conséquent qui ne pourrait être pensé autrement. Comme la pensée humaine a son origine dans l'expérience et dans l'intuition, tout axiome a un contenu de vérité qui ne peut être surpassé. C'est pour cela même que l'axiome est propre à servir de fondement à une théorie.*

Dix-neuvième réponse. — *L'axiome est une proposition obtenue conformément aux lois justes de la pensée humaine et qui par conséquent ne peut être pensée autrement. L'axiome appliqué ne peut entrer en contradiction avec la pensée. Il exprime donc une vérité.*

La première de ces trois réponses fournit une transition entre l'axiome-définition, — définition qui se révèle ensuite bien choisie, — et l'axiome-nécessité, — nécessité tenant à la forme de notre intelligence. En quelques mots qui ont plutôt la valeur d'une allusion que d'une explication, cette idée est mise à sa place entre les données de la sensation et les modalités prédéterminées de la connaissance. Nous entrons dans l'orbe d'une théorie kantienne de la connaissance.

Les deux réponses suivantes font résolument le pas décisif dans cette direction. Elles sont pures de tout compromis. Qu'on remarque l'argumentation qui, dans la seconde, reconstruit le contenu de réalité, et dans la troisième le contenu de vérité de l'axiome, à partir de l'impossibilité de penser autrement.

Il y a là, indiscutablement, l'esquisse d'une explication générale de la connaissance, l'esquisse d'une théorie du savoir.

Nous clorons enfin cette liste par deux réponses qui rendent encore un son tout différent. Elles témoignent, croyons-nous, d'une vision juste de la portée de la question et d'un sens très averti des problèmes en cause. Les voici :

Vingtième réponse. — *Un axiome pose certaines propriétés de certaines choses ou certaines relations entre ces choses. Il le fait en réponse à certaines intentions qui lui sont « extérieures ».*

Vingt et unième réponse. — *C'est l'affirmation d'une relation que notre intelligence accepte, soit que notre intuition la présente comme évidente, soit que l'expérience la tienne pour possible.*

Nous voici arrivés à la dernière étape de notre enquête. Les réponses à nos deux questions ont défilé sous nos yeux, nous avons à en tirer maintenant la leçon.

10. COMMENTAIRES. Les premières impressions qui s'en dégagent sont certainement celles que nous avons déjà notées à la suite de la première série de réponses.

1) Chacune des 21 tentatives d'explication que nous avons reproduites comporte une doctrine préalable plus ou moins visible, plus ou moins complète, plus ou moins cohérente.

Comme on ne peut parler sans faire de la prose ou des vers, il semble bien qu'on ne puisse faire de géométrie sans s'être fait telle ou telle conception de la nature des êtres géométriques et de la façon dont ils participent à la fois au monde physique et à celui de notre pensée.

2) Mais si, sur ce point, les réponses sont unanimes, si toutes, sans exception, confirment l'opinion que l'on ne saurait aborder l'étude de la géométrie sans le concours de quelque doctrine préliminaire, cette unanimité fait place à la plus chaotique des dispersions pour ce qui concerne le contenu de cette doctrine préalable.

Les deux questions posées, — on le voit bien maintenant, — mènent plus loin qu'il ne semblait d'abord. Elles sont cependant relativement simples et précises. Lorsqu'on fait porter l'enquête sur des questions plus aventureuses, telles que la suivante par exemple : « Quelle est la méthode de la géométrie ? », les réponses atteignent un degré d'incompatibilité assez pénible.

3) De façon encore plus nette que pour la première série de réponses, chacun des points de vue que la seconde série nous révèle semble être le reflet de l'une ou l'autre des théories de la connaissance qui se sont succédé au cours des siècles. S'agit-il là d'une « génération spontanée » ou faut-il y voir l'effet des divers enseignements de la géométrie dont les auteurs des réponses ont bénéficié ? La seconde éventualité paraît assez probable. Il est assez piquant de penser que par la voix de nos interlocuteurs de bonne volonté ce sont peut-être des maîtres éprouvés qui ont indirectement participé à notre enquête.

11. LE CHOIX D'UNE DOCTRINE PRÉALABLE. Voilà donc trois constatations qui sautent aux yeux. La conclusion à en tirer ne peut faire l'ombre d'une hésitation. Si les doctrines préalables qui viennent de défiler sous nos yeux concordaient ou si elles se complétaient les unes les autres, leur accord ou leur convergence pourraient être interprétés comme un critère de leur commune vérité. Il ne serait pas déraisonnable d'y voir, à travers certaines nuances, le témoignage d'une évidence à laquelle toutes participeraient plus ou moins totalement. On pourrait penser que tout esprit droit ne peut manquer de se faire une juste idée de la façon dont il acquiert une juste connaissance.

Il eût été commode de pouvoir l'admettre : c'est ce que le résultat de notre enquête ne nous permet pas de faire. Par leur multiplicité, leurs contradictions mutuelles et leur égale sincérité, les doctrines préalables que nous avons pu distinguer se discréditent les unes les autres. Toutes ne peuvent être justes à la fois. Peut-être l'une d'entre elles l'est-elle plus que toutes les autres. Mais la preuve est faite que sa justesse ne s'impose pas d'elle-même. Ferons-nous une exception pour le point de vue du maître par lequel nous avons débuté ? Si nous l'avons mis en évidence, n'est-ce pas que nous lui avons reconnu des mérites particuliers, que nous lui attribuons la préférence ?

Pour l'instant, le résultat de notre enquête met la voix du maître au même rang que toutes les voix qui se sont fait entendre, et qui d'ailleurs ne sont peut-être que les échos plus ou moins fidèles des enseignements d'autres maîtres. Ce

n'est qu'une voix individuelle au sein d'un concert discordant. Nous venons de faire l'expérience que la vérité qu'elle apporte n'est peut-être pas reconnaissable objectivement au point où nous en sommes.

En résumé, l'expérience à laquelle nous avons procédé nous met en présence de constatations qui nous prennent « entre deux feux ». La première, c'est que l'on ne peut aborder l'exposé de la géométrie, et surtout de la géométrie élémentaire, sans une doctrine préalable. La seconde, c'est qu'au moment précis où cette doctrine doit entrer en jeu, nous manquons des moyens de reconnaître si elle est juste ou fausse. Comment sortir de cette pénible situation ?

12. Le principe d'indifférence. La première solution qui vient à l'esprit est une solution de facilité. « Pourquoi, dira-t-on, se créer des soucis factices et inventer des difficultés inutiles ? Il faut, dites-vous, faire choix d'une doctrine préalable. Soit ! Mais ce choix n'a aucune importance. L'enquête n'a-t-elle pas démontré que la doctrine peut varier entre de larges limites sans que les conséquences en soient appréciables ? Si les réponses sont en désaccord sur la doctrine préalable, les auteurs des réponses ne sont-ils pas d'accord en ce qui concerne le raisonnement géométrique ? Que l'on choisisse la doctrine comme on veut ou comme on peut; qu'importe, pourvu que la géométrie soit ce qu'elle doit être. »

C'est une solution que nous n'adopterons pas. Le juste et le faux s'y entremêlent de façon déconcertante. Elle est comparable à une voie large et facile qui s'offrirait à nous au moment même où tous les autres chemins nous paraîtraient hérissés d'obstacles et d'embûches. Pour l'étude que nous entreprenons, c'est cependant une voie fausse, et voici pourquoi.

La solution de facilité, — précisons-le bien, — se fonde sur l'argumentation suivante : puisqu'il semble plus difficile de se passer d'une doctrine préalable que d'en imaginer une, pourquoi ne pas se soumettre tout simplement à l'obligation d'en choisir une; puisqu'il semble assez indifférent que cette doctrine soit plus ou moins juste ou plus ou moins fausse, pourquoi s'attarder à rechercher les critères de sa justesse ou de sa fausseté; et puisque la vérité des énoncés géométriques et la correction des démonstrations semblent s'accommoder d'une large indétermination de la doctrine préalable, pourquoi ne pas envisager le choix de cette dernière comme une simple affaire de convenance ou de goût individuel, à la condition qu'elle reste appropriée à ses fins purement géométriques ?

Cette façon de considérer et de présenter les choses correspond à une perspective extrêmement étroite; elle fait de la formulation et de la déduction des énoncés géométriques un but en soi; elle pose en fait l'existence d'une géométrie pure complètement autonome; elle juge que l'enseignement de la géométrie n'a pas d'autre mission que d'assurer l'édification de cette géométrie

vraie par elle-même, cette fin justifiant d'ailleurs les moyens adoptés. Au fond, cette façon de voir présuppose, elle aussi, une doctrine préliminaire, une doctrine qui laisse dans l'imprécision certaines des *vérités élémentaires* sur lesquelles nous insistions jusqu'ici, mais qui comporte en revanche un certain nombre d'affirmations d'une redoutable précision sur la géométrie elle-même. En voici quelques-unes :

1° La vérité de la géométrie se conçoit indépendamment du chemin par lequel on y accède.

2° Une fois la géométrie élémentaire fondée, une doctrine élémentaire inexacte ne fait jamais obstacle aux développements ultérieurs de la géométrie.

3° Une doctrine préalable incorrecte ne peut compromettre la juste application de la géométrie dans le monde des phénomènes.

4° Une doctrine préalable erronée ne conduit jamais à une fausse appréciation de la vérité et de l'objectivité dans les sciences.

5° Il est certain que la solution de facilité en géométrie ne prépare pas une fausse conception de la *méthode des sciences exactes*.

6° On peut être sûr que cette solution de facilité ne représente pas un premier pas vers une théorie de la connaissance erronée.

Accepter la solution d'indétermination, c'est souscrire à chacun des six points qui précèdent, c'est les tenir pour acquis sans les avoir sérieusement examinés et sans les avoir pesés. En avons-nous le droit ? D'où pourrions-nous tenir la légitimité d'une telle décision ?

13. Le procès de la solution de facilité. Ces six points ne se placent d'ailleurs pas tous au même niveau de notre savoir. Ils correspondent, au contraire, à des points de vue de plus en plus élevés d'où la géométrie et sa signification se trouvent successivement déterminées. Le premier de ces points de vue n'embrasse que l'horizon fort limité de la géométrie élémentaire; le second ne porte pas plus loin que l'horizon strictement géométrique, mais il prend en considération les développements dont la géométrie élémentaire s'est révélée susceptible (les géométries non-euclidiennes, par exemple). Le troisième cherche à embrasser l'expérience géométrique dans son intégrité et non seulement dans son aspect spécialement rationnel ou déductif; le quatrième élargit son horizon à l'ensemble des sciences exactes pour y situer l'expérience géométrique à sa juste place. Le cinquième s'élève jusqu'à la question de la méthode de la science et le sixième jusqu'au problème philosophique de la connaissance en général. Ces six points de vue peuvent être comparés à six instances devant lesquelles la solution de facilité devrait être successivement portée, pour être jugée au nom d'exigences de plus en plus larges. Chacune de ces instances représente un barrage en arrière de la précédente et en avant de la suivante.

Pour être légitime, c'est donc ces six barrages — entre autres — que la solution de facilité devrait franchir victorieusement. Ce sont six jugements successifs qui devraient être affirmatifs. Or, sur les six points que nous avons énoncés tout à l'heure, c'est six jugements négatifs qui doivent être rendus, si l'on ne refuse pas de tenir compte de l'ensemble des informations que la science met aujourd'hui à notre disposition.

Portons, avec le premier de nos six points, la question devant la première instance. Est-il juste d'admettre que la seule chose qui compte, en géométrie élémentaire, est d'acquérir une sûre connaissance des énoncés vrais et des moyens propres à les démontrer ? De penser qu'une fois cette connaissance acquise, le chemin qu'on a pris pour y parvenir n'a plus aucune importance ?

S'il en était ainsi, cela signifierait certainement que la vérité des énoncés géométriques, une fois qu'on l'a conçue, se suffit à elle-même, qu'elle prend en quelque sorte son fondement dans sa propre perfection ! Cela signifierait sans doute aussi que, lorsque la vérité géométrique a trouvé son assise, — les moyens par lesquels elle peut être suggérée pouvant être désormais négligés, — elle est établie pour toujours, qu'elle va se trouver hors de discussion, hors de l'atteinte du doute qui pourrait uniquement s'attacher aux moyens par lesquels elle a été suggérée.

C'est ainsi que les choses devraient être pour que le jugement de première instance puisse être positif. Or il est facile de produire un témoignage, pris dans l'histoire des mathématiques, qui démontre exactement le contraire. Car, encore une fois, si les choses étaient comme nous venons de le dire, comment expliquerait-on que GAUSS, celui qu'on nomma *princeps mathematicorum*, ait pu suspecter la vérité de l'énoncé élémentaire que voici :

La somme des angles d'un triangle vaut deux droits,

et qu'il ait voulu en éprouver la justesse par des mesures géodésiques à grande échelle ?

Ce témoignage, que les lettres de GAUSS ne permettent pas de mettre en doute, suffit : la cause est perdue dès la première instance.

Il n'est cependant pas indifférent de voir comment les choses se présentent en seconde instance.

Est-il vrai que, la géométrie élémentaire une fois fondée, une doctrine préalable inexacte ne puisse faire obstacle aux progrès ultérieurs de la géométrie ?

Le procès sera très court. Il nous suffira de produire encore une fois un témoignage irrécusable et contraire. Prenons par exemple comme doctrine préalable celle qui inspire la première des réponses de la seconde série :

L'axiome est une vérité évidente par elle-même.

Pour préciser les idées, disons, par exemple, que cette doctrine est celle qui

fut mise au point par l'école platonicienne et qui servit de théorie de la connaissance préalable aux *Éléments* d'EUCLIDE.

Il ne peut être mis en doute que cette doctrine préalable soit capable d'ouvrir la voie à l'édification de la géométrie élémentaire, puisque c'est là un indiscutable fait historique.

Si, conformément à cette théorie de la connaissance, le postulat suivant :

« Par un point P extérieur à la droite d, il ne passe qu'une parallèle à cette droite », est une vérité évidente par elle-même, donc une vérité absolue, il ne peut faire de doute que ce postulat est incompatible avec le postulat suivant (de LOBATSCHEFSKI) :

« Par un point P extérieur à la droite d, il passe exactement deux parallèles à cette droite. »

Si le premier de ces postulats est vrai, le second est donc faux.

Notre doctrine préalable s'oppose ainsi à ce que le second de ces postulats soit accepté en concurrence avec le premier comme un énoncé juste. Elle doit au contraire repousser comme absurde l'idée de procéder de la sorte. Elle ferme la voie à la compréhension d'une pareille solution.

De cette doctrine préalable, il n'existe donc aucune possibilité de s'élever jusqu'au point de vue où la géométrie d'EUCLIDE, — qui admet le premier de nos deux postulats, — et la géométrie hyperbolique, — qui admet le second, — apparaissent comme également justes. Cette théorie de la connaissance permet donc la géométrie élémentaire, mais elle refuse un progrès essentiel de la connaissance géométrique.

La preuve est ainsi administrée : la solution de facilité a perdu son procès en deuxième instance.

La situation se présente-t-elle plus favorablement en troisième instance ?

Est-il vrai qu'une doctrine préalable qui permet la géométrie élémentaire ne puisse faire obstacle à une juste application de la géométrie dans le monde physique ?

Nous n'aurons pas à changer la forme de notre argumentation : il nous suffira encore une fois de produire un témoignage démontrant le contraire.

Envisageons, par exemple, la doctrine préalable qui suggère l'idée de l'axiome à laquelle se rapporte la troisième réponse de la seconde série :

Un axiome est une vérité absolue qui se vérifie dans l'expérience.

Cette doctrine préalable est tout simplement celle qui informait la géométrie élémentaire il y a un siècle, et qui continue à l'informer dans la plupart des traités élémentaires encore en vigueur. Elle présuppose, elle pose en fait : un corps matériel doit avoir la même structure spatiale que la portion d'espace physique qu'il occupe et que l'espace géométrique rationnel construit par l'esprit. Dans cette doctrine se reflète le rationalisme cartésien et le mathématisme intégral des débuts de la connaissance scientifique. Cette façon de voir

suppose donc la continuité de la matière en même temps que celle de l'espace qui la contient. Il vaut la peine de remarquer que la théorie de la connaissance correspondante légifère par avance sur une question qui est du ressort de la physique, qu'elle légifère d'ailleurs de façon bien sommaire et bien précaire, puisque la physique actuelle (atomisme et quanta) lui inflige le plus net des démentis.

En un mot, la doctrine préalable que nous avons citée comme témoin permet la géométrie élémentaire, puisqu'elle en a historiquement orienté et qu'elle continue à en orienter assez généralement les premières démarches, mais elle rend illégitime l'application telle quelle de la géométrie à la réalité que la physique nous révèle aujourd'hui.

La solution d'indétermination se trouve ainsi condamnée en troisième instance.

Il serait facile de traiter de la même façon, dans le même esprit, les trois derniers de nos six points. Il nous faudrait toutefois anticiper sur des réflexions et sur des développements qui ne doivent trouver que plus tard leur juste place. Nous allons donc interrompre ici notre procès. Mais les instances que nous voulons renoncer à faire intervenir maintenant ne seront que suspendues. Les questions dont elles ont à juger sont trop importantes pour que nous puissions renoncer à les voir équitablement traitées. Ces questions seront donc citées à leur heure, non pas seulement pour les rapports qu'elles peuvent avoir avec la solution de facilité, mais pour leur propre importance. Dans toute l'étude que nous entreprenons, ce sont des questions dominantes.

Quant à la solution de facilité, elle est jugée.

14. LE RECOURS A UNE DISCIPLINE ANTÉRIEURE.

La première solution qui se présente à l'esprit, — avions-nous dit, — est la solution d'indétermination, la solution qui consiste à choisir une doctrine préliminaire quelconque, et à l'adopter non pas pour sa convenance, mais pour quelque raison d'immédiate commodité. Cette solution est donc à rejeter, et nous voici ramenés à l'obligation de choisir en connaissance de cause. Mais puisque aucune des doctrines en présence ne se recommande par une vérité qui lui soit inhérente ou par une évidence qui lui soit propre, quel sera le principe qui pourra guider et déterminer notre choix ? Une seconde idée se présente alors à l'esprit : celle du recours à une discipline antérieure.

« Vous avez fait observer, dira-t-on, qu'une doctrine préalable est toujours une esquisse, un rudiment de théorie de la connaissance. Vous avez souligné qu'elle vient proposer ses propres vues sur la façon dont la connaissance de l'étendue spatiale se fait en nous, qu'elle avance ses propres explications quant à l'accord de l'abstrait et du concret, etc. N'y a-t-il pas là quelque chose d'étonnamment arbitraire ? Que dirait-on d'un physicien qui viendrait proposer de sa propre autorité, au nom de sa seule fantaisie, les lois auxquelles les réalités physiques auraient à se soumettre ? Ce physicien perd la raison, penserions-nous. Est-il plus raisonnable de vouloir prescrire arbitrairement les lois de la réalité mentale ? Si nous avons à faire intervenir la connaissance de ces lois dans le cours de notre réflexion, ne faut-il pas *commencer* par les découvrir ?

» En d'autres termes, n'y a-t-il pas, en avant du problème de la doctrine préalable, un problème plus général à résoudre, celui de la juste théorie de la connaissance ? Supposez un instant que cette dernière ait été constituée en discipline préliminaire, — et non plus en doctrine préalable, — n'est-ce pas dans cette discipline que nous aurons nécessairement à trouver les raisons de notre choix ?

» En un mot, pour savoir comment choisir la doctrine préalable dont nous avons besoin tout au début de la géométrie, ne faut-il pas et ne suffit-il pas que la théorie de la connaissance soit d'abord valablement édifiée ? »

Nous allons consacrer quelques réflexions à cette seconde idée.

Elle est à première vue extrêmement séduisante. Les arguments pour la défendre viennent à l'esprit d'eux-mêmes. Ne semble-t-elle pas offrir la possibilité — la seule possibilité — de mettre fin aux discussions préparatoires; ne faut-il pas commencer une fois, et pour commencer, ne faut-il pas que le point de départ soit mis hors de contestation ? Peut-être la proposition de réduire le singulier problème qui nous tient arrêtés à un problème antérieur, — à l'édification d'une discipline qui devrait précéder la géométrie et peut-être aussi les autres branches du savoir extérieur, — n'est-elle pas facile à réaliser, mais au moins le point de départ qui nous fait défaut se trouve-t-il ainsi désigné. Le nœud des doutes et des réserves qui empêchent la pensée géométrique de prendre son essor serait tranché par une proposition claire et précise. Cette seconde idée du recours à une instance extérieure, — ne s'impose-t-elle pas, dès qu'on l'a formulée ?

Il y a tout d'abord un point que l'on ne peut songer à contester : si l'esprit humain était en principe capable d'édifier une discipline formant en quelque sorte la source commune de toutes les disciplines scientifiques, — une discipline dont la méthode et les critères puissent être dits antérieurs à ceux des disciplines spécialisées, — c'est naturellement à cette discipline que reviendrait la charge d'éclaircir les difficultés qu'en cet instant nous cherchons à surmonter. Si la théorie de la connaissance pouvait être mise sur pied une fois pour toutes, indépendamment des progrès de la connaissance, nous n'aurions plus à hésiter : nous ferions de la seconde idée l'idée directrice de notre entreprise.

Mais cette idée qui pose en fait l'existence d'une science préliminaire où viendraient se fonder en commun toutes les branches du savoir objectif, n'est-elle pas illusoire ? Lorsque nous pensons à une théorie de la connaissance

autonome et préparant en toute autorité les voies de la connaissance, notre pensée reste-t-elle dans les limites du réalisable, du possible ? Sommes-nous bien sûrs que notre pensée ne s'est pas aventurée jusqu'au pays des songes ?

Arrêtons-nous un instant à cette dernière question; il nous faut en apercevoir toute l'importance. La réponse que nous lui donnerons décidera de toute l'orientation de notre étude. Il faut que nous saisissions qu'à cet endroit et à ce propos, il y a entre un oui et un non la distance qui sépare deux philosophies antagonistes.

15. L'INTENTION MÉTAPHYSIQUE ET L'INTENTION DIALECTIQUE. Pour le faire saisir, nous allons mettre en présence deux intentions profondes et contraires qui se retrouvent dans toutes les activités organisatrices de l'esprit humain. La première est *l'intention métaphysique*[1]. Elle tend vers ce qui est valable en soi, par soi-même, définitivement et généralement. Elle se fait un programme de pénétrer jusqu'aux vérités acquises une fois pour toutes, de remonter jusqu'aux principes inébranlables, d'ancrer la connaissance dans une certitude totale. Un savoir, qui répondrait complètement à l'intention métaphysique, serait fondé indépendamment de ce qui resterait encore inconnu. Même incomplet et susceptible d'être augmenté, même ouvert en ce sens vers un certain devenir, il serait mis à jamais pour sa partie déjà constituée hors des atteintes, à l'abri des surprises de l'expérience. Ce serait un savoir prédicatif[2]. L'intention métaphysique, c'est donc, en bref, l'intention de l'absolu dans le vrai, dans le général, dans le réel.

D'une discipline qui nie par avance que l'expérience puisse l'amener à mettre en doute ses premières vérités et ses positions fondamentales, qui exclut par doctrine que son propre progrès puisse lui faire dépasser ses premiers principes, — nous dirons aussi qu'elle se réclame d'une méthodologie d'inspiration métaphysique, d'une méthodologie prédicative.

Quel rapport existe-t-il entre l'intention métaphysique ainsi définie et la question que nous discutons ? Le suivant : en affirmant qu'il doit exister une

[1] Nous reconnaissons d'ailleurs que l'idée de métaphysique peut elle-même être dialectisée; la métaphysique se présente alors comme une théorie primaire, sommaire, de l'être, du nécessaire, du possible, etc. Dans cette fonction, elle est non seulement acceptable, elle est indispensable. Le savant ne peut établir une théorie, sans être en ce sens quelque peu métaphysicien.

[2] POINCARÉ a introduit ce terme dans la méthodologie scientifique, afin de distinguer deux espèces de classifications: « Les classification *prédicatives*, qui ne peuvent être bouleversées par l'introduction de nouveaux éléments; les classifications *non prédicatives* que l'introduction des éléments nouveaux oblige à remanier sans cesse. » (*Dernières Pensées*, Paris, Flammarion, 1913, p. 105). Nous étendons ici l'usage de ce terme à la constitution du savoir en général. Une discipline sera prédicative si son acquis peut être augmenté sans que jamais il soit nécessaire d'en réviser la partie déjà constituée et en particulier les fondements. En temps habituels, une discipline est pratiquement toujours prédicative; elle ne l'est plus en temps de crise. Une discipline qui se veut prédicative par méthode est d'inspiration métaphysique.

discipline antérieure d'où la doctrine préalable de la géométrie tire sa force et sa légitimité, nous prenons rang parmi les métaphysiciens. Que nous le sachions ou que nous l'ignorions, que nous le voulions ou que nous nous en défendions, que nous nous en glorifions ou que nous nous en excusions, nous passons au nombre de ceux qui acceptent l'intention métaphysique comme intention directrice et dominante.

L'idée de *la réduction à une discipline antérieure* ne prend son véritable sens que par l'espoir d'aboutir à une discipline première dont la méthodologie soit prédicative : elle est nettement d'inspiration métaphysique.

La seconde des intentions fondamentales dont nous parlons est *l'intention dialectique*. Contrairement à l'intention métaphysique, elle ne cherche pas à envisager la connaissance sous l'angle définitif de l'absolu. Elle cherche plutôt à édifier, à partir de notre information, à propos du donné ou de l'acquis, et certainement dans le but de se mieux saisir du réel, — elle cherche à édifier un système de concepts, un jeu d'idées à la fois adéquat, cohérent et efficace : une dialectique. En qualifiant une dialectique d'adéquate, nous voulons dire qu'elle s'inspire de l'information dont nous disposons et qu'elle en rend compte sans préjuger de ce qui pourrait advenir si notre information allait par la suite en s'accroissant et en s'approfondissant. La qualifier de cohérente, c'est dire que le jeu des idées obéit strictement à un système de règle internes. Enfin, une dialectique est efficace lorsqu'elle répond aux fins qui lui sont assignées sans préjuger de ce qui adviendrait si par la suite ces fins se trouvaient un jour précisées ou modifiées.

L'idéal métaphysique est un idéal de perfection absolue; l'intention dialectique est une intention de perfection relative, provisoire et révisable. Celui qui jugerait que l'idéal métaphysique ne saurait être atteint, l'intention métaphysique ne pouvant trouver son accomplissement, celui que l'expérience amènerait à penser que l'esprit humain ne dispose pas des moyens, des critères lui permettant de juger sans erreurs possibles des cas où la connaissance rencontrerait le définitif, celui qu'un rôle purement passif ne pourrait satisfaire, celui-là viendrait prendre place parmi les dialecticiens.

Bien entendu, nous n'avons que très sommairement indiqué le sens du mot métaphysique, et celui du mot dialectique vient à peine d'être esquissé. Le premier ne représente guère plus qu'un espoir, et le second guère plus qu'une promesse. Il n'est pas utile d'indiquer dès ici toutes les étapes du chemin par lequel l'un et l'autre pourraient être précisés.

Mais ce qu'il importe de voir clairement, c'est que nous avons, quant à la question qui nous occupe, à adopter l'une ou l'autre de ces deux attitudes. Il faut que nous sachions bien que nous sommes à la croisée de deux chemins qui divergent. Encore une fois nous voici devant l'obligation de choisir : oui ou non, notre choix va-t-il se porter sur la doctrine d'inspiration métaphysique, sur

l'idée de *la solution par réduction à une réalité ou à une vérité antérieure* ?

Nous aurons à choisir; mais nous ne nous laisserons pas pousser prématurément à une décision mal mûrie. À qui se fatiguerait de cette longue discussion et nous presserait d'en finir, nous serions en droit de répondre : « Seriez-vous satisfait que la décision fût jouée à pile ou face ? Nous ne le pensons pas. Estimez-vous d'autre part que la question touche quelque article de foi ? Nous ne voulons pas le croire. Dès lors veuillez accepter que nous demandions à être éclairés, que nous demandions à être informés sur les raisons et sur les conséquences de notre choix. »

Sans nous laisser distraire de notre dessein, nous allons donc porter notre enquête sur le point crucial de la discussion, sur l'idée même d'une doctrine de la connaissance qui précéderait en toute légitimité l'édification de la géométrie.

16. LE PROCÈS DU RECOURS À UNE DISCIPLINE ANTÉRIEURE.

Une remarque s'impose immédiatement : c'est que nous ne nous trouvons pas devant une idée vierge, dont la réalisation n'aurait pas encore été tentée. L'histoire de la pensée humaine est jalonnée d'essais successifs : autant de systèmes philosophiques, autant de doctrines de la connaissance. PLATON, ARISTOTE, DESCARTES, LAMBERT, KANT... chacun de ces noms, pour ne citer que les plus célèbres, a donné naissance à un adjectif caractérisant l'idée dominante d'une théorie de la connaissance : *les idées platoniciennes, les essences aristotéliciennes, l'évidence cartésienne, l'apparence lambertienne, l'intuition kantienne...*

Nous avions déjà fait la remarque que c'est précisément à l'aide de ce vocabulaire philosophique qu'il était le plus facile, le plus naturel même, de décrire et de commenter les réponses faites à notre enquête. À travers ces réponses, les solutions traditionnelles de la connaissance sont ainsi déjà intervenues dans notre débat. De façon incomplète, il est vrai, de façon parfois incorrecte, mais de façon reconnaissable tout de même.

Rien ne nous empêche d'imaginer que notre enquête ait été faite auprès des philosophes eux-mêmes. Que nous leur ayons posé la question : qu'est-ce qu'une théorie de la connaissance ? Et que chacun d'eux nous ait répondu en nous proposant les principes essentiels de sa propre conception. Voici donc toutes ces propositions étendues sous nos yeux. Y en a-t-il une que nous ayons des raisons indubitables de préférer ? Y en a-t-il une qui d'emblée s'impose par son évidence ?

Dans la confrontation des résultats de cette enquête philosophique, il est superflu de chercher une autre argumentation que celle qui nous a servi dans la confrontation des réponses à nos deux questions. Si l'une des doctrines en présence est évidente, comment expliquer qu'elle ne soit pas unanimement adoptée par les savants et les philosophes de notre temps ? Comment se fait-il

que cette évidence puisse être à tel point méconnue qu'on trouve aujourd'hui des défenseurs passionnés de presque chacun des grands systèmes en question ?

« C'est peut-être, dira-t-on, que chacun de ces systèmes ne présente qu'un côté, qu'un aspect de la vérité totale et que par conséquent chacun d'eux a son évidence, sa part de l'évidence entière. »

Cet argument pourrait être accueilli si les théories en présence étaient compatibles entre elles. Par malheur, comme les réponses à notre enquête, elles sont dans l'ensemble inconciliables. Sur les points essentiels elles se contredisent et s'excluent l'une l'autre. L'alternative suivante s'impose donc :

Il faut conclure ou bien à une incapacité humaine de distinguer les évidences en question, ou à l'absence de celles-ci. Et si l'on y réfléchit bien, la première de ces éventualités ne signifie pas autre chose que la seconde. Voici donc la conclusion qu'on ne peut écarter : aucune des théories en présence ne s'impose par sa propre évidence.

Chose assez étrange, la situation dans laquelle nous nous retrouvons en ce moment rappelle trait pour trait celle dont nous avons cherché à sortir. Ce qui faisait l'essentiel de la difficulté, une fois l'enquête terminée, et alors que nous nous trouvions devant l'obligation d'opter pour une doctrine préalable, c'est que nous restions sans principe et sans critère pour orienter notre choix. Par leur incompatibilité mutuelle, les doctrines entre lesquelles il nous fallait choisir avaient toutes ensemble perdu leur caractère d'évidence. C'est alors que nous avons été amenés à examiner les différentes lignes de conduite qui nous sont encore ouvertes.

Ce qui fait à nouveau l'essentiel de la difficulté, c'est que devant l'obligation d'opter pour une théorie de la connaissance, nous restons à nouveau sans principes et sans critères pour y fonder notre décision. Par leur incompatibilité générale, les propositions entre lesquelles nous aurions à choisir se sont mutuellement dépouillées de tout caractère d'évidence. La difficulté reste entière : le recours à une instance antérieure ne l'a pas modifiée, ne l'a pas entamée.

Le succès de notre seconde initiative se trouve déjà gravement compromis. Mais peut-être trouvera-t-on que l'argumentation n'a pas été poussée à fond. « Ne serait-il pas possible, dira-t-on, que le choix d'une théorie de la connaissance dépendît de raisons siégeant dans une instance encore une fois antérieure ? »

Mais nous ne pouvons ni ne voulons nous laisser entraîner dans cette direction. S'il pouvait exister une discipline de ce genre, c'est elle qui serait la vraie théorie de la connaissance, et c'est d'elle et non de quelques succédanés que nous aurions parlé tout à l'heure.

Non ! Cette dernière suggestion n'est pas à prendre au sérieux. Elle n'ouvre pas de nouvelle voie. Elle ne représente que la poursuite verbale d'une idée dont le sens est déjà épuisé. Notre second essai ne saurait aboutir. Il est inutile

d'en prolonger la discussion. Dès maintenant, nous pouvons mesurer l'aide que nous en avions attendue; nous pouvons juger de la probabilité de sa vérité. Celle-ci est extraordinairement faible. Du moment où nous avons accueilli l'intention métaphysique pour nous y conformer, nous n'avons pas avancé d'un pas. Si l'on y réfléchit un peu, la chose n'a d'ailleurs rien d'étonnant. Dans le cas mineur du choix d'une doctrine préalable de la géométrie seulement, comme dans le cas majeur du choix d'une théorie générale de la connaissance, c'est la possibilité d'un choix définitivement, *métaphysiquement* assuré qui nous échappe. Dans les deux cas, ce sont les conditions réelles, les conditions que nos enquêtes ont révélées et que nous ne sommes pas libres d'ignorer, qui s'opposent à la réalisation de l'intention métaphysique. Ainsi notre discussion n'aura pas été complètement vaine; elle aura du moins mis clairement ce point en lumière.

Voici donc la conclusion de cette étape de notre discussion : en cédant à l'intention métaphysique, nous nous écartons des conditions du savoir réel. Rien ne nous autorise à penser qu'une discipline objective puisse jamais être fondée sur une doctrine préalable et première, au sens métaphysique de ces mots.

Cette constatation est peut-être difficile à accepter. Elle contredit une tendance presque invincible de notre esprit. Mais est-il possible de répudier le témoignage des faits qui nous l'imposent ?

Notre seconde idée, celle de suivre une inspiration métaphysique, — remarquons que la première s'inspirait d'un pragmatisme assez bas, — est donc à rejeter.

17. L'ESSAI DIALECTIQUE. Enrichis de quelques expériences négatives, nous voici ramenés à notre problème. Il est resté entier : choisir — puisqu'il le faut — une doctrine préalable informant la construction systématique de la géométrie. Non seulement ce problème préliminaire n'a pas encore trouvé de solution, mais nos essais ont eu pour conséquence de faire surgir derrière ce problème mineur un problème majeur de même nature : celui de l'édification d'une théorie de la connaissance. Ni pour l'un ni pour l'autre, nous n'avons encore découvert les moyens adéquats et légitimes de les traiter. La seconde suggestion qui vient d'être examinée n'est ainsi pas moins décevante que la première. Elle se révèle aussi peu susceptible que notre première idée de nous mettre en possession des éléments d'une solution satisfaisante. Nous ne pouvons en rester là. Il nous faut imaginer autre chose. Il doit exister une troisième éventualité; l'existence même de la géométrie en est garante. L'intention métaphysique n'a pu nous mettre en main le fil d'Ariane, l'intention dialectique y réussira-t-elle peut-être ? Nous allons introduire l'idée correspondante, la troisième que nous essayions, par l'intermédiaire d'une « fable pédagogique ».

18. LA FABLE DE LA MAISON RÊVÉE. Un maître ayant réuni ses ouvriers leur ordonna : « Faites-moi sans tarder la maison à laquelle je songe toujours. » Il les renvoya sans en dire davantage.

Les ouvriers se consultèrent et lui déléguèrent l'un des leurs. « Il nous faut, expliqua ce dernier, un plan de la maison que tu désires. Sans ce plan, et si personne ne nous indique de quels matériaux nous servir et comment les disposer, nous ne pourrons ni entreprendre, ni poursuivre, ni achever le travail que tu exiges. »

Le maître en convint. Il alla donc trouver un architecte. « Je veux, lui dit-il, faire construire la maison de mes rêves. Mais sans un plan bien dressé, mes ouvriers ne savent mettre pierre sur pierre. Veuillez l'établir sans délai. » Ayant ainsi parlé, il s'en alla sans rien ajouter.

L'architecte lui fit un plan quelconque. Pouvait-il faire autre chose ?

* * *

Le maître revint s'enquérir de son plan. On le lui présenta, mais il en fut déçu. « Quelqu'un de très ordinaire, dit-il, pourrait peut-être s'en accommoder. Mais ce n'est pas le plan de la maison de mes rêves. » Il s'en alla.

L'architecte pensa : « Il lui faut une demeure métaphysique. » Avec mille peines. il dressa un plan dont l'ensemble et tous les détails étaient gouvernés par des règles absolues, telles que la règle d'or.

Le maître fut appelé. « C'est le tombeau d'un rêve mort, dit-il, je doute que quelqu'un veuille jamais y abriter le rêve de sa vie. »

* * *

L'architecte fut troublé. « Comment aurais-je pu, se défendit-il, imaginer un plan répondant à ton rêve, si tu négliges de me l'expliquer. Et d'ailleurs, ton rêve est-il réalisable ? »

« Calme-toi, reprit le maître que l'expérience avait rendu sage, je ne refuse pas de t'exposer mes désirs. Je n'exige même pas que tu réussisses à coup sûr. »

Ils convinrent donc d'une méthode qui permît de confronter le rêve et le réel. Ensemble, ils examinèrent les matériaux disponibles, ensemble, ils imaginèrent les moyens de les rassembler. Après bien des essais, le maître déclara : « Ce dernier plan me suffit. Je ne puis en attendre indéfiniment un meilleur. »

* * *

L'architecte dirigea sans hésiter les travaux. Il savait maintenant par avance quels étaient les matériaux idoines à leur emploi, quelles étaient les façons idoines de les assembler. Il savait quels étaient les moyens et les buts de son activité.

Mais comment les aurait-il connus au préalable ?

Moralité. — Une doctrine préalable ne se justifie pas d'elle-même au préalable. Elle se révèle idoine par ses incidences et par ses conséquences.

19. LE PRINCIPE D'IDONÉITÉ. La morale de notre fable formule précisément la nouvelle idée dont nous avons besoin, celle qui dénoue tout naturellement les difficultés dans lesquelles nous étions retenus. On remarquera que le tournant décisif, le passage à une nouvelle perspective, à une nouvelle façon de penser est marqué par l'intervention du mot « idoine ». Le sens qu'il doit prendre ressort clairement du contexte : il signifie *qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction*, etc.

Nous pouvons maintenant introduire le principe d'après lequel la préférence peut être accordée à telle ou telle doctrine préalable : c'est le principe de la meilleure convenance, que nous appellerons aussi le principe d'idonéité. C'est naturellement un principe de simple bon sens car, si l'on ne peut réaliser une perfection en quelque sorte automatique, il reste la faculté de répondre *au mieux*, compte tenu de toutes les exigences et de toute l'information du moment. Il se trouve d'ailleurs, quant aux questions analogues à celle que nous traitons, que le chemin à suivre n'est guère douteux, que les décisions à prendre ne sont guère problématiques, *si l'on ne veut pas faire moins bien qu'il n'est possible*.

La troisième suggestion est donc celle de la réponse aux exigences *sine qua non* du *parfait provisoire*, tandis que la première était celle du *pis aller* et la seconde celle du *parfait indiscernable*. Elles sont essentiellement différentes, divergentes. Chacune d'elles s'écarte résolument des deux autres.

Revenons maintenant à la doctrine préalable en géométrie.

C'est en se réclamant du principe d'idonéité que le maître peut se sentir le droit de proposer avec autorité sa propre doctrine, parce qu'il l'a déjà éprouvée. Ce n'est pas la première fois qu'il fait le chemin qui va des vues préliminaires aux conceptions finales. Il réunit, s'il est lui-même idoine à sa fonction, le savoir et l'expérience, les éléments d'information et les facultés de jugement qui font de sa décision, — de sa décision d'adopter telle doctrine préalable plutôt que telle autre, — une décision légitime.

D'ailleurs, le maître se trouve-t-il seul devant la responsabilité de choisir ? Ne peut-il invoquer que son expérience personnelle ? Revêt-il individuellement l'autorité qu'il doit assumer ?

Le croire, ce serait oublier que la géométrie est une discipline qui a subi deux millénaires d'épreuve. Des milliers d'esprits ont coopéré à l'expérimentation multiple dont nous bénéficions aujourd'hui. La décision du maître s'insère dans le cadre d'une activité collective éprouvée; elle reste sous le contrôle d'une

conscience collective affermie par des siècles d'efforts efficaces. Son autorité lui vient de son rapport à la fois libre et responsable avec l'objectivité de la démarche scientifique.

L'abandon de l'intention métaphysique pour adopter le principe d'idonéité représente certainement pour chacun un événement intellectuel considérable; il exige, — nous l'avons déjà dit, — qu'on résiste à un certain penchant naturel de notre esprit : aussi suscite-t-il certaines objections.

20. QUELQUES OBJECTIONS. En voici plusieurs. Nous n'y répondrons que très sommairement, — trop sommairement, trouvera-t-on peut-être. Nous nous contenterons, ici et là, d'une esquisse de réponse, d'une indication plus ou moins provisoire. Nous devrons nous en contenter, à cet endroit, car nous manquons encore des moyens, et nous avons encore à faire les expériences qui donneront leur poids à ces réponses. Toute l'étude que nous entreprenons et tous les développements qui vont suivre les informent d'avance; elles y trouveront leur justification, leur confirmation.

S'attarder dès ici à désarmer toutes les objections reviendrait donc à vouloir prouver le mouvement avant de s'être hasardé à faire un seul pas. Mais le mouvement se prouve aussi par le fait accompli, et l'inanité des objections par leur inefficacité.

1° L'adoption du principe d'idonéité n'entraîne-t-elle pas le retour au principe d'autorité ? Ne vient-on pas de dire que le maître propose sa doctrine préalable avec autorité ?

L'autorité, — une certaine autorité, — peut-elle être absente des relations de celui qui enseigne à ceux qui l'écoutent ? L'autorité est détestable lorsqu'elle se trouve du côté de l'inexpérience, de l'ignorance, de la mauvaise foi. Elle est illégitime lorsqu'elle est usurpée ou lorsqu'elle se croit infaillible. Et rien n'est plus illégitime que l'autorité d'un faux principe.

Mais l'expérience scientifique ne saurait être conçue sans l'autorité provisoire et révisable de celui qui est, à un certain moment, au bénéfice de la meilleure idée ou de la meilleure information.

2° Une doctrine préalable, adoptée sous les auspices du principe de la meilleure convenance, ne saurait jamais atteindre la sécurité d'une vérité absolue. Ne pourrait-il arriver qu'une information plus étendue développât de nouvelles exigences auxquelles elle ne sût plus répondre ? Une éventualité de ce genre ne devrait-elle pas être interprétée comme une faiblesse sans remède de la troisième solution ?

Non seulement ce cas doit être envisagé en principe. Non seulement il faut se déclarer prêt à réviser la doctrine préalable si les conditions dans lesquelles elle est idoine viennent à changer. Cette éventualité n'est pas seulement à prévoir; elle s'est déjà maintes fois réalisée. L'histoire des mathématiques (et

même simplement l'histoire de la géométrie élémentaire) en offre des exemples irrécusables.

Mais ce qui peut paraître une faiblesse dans une perspective absolue, d'ailleurs illusoire, ne peut-il être tout aussi bien interprété comme un avantage décisif dans une perspective humaine d'objectivité ? Pourquoi ne pas appeler faculté d'évolution, ouverture vers le progrès de la connaissance, ce qu'on appelle défaut de vérité ? Pourquoi considérer comme une insuffisance de principe ce qui d'autre part, dans la pratique du savoir, est la condition nécessaire d'une marche en avant ? Ces jugements défavorables ne sont que l'expression d'un préjugé métaphysique. Mais n'avons-nous pas dit que la nouvelle façon de penser et l'intention métaphysique sont antagonistes ?

3° Mais que faites-vous de l'évidence ? Récusez-vous en bloc tous les jugements d'évidence ?

On a maintes fois observé qu'une solution idoine prend, après il coup, caractère d'évidence. L'évidence est une forme particulièrement favorable de l'idoine et, comme l'idoine, sujette à révision.

4° Mais comment le principe d'idonéité sera-t-il mis en œuvre ? Comment en décrire l'application puisqu'en principe, les exigences auxquelles il faut satisfaire sont changeantes et ne sont que partiellement connues ?

Décrire comment ce principe doit développer ses conséquences dans telle ou telle discipline, ce serait fixer d'avance les traits essentiels de la méthode de cette discipline. Mais une discipline scientifique est comparable *à la maison* de notre fable. Il ne suffisait pas que la maison fût rêvée, pour que son plan fût établi et que toutes les circonstances de sa construction fussent décidées. De même la recherche de *la réalité* ne s'incorpore pas automatiquement dans une méthode à laquelle une science déterminée devra sa genèse et son développement. Une science et sa méthode se font conjointement, face à l'expérience. C'est peut-être la plus capitale des illusions philosophiques que de croire à l'existence d'une telle méthode toute faite et toute prête, dans quelque monde à la fois réel et abstrait.

La méthode de toute discipline scientifique est elle-même ouverte, en devenir. Ce qu'on en peut formuler, à un instant de son histoire, n'est que la conception idoine de ce qui fait *la réalité et l'efficacité* de ses démarches.

5° Mais, sait-on d'avance ce qui est le meilleur, le plus conforme, ce qui convient le mieux ?

Certes non ! Comment le saurait-on ? Seul un préjugé métaphysique peut nous suggérer de le réclamer comme notre dû. Rien ne peut nous dispenser de prendre part à l'expérience et à l'effort sans lesquels aucune discipline de l'esprit ne s'édifie. C'est en réponse à cette expérience, en récompense de cet effort que se forme le jugement de valeur : « ceci est préférable ».

En un mot : il n'existe pas d'avance de détermination de l'idoine; l'idoine ne se conçoit que dans l'exercice et par l'exercice le plus concret et le plus exigeant des techniques scientifiques.

6° Vous voulez faire de la règle de la meilleure convenance un principe dominant, presque la première des catégories du jugement. Ne conviendrait-il pas qu'elle déterminât pour le moins notre ligne de conduite immédiate ?

Sans aucun doute : dès le prochain chapitre, c'est-à-dire, dès que sera terminée cette discussion préliminaire, notre premier souci sera de nous y conformer en adoptant la ligne de conduite immédiate suivante :

Entrer sans délai, mais comme dans une expérience, dans l'édification de la géométrie.

Voici enfin une dernière objection, en quelque sorte une objection de dernière ligne :

7° De quelle autorité vous réclamez-vous pour proposer le principe d'idonéité de préférence à tout autre ? Le tenez-vous pour évident ? Car vous ne l'avez pas encore justifié ?

Chassez l'intention métaphysique, elle reviendra toujours dans une dernière objection. Celle qui précède paraît très forte. Nous ne chercherons pas à l'éviter; nous ne lui céderons pas d'un pouce.

Reconnaissons tout d'abord sans ambages qu'en parlant d'un *principe de la meilleure convenance*, en prétendant l'ériger en catégorie de notre jugement, nous fixons un point fondamental de notre théorie de la connaissance. Nous le reconnaissons clairement et explicitement. Nous trouverons donc assez naturel qu'on nous demande quelles sont les raisons qui nous y autorisent. Notre réponse fera peut-être scandale, du moins au premier moment :

Nous adoptons le principe d'idonéité parce qu'il se révèle idoine.

Bien entendu, cette réponse va fournir à l'objection précédente l'occasion de prendre sa forme la plus incisive :

« Vous vous moquez de nous, dira-t-on. On vous demande de justifier le mot et l'idée d'idoine, et l'emploi que vous prétendez en faire, et vous répondez que cet emploi est idoine. Il y a là un cercle vicieux d'une provocante évidence ! »

Notre troisième idée se trouve-t-elle compromise par cette argumentation ? En aucune façon. Nous allons éclaircir la situation par une seconde fable pédagogique.

21. LA FABLE DU CALIFE, DES DIX ARCHITECTES ET DU PHILOSOPHE. Un grand calife conçut un jour le projet de faire édifier un nouveau palais. Ayant fait venir à lui ses dix architectes : « Je veux, leur dit-il, que dans un mois vos plans soient faits. Le grand vizir vous exposera les conditions à remplir et les exigences à satisfaire. »

Un mois s'étant écoulé, dix plans furent présentés au calife.

— Ces plans sont-ils identiques ? demanda-t-il.

— Ils sont tous différents, lui fut-il répondu.

— Ces plans sont-ils compatibles entre eux ? insista-t-il.

— Ils sont inconciliables, fallut-il ajouter.

— L'un d'eux s'inspire-t-il de l'art vrai de bâtir ? voulut-il encore savoir.

— Mon plan est le seul vrai ! s'écrièrent les dix architectes à la fois.

Alors le grand calife sourit et décida :

— Je choisirai donc celui qui répondra le mieux à mon désir.

* * *

En l'entendant, un vénérable conseiller branla la tête et murmura :

— Qui donc défendra le vrai, si le calife s'en désintéresse ?

Le calife fut ébranlé et fit venir son philosophe.

— Ai-je eu tort ou raison, questionna-t-il, de m'en remettre à mon propre jugement ?

— Avais-tu, grand calife, quelque moyen plus raisonnable d'en décider ?

— Aucun, fit le calife.

— Le plan choisi te convient-il encore ? reprit le philosophe.

— Plus que tout autre, fut la brève réponse.

— Y aurait-il eu quelque avantage à faire jouer la décision aux dés ? fit encore celui dont la mission était de penser à d'autres choses que chacun.

— Plaisantes-tu ? s'emporta le calife.

— Tranquillise-toi donc, grand souverain, lui fut-il assuré. Je ne sache pas qu'il soit défendu au calife d'avoir le jugement droit. Ta décision fut et reste idoine.

— Mais le vrai, qu'en faisons-nous ? insista le calife une dernière fois.

— Je ne sais, fit le philosophe avec force, lequel est le plus fou, de celui qui prend ses décisions par les dés ou de celui qui réclame un vrai qu'il n'est pas à même de reconnaître.

* * *

Le calife, ayant médité cette réponse, fit rappeler son philosophe.

— Comme le fabuliste tire une moralité de son récit, lui dit-il, ne saurais-tu tirer une règle de gouvernement de l'expérience de mes dix plans d'architecte ?

Le penseur, ayant profondément songé, lui proposa le distique suivant :

« Si tu ne connais le vrai,
L'idoine il te faut chercher. »

Le calife, l'en ayant loué, reprit tout aussitôt :

— Tu n'ignores pas que mes décrets étaient jusqu'ici introduits par la formule traditionnelle : « Par mesure vraie... ». Convient-il d'en faire de même pour la règle que tu viens d'énoncer ?

— Grand calife, reprit le sage, désires-tu faire admirer ton décret comme une haute vérité, ou l'édicteras-tu pour qu'on l'applique ?

— J'en veux faire une règle observée, déclara le calife.

— Mais es-tu sûr, grand souverain, de promulguer ainsi une règle efficace ?

— N'en doute pas ! Mon expérience des hommes et du pouvoir m'en est garante.

— C'est donc qu'il faut la tenir pour une règle idoine, et le décret qui l'institue pour un décret idoine. Pour être véridique, voici donc quelle doit être la teneur de la proclamation :

Par mesure idoine,
J'édicte le décret idoine qui suit :
Si tu ne connais le vrai,
L'idoine il te faut chercher.

Le calife restant songeur, le philosophe fut pris d'inquiétude.

— Grand calife, fit-il, la nouvelle formule te paraît-elle subversive ?

— Peut-être l'est-elle, répondit le calife, mais j'admire que tu aies formulé une règle que chacun puisse observer, le calife qui l'édicte devant être par là même le premier à la suivre.

22. La légitimité de l'essai dialectique.

Cette fable se passe de long commentaire. Nous y retrouvons assez clairement, l'un après l'autre, les éléments de notre discussion. Le décret du calife y représente, en particulier, le principe de la meilleure convenance. Rappelons que notre débat avait fini par se concentrer sur la question que voici :

Est-il légitime de justifier ce principe par sa propre convenance ? Ne commet-on pas un cercle vicieux en garantissant le garant par ce qu'il est censé garantir ?

Dans notre fable, la situation s'incarne de la façon suivante : il y aurait cercle vicieux, il y aurait confusion du garant et du garanti, si le calife, pour expliquer sa conduite, se bornait à déclarer : « J'édicte ce décret uniquement pour avoir l'occasion de l'observer moi-même ! » Le calife nous fournit, bien au contraire, de très valables raisons.

C'est tout d'abord en vertu de son expérience, en se réclamant de sa connaissance des hommes qu'il juge son ordonnance idoine. Pourquoi n'aurait-il pas le droit de juger qu'elle est de *la meilleure convenance*, d'après le sens immédiat de ces mots, et pour autant qu'il se trouve informé ? La valeur de son appréciation dépend de celle de son information et de la rectitude de son

jugement; nul n'a le droit de lui contester la faculté de la formuler. Il est certain de ne pas se tromper; même s'il se trompait, il n'aurait pas fait de cercle vicieux.

Et comment se justifie-t-il lui-même de la mesure qu'il prend ? En la déclarant idoine, c'est-à-dire, encore une fois, en se fondant sur ce qu'il croit être en état de prévoir. Une nuance dans le récit suffit d'ailleurs à marquer l'absence de cercle vicieux : le calife s'étonne après coup d'avoir été le premier — et sans même s'en douter — à se soumettre à son ordonnance. Ne devrait-il pas être loué de cet accord, de cette cohérence entre ses actes et sa doctrine ?

Pour en revenir à notre principe d'idonéité, il n'y a donc pas d'erreur de procédure à l'admettre comme idée dominante, sous la réserve qu'il soit lui-même idoine, c'est-à-dire qu'il se révèle, à l'emploi, de la meilleure convenance. Pourquoi devrait-il être interdit de comprendre que, par sa signification même, l'idoine n'a pas besoin d'autre justification que d'être ce qu'il a mission d'être. Quant à savoir s'il l'est, dans telle ou telle perspective, seul un jugement informé et conscient de son autonomie relative peut en décider.

D'ailleurs, faut-il vraiment s'excuser, se justifier et se défendre de vouloir faire de son mieux, en s'entourant de toutes les garanties possibles ? La philosophie de l'idoine n'est-elle pas la philosophie du simple bon sens ?

23. CONCLUSION. La conclusion de notre enquête et de sa discussion peut maintenant être brève.

Il nous est immédiatement apparu que l'édification de la géométrie exige l'adoption d'une doctrine préalable portant sur les faits élémentaires de connaissance. Il en serait de même de toute autre discipline scientifique.

Cette doctrine ne s'impose pas d'elle-même, par sa propre évidence. Elle doit être choisie. Trois principes de choix se sont offerts à nous :

le principe d'indifférence qui conduit à une solution d'indétermination;
le principe du recours à une discipline antérieure qui entraîne une solution métaphysique;
le principe d'idonéité introduisant une solution dialectique.

Le premier principe a dû être rejeté parce que, dès les premiers pas, il s'est révélé inégal à sa tâche. La solution d'indétermination est naturelle, inévitable, au niveau de l'information la plus élémentaire. Elle y reste soumise au bon sens. Mais devant les exigences plus strictes que le progrès de la connaissance ne permet pas d'éluder, sa garantie s'évanouit.

La solution métaphysique se discrédite par une contradiction essentielle : il faudrait, pour qu'elle existât, qu'elle fût unique.

Reste le principe d'idonéité. Le choix de la doctrine préalable, dit-il, ne saurait être justifié par avance, une fois pour toutes. C'est un choix révisable.

Au moment où il se fixe, il doit tenir compte des conditions et des exigences que l'information du moment fait valoir.

Le passage du principe d'indifférence à celui d'idonéité se marque par la volonté de limiter l'indétermination, de l'enserrer dans une marge de plus en plus étroite. La solution dialectique est une solution d'indétermination révisée, bien plus, en constant état de révision. Lorsque le progrès de la connaissance exige la révision d'une position, il la fait en général tomber au rang d'une solution d'indétermination qui reste sommairement valable, et en détache la nouvelle solution idoine. En pratique et suivant le point de vue où l'on se place, il peut se faire que la différence qui sépare ces solutions soit négligeable; mais un déplacement du point de vue fera toujours apparaître quelque insuffisance de la solution d'indétermination.

Le principe d'idonéité ne se prévaut que de sa propre convenance. Il en fera la preuve en présidant au choix de la doctrine idoine. La solution qu'il se doit d'apporter devra victorieusement surmonter les barrages devant lesquels la solution d'indétermination s'est trouvée arrêtée. Elle aura en outre à satisfaire aux exigences des trois dernières instances devant lesquelles le jugement de la solution de facilité a été laissé en suspens :

elle ne devra donc pas conduire à une fausse appréciation de la vérité et de l'objectivité dans les sciences;

elle ne devra pas entrer en conflit avec une méthode générale des sciences exactes;

elle ne devra pas représenter un premier pas vers une théorie erronée de la connaissance.

Cette solution ne peut toutefois pas être fixée par anticipation[1]. Les chapitres suivants auront donc à montrer concrètement comment le principe d'idonéité rend compte de la genèse, de la constitution et du progrès de la connaissance géométrique, pour ne citer ici que cette unique discipline scientifique.

---

[1] Indiquons cependant que le point de vue du maître présenté au début de notre enquête se caractérise et se justifie par le souci élémentaire suivant : ne pas mettre la doctrine préalable de la géométrie en contradiction avec les vues de la physique atomique.

CHAPITRE II

LES TROIS ASPECTS DE LA GÉOMÉTRIE

Le premier chapitre de cette étude a mis en lumière les difficultés que rencontre, en géométrie, la recherche d'une position de départ assurée. Le résultat de l'examen préliminaire auquel nous nous sommes appliqués peut paraître déconcertant; il ne comporte cependant aucune ambiguïté : *l'édification de la géométrie implique l'adoption d'une doctrine préalable des vérités élémentaires*. Mais cette doctrine ne s'impose pas d'elle-même; elle doit être choisie. Des trois principes de choix qui se sont offerts à nous : *le principe d'indifférence*, *le principe du recours à une discipline antérieure* et *le principe d'idonéité*, les deux premiers out dû être écartés, les solutions auxquelles ils conduisaient comportant un élément d'arbitraire. Seul le principe d'idonéité est susceptible de nous tirer d'embarras; il introduit une solution ouverte : la doctrine préalable doit rester révisable, puisqu'on ne connaît pas d'avance les caractères qui la rendraient pleinement efficace; sa justesse se reconnaît à l'emploi. *Elle est légitime dans la mesure ou elle se révèle idoine.*

En adoptant le principe d'idonéité comme principe directeur de notre étude, nous gagnons une liberté et nous nous soumettons à une contrainte. Il nous est maintenant loisible de réajuster à chaque instant (dans la mesure où nous pouvons le faire) l'ensemble de nos vues aux résultats de notre recherche. Ceci nous confère automatiquement la possibilité d'édifier la géométrie avant d'en avoir dégagé le fondement définitif. Mais cette liberté ne peut se réaliser que dans un engagement : elle ne prend toute sa portée qu'en tenant compte de l'expérience la plus exigeante.

En effet, le principe d'idonéité nous impose l'obligation d'édifier une géométrie satisfaisante dans la perspective de la science moderne, une géométrie qui réponde aux exigences et au contenu de la connaissance actuelle. « C'est un devoir tout naturel, pensera-t-on, un devoir qu'il est presque superflu de formuler. » Qu'on ne s'y trompe pas : si nous le prenons véritablement au sérieux, il nous demandera un effort persévérant et une grande liberté de jugement.

Bien que le principe d'idonéité nous libère des difficultés philosophiques de la première heure, il ne nous livre pas dans leurs détails les fondements et la méthode convenant à la constitution effective de la géométrie. Ceux-ci sont encore à conquérir. Sans eux, il serait vain de vouloir aborder le problème de l'espace.

Ce problème, nous l'avons dit, ne se pose inévitablement sur la ligne d'évolution de la connaissance spatiale qu'au moment où le mouvement qui porte en avant cette connaissance en découvre les bases et en menace l'unité. Il a surgi une première fois lorsque la représentation de l'espace, qu'une pratique plus que millénaire de la géométrie euclidienne avait imposée, s'est trouvée mise en question. Pour bien comprendre ce problème, il est indispensable de dégager les éléments principaux de cette représentation. Nous y parviendrons en étudiant les aspects sous lesquels la connaissance géométrique se présente et les moyens que nous avons de l'acquérir.

24. Les trois aspects de la géométrie.

Il n'est pas nécessaire d'avoir réfléchi à la nature de l'étendue, d'avoir fait des mesures ou d'avoir eu recours à la déduction géométrique pour entrer en possession d'une certaine connaissance de l'espace. Notre comportement le plus habituel en témoigne : au niveau du sens commun, nous disposons d'une information relative à la forme des corps et à leur situation, sans laquelle le moindre de nos gestes ne pourrait s'effectuer. Cette information que l'exercice organise et consolide, requiert et met en œuvre trois ordres de moyens : *l'intuition*, *l'expérience* et *la déduction*. Dans les actes les plus spontanés, ces trois ordres se prêtent un concours mutuel; la connaissance qui les supporte est à la fois intuitive, expérimentale et théorique.

L'homme adulte dispose d'une représentation de l'espace conditionnée par sa structure physiologique. Il se voit et se sent vivre dans un espace triplement étendu, en longueur, largeur et hauteur. Dans son univers spatial, la verticale se dresse et l'horizontale s'enfuit. Mais ces directions ne sont pas privilégiées parce que le fil à plomb tombe verticalement et que la surface d'un lac s'étale horizontalement; elles le sont déjà en nous-mêmes; la structure de notre système nerveux central les a par avance désignées. La distinction que nous faisons du haut et du bas résisterait-elle à la critique du géomètre, survivrait-elle à l'image que l'astronome nous présente du monde et aux attaques perfides de certaines expériences, si elle ne trouvait sa raison dans l'organisme même ? Cette représentation est notre *espace sensible*.

La connaissance intuitive n'apparaît pas d'emblée sous une forme invariable et définitive. On la voit se constituer, chez le petit enfant, sous la pression et le contrôle des événements. Observons-le tandis qu'il tente d'atteindre un objet; sans cesse, il rectifie, plus ou moins adroitement, une intuition encore défaillante. Même constituée, l'intuition conserve une certaine plasticité; elle est mise à l'épreuve par l'ensemble de nos comportements; elle se précise par le succès ou l'insuccès de nos observations et de nos expériences les plus courantes.

À partir de l'intuition, l'expérience nous met en possession d'une technique de l'orientation des chemins, de l'estimation des distances et, en général, de l'exécution des démarches spatiales. Cette technique, qui se sert de nos sens comme d'instruments de mesure, établit un accord entre nos perceptions, nos intentions et nos déplacements. C'est elle qui nous permet de constituer notre première connaissance de *l'espace mesurable*.

Enfin, le registre de nos comportements, même rudimentaires, n'est pas dressé une fois pour toutes. À chaque instant, nous inventons ou nous découvrons de nouvelles combinaisons d'actes élémentaires. Il nous arrive même de les imaginer d'avance, d'en surveiller le déroulement anticipé par un raisonnement tout simple, mais attentif : à ce moment-là, la déduction, source logique de notre connaissance, se mêle à l'intuition et à l'expérience pour en étendre le champ d'application. Elle nous fait accéder à *la conception rationnelle de l'espace*.

Lorsqu'il organise la connaissance spatiale, le géomètre lui-même n'a pas d'autres moyens d'information. C'est à partir de la connaissance commune que son entreprise prend son essor. Que sa réflexion se situe au niveau de la géométrie élémentaire, à celui de la géométrie euclidienne, de nature déjà plus systématique, ou au stade des géométries non euclidiennes[1], il ne puisera pas ailleurs les éléments dont il se servira et qu'il doit organiser. L'intuition, l'expérience et la déduction restent les trois seuls modes de son activité.

Mais si le chasseur primitif évoqué par Louis Bertrand au début de ses *Éléments*[2] et le géomètre utilisent les mêmes moyens de connaître, le géomètre est seul tenu de distinguer les trois aspects de la connaissance spatiale. Être géomètre signifie ne pas confondre une évidence de l'intuition avec un renseignement expérimental, le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement. C'est ensuite décider, en principe, du crédit à accorder à chacune de ces fonctions de la pensée.

Que dans une certaine mesure cela soit possible, il n'en faut pas douter; l'existence de la géométrie n'est-elle pas un fait ? Ce qui n'est pas établi d'avance, c'est jusqu'à quel point ces trois aspects de la connaissance spatiale peuvent être disjoints les uns des autres. Pourront-ils être spécifiés[3] les uns par rapport aux autres alors que, dans l'œuvre du géomètre, ils sont intimement liés ? Leur spécificité pourra-t-elle être poussée jusqu'à l'autonomie ? Notre

[1] Dans sa *Philosophie du non*, M. G. Bachelard distingue cinq étapes de l'évolution d'un concept scientifique, pourvu de sa perspective philosophique complète : le réalisme naïf (animisme), l'empirisme clair et positiviste, le rationalisme newtonien ou kantien, le rationalisme complet et le rationalisme dialectique. Les trois étapes intermédiaires correspondent aux stades de développement de la géométrie que nous envisageons ici.

[2] *Éléments de géométrie*, Paris et Genève, 1812. Voir les pages de l'ouvrage de Bertrand reproduites au n° 52.

[3] L'idée de la spécification progressive d'un concept est un élément essentiel de la façon de voir à laquelle nous serons conduits.

étude se situe dans le cadre de ces questions. Nous nous demanderons d'abord si les trois modes de connaissance de l'espace sont susceptibles d'acquérir une existence autonome, d'être conçus dans une pure spécificité et, dans l'éventualité d'une réponse affirmative, si la géométrie peut être édifiée en ne faisant appel qu'à l'un ou à l'autre d'entre eux.

Il nous faut encore dire quelque chose des moyens dont nous disposons pour examiner objectivement cette double question.

Les trois modes d'information cités sont accessibles en tant que phénomène psycho-physiologiques; ils apparaissent, d'autre part, dans les schémas géométriques qu'ils concourent à édifier. L'analyse psycho-physiologique éclairera la constitution des schémas et s'éclairera de celle-ci. On ne peut espérer constituer une géométrie spécifiquement intuitive, expérimentale ou théorique sans s'être livré à une étude plus ou moins sommaire des fonctions correspondantes sur le plan psycho-physiologique, et c'est par l'examen des édifices géométriques constitués, que cette étude se trouvera contrôlée.

Il est à peine nécessaire de préciser qu'au niveau de l'information naturelle, auquel notre étude se place dans ce chapitre, l'élément intuitif joue un rôle essentiel. Une expérimentation systématique, autant qu'une organisation théorique, nécessite en effet un effort intellectuel plus énergique qu'une simple prise de conscience, caractéristique de la connaissance intuitive.

On ne s'étonnera donc pas que l'intuition occupe une place prépondérante à ce point de nos réflexions. L'élément rationnel sera serré de plus près dans le chapitre consacré à l'édification axiomatique de la géométrie. Quant au mode expérimental, ce que nous en dirons ici n'est qu'une première prise en considération; il réapparaîtra plus tard comme l'élément révolutionnaire de la connaissance.

L'aspect intuitif

25. QU'EST-CE QUE L'INTUITION ?

L'intuition est-elle une source authentique de connaissance ? Existe-t-il même une connaissance intuitive qui ne soit pas réductible à quelque autre genre de connaissance ? Ces deux questions marquent une gradation dans le doute. À l'une comme à l'autre, la plupart des mathématiciens n'hésiteront pas à répondre par l'affirmative[1] : « Nous ne saurions, sans renier notre expérience, contester

[1] Nous en voulons pour témoignage l'ouvrage déjà classique de HILBERT et COHNVOSSEN : *Anschauliche Geometrie* (Berlin, Springer, 1932) et celui, plus récent, de M. G. BOULIGAND : *Les aspects intuitifs de la mathématique* (Paris, Gallimard, 1944). Citons encore cette phrase de M. J. HADAMARD, placée en exergue à ce dernier ouvrage : « Dans toute méditation scientifique, la parole est toujours, pour commencer, à l'intuition : le raisonnement rigoureux qui s'élabore ensuite n'est autre chose que l'intuition contrôlée... »

l'existence et l'authenticité de l'intuition, diront-ils. On traiterait de fou le graveur qui douterait de la réalité du burin qu'il tient en main. Serions-nous plus sages que lui en admettant que l'intuition dont nous nous servons tous les jours n'est pas un instrument réel de l'esprit ? »

L'opinion des mathématiciens, — et ce fait est assez troublant, — n'est cependant pas unanime. Le géomètre J. HOUËL, par exemple, passe tout simplement sur notre première question pour répondre franchement non à la seconde : « L 'hypothèse euclidienne a été admise au nom de ce qu'on appelle *l'évidence*, c'est-à-dire d'un troisième moyen de connaître intermédiaire entre l'expérience et le raisonnement, et participant à la fécondité de l'une et à la certitude de l'autre. Pour nous, *l'évidence* n'est autre chose qu'une expérience assez souvent répétée pour que la force de l'habitude nous en ait fait perdre la conscience, et dont les résultats, conservés par la mémoire, nous dispensent de la reproduire matériellement chaque fois que nous voulons y recourir. Il nous est impossible d'admettre cette entité, si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut[1]. »

À elle seule, cette voix dissidente suffirait à justifier l'étude que nous entreprenons. Envisageant l'intuition tout à la fois sous l'angle de l'existence et de l'efficacité, nous chercherons à la faire apparaître comme un fait de conscience aussi bien que comme un moyen de connaître.

Nous ne ferons pas au doute plus de concessions qu'il ne faut; mais nous ne pouvons passer sous silence certaines remarques. À en croire la majorité des mathématiciens, l'intuition serait la garantie même de leur savoir. Il semble, à les entendre, qu'il s'agit là d'une notion clairement délimitée. Or comme tous les mots qui lui sont étymologiquement apparentés, ce vocable recouvre plusieurs significations, malaisées à préciser, et souvent fort différentes les unes des autres[2]. On parle communément de l'intuition du joueur de bridge, de l'intuition spatiale qui nous livre les relations et les rapports existant entre les éléments des figures géométriques, de l'intuition logique garante de la cohérence de nos raisonnements, de l'intuition de l'analyste qui met en jeu un sens plus ou moins élaboré du plausible et de l'improbable dans le champ de ses recherches. Ainsi le terme même qui devrait désigner le fondement de nos connaissances les plus élémentaires n'a pas de signification tout à fait nette.

[1] *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide*, Paris, Gauthier-Villars, 2e édition, 1883, p. 69-70.

[2] Il suffit pour s'en convaincre d'ouvrir un vocabulaire philosophique. Le *Petit vocabulaire* de CUVILLIER fait les distinctions suivantes : « 1. Intuition *empirique*, comprenant elle-même l'intuition *sensible* (celle des sens) et l'intuition *psychologique* (celle de la conscience); — 2. Intuition *rationnelle* (par exemple, celle des axiomes); — 3. Intuition *inventive* ou *divinatrice* (celle qui nous fait pressentir la vérité); — 4. Intuition *métaphysique* qui, selon certains philosophes, nous permet de saisir l'absolu, soit par la raison (DESCARTES), soit par une autre faculté (BERGSON)... »

Cette constatation ne découragera pas les partisans de l'intuition, moyen légitime de connaissance. Quelques-uns chercheront même à sauver tous les sens du mot à la fois. Pour tout concilier, il suffit, disent-ils, d'admettre que l'intuition est un moyen (qui nous est concédé) d'entrer en possession d'une connaissance immédiate. N'y a-t-il pas derrière toutes les formes de l'intuition une seule et même faculté; tous les exemples qui viennent d'être cités, et tous ceux qu'on pourrait imaginer, ne doivent-ils pas être considérés comme des manifestations d'un même pouvoir, du pouvoir de reconnaître le vrai et le réel aussi directement que la main saisit un objet ?

Si cette théorie de l'intuition était juste, elle nous dispenserait de toute étude ultérieure. Mais est-elle juste ? Ce n'est pour l'instant qu'une hypothèse; pouvons-nous l'accepter ? Nous fixerions ainsi un point essentiel de la doctrine des vérités élémentaires, et notre attitude à l'égard de la connaissance et de ses voies se trouverait précisée. Ce point de doctrine imprimerait en même temps son caractère à la forme et à la valeur de notre savoir; l'adopter serait donc faire un choix décisif.

Sommes-nous libres de nous prononcer, libres de dire oui ou de dire non à cette hypothèse ? Notre liberté ne va pas jusque-là. Nous ne pouvons prendre une décision sans nous en référer à l'ensemble de notre information. Or nous ne saurions oublier que l'intuition, au sens large du terme, nous a maintes fois déçus. Le joueur de bridge le plus perspicace peut se tromper; l'intuition mathématique en ses débuts doit être guidée vers les chemins où l'on ne s'égare pas. L'intuition logique a ses mécomptes; et celle du mathématicien le mieux averti ne le préserve pas toujours des fausses suppositions.

Considérer l'intuition comme une prise de conscience infaillible dans tout le champ de la connaissance est donc une erreur. Les faits les plus communs et les plus indéniables démentent cette attitude. Mais est-il nécessaire d'y renoncer totalement ? Ne pourrait-elle être adoptée dans certains cas ? Incontestablement notre expérience de mathématicien nous inclinerait vers le choix d'une doctrine de l'intuition, prise de connaissance irrévocable de ce qui fait la réalité des choses et la vérité des idées. Cette doctrine doit-elle être mise en doute jusque dans les mathématiques ? Ne prenons pas parti prématurément, tout n'a pas été dit.

Cette intuition du mathématicien, nous la reconnaissons presque infailliblement à l'œuvre et, toutes les fois que nous l'invoquons, nous savons très bien de laquelle de nos activités mentales il s'agit. En voici un exemple :

Une droite pénètre dans un cercle en un point A. Quelqu'un hésitera-t-il à affirmer que cette droite ira couper le cercle en un autre point B ? Cette proposition est susceptible d'être démontrée; mais la certitude qui s'y attache n'est pas le fait de la démonstration. Pour que la certitude soit entière, il n'est pas nécessaire que la démonstration ait été faite. La connaissance, dans ce cas, précède le raisonnement. Certitude antérieure à toute preuve, telle est la certitude qu'engendre la connaissance intuitive.

Cet exemple n'est-il pas convaincant ? Ne force-t-il pas le choix dans le sens de la théorie que nous allions rejeter ? Celle-ci ne doit-elle pas être conservée, sinon pour toutes les formes de l'intuition, du moins pour l'intuition qui nous occupe ici, pour l'intuition géométrique ? Songez-y, il y a, dans notre exemple, comme le surgissement d'une image portant en soi un caractère de révélation. C'est un véritable fait d'intuition. N'y a-t-il pas dans ce fait et dans notre prise de conscience de ce fait, — quelle que puisse être la valeur de l'hypothèse génétique de HOUËL, — le fondement de l'autonomie de l'intuition ?

Notre conviction est-elle établie ? Voici quelques nouveaux arguments qui vont derechef l'ébranler. Il suffit de placer l'intuition dans la perspective historique pour qu'elle perde son caractère de connaissance directement adéquate, d'instance irrévocable. Prenons un exemple. Dans ses *Éléments*, où les principes de la géométrie sont exposés complètement pour la première fois et avec une admirable précision, EUCLIDE admet sans démonstration que, par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite. Il rangeait cette proposition, qu'il tenait pour certaine, dans les postulats de la géométrie. Il estimait, dirions-nous, en trouver la pleine garantie dans son intuition de l'espace. Or, on sait que l'évidence de ce simple énoncé ne tarda pas à devenir le sujet des plus vives contestations. La discussion ne dura pas moins de vingt siècles. Elle devait aboutir à la création des géométries non euclidiennes, si bien que le postulat d'EUCLIDE n'est plus qu'un cas particulier, à côté d'autres postulats qui lui sont comparables en contenu de vérité, et qui pourtant l'excluent et le contredisent[1]. Lorsqu'une évidence est touchée par le doute, plus jamais elle ne se rétablit dans sa signification primitive; tout au plus reste-t-elle valable comme une vérité relative et conditionnelle. Il en est désormais ainsi du postulat d'EUCLIDE.

C'est là un exemple frappant de ce qu'on pourrait appeler *l'évolution des évidences*, L'histoire des sciences en connaît d'ailleurs bien d'autres. Or, la doctrine de l'intuition, prise de conscience irrévocable, ne saurait souffrir un seul échec. S'il lui faut avoir recours à d'autres confirmations, ne serait-ce que dans un seul cas, c'est le principe même de sa légitimité qui est mis en question.

Nous voici placés maintenant devant une fâcheuse alternative. Élevons-nous l'intuition au rang d'instance sans appel, même s'il ne s'agit que de l'évidence géométrique, l'expérience historique vient démentir cette prétention. Mais

[1] Cf. n° 2 (chap. I, p. 19).

renonçons-nous à regarder l'intuition, au moins dans les parties les plus élémentaires des mathématiques, comme la garantie la plus sûre dont nous disposions, c'est alors la pensée géométrique tout entière qui perd son assurance. La seule constatation possible, à ce point de notre étude, c'est que nous ne sommes pas encore en mesure de nous prononcer : l'heure d'un choix définitif n'est pas encore venue. Il nous faut encore tenir toutes nos décisions en suspens.

26. LES MOYENS DE L'ANALYSE DE L'INTUITION. Les quelques réflexions qui précèdent ne suffisent pas à déterminer le rôle et la portée de l'intuition. Elles se résument en deux affirmations qu'il faudra prendre la peine d'accorder.

D'une part, l'existence de l'intuition spatiale ne peut être mise en doute, bien qu'en parlant de connaissance intuitive, nous ne sachions qu'assez vaguement de quelle connaissance il s'agit. Mais notre activité quotidienne serait un invraisemblable et perpétuel miracle, — et l'enseignement de la géométrie un mystère impénétrable, — si nous ne disposions d'une faculté naturelle par laquelle nous voyons (et nous imaginons) l'espace et tout ce qui y prend forme. Tous nos gestes en témoignent. Toutes nos pensées en dépendent. Le doute n'est pas possible.

D'autre part, l'expérience historique comme notre expérience individuelle nous interdisent de conférer à l'intuition une validité irrévocable, de tenir la connaissance qu'elle nous transmet pour irrécusable.

Pour être idoine, notre doctrine préalable doit tenir compte de l'une et de l'autre des affirmations précédentes. Par exemple, la doctrine de l'intuition, *connaissance du vrai et du réel sans intermédiaire et sans appel*, s'accorde avec la première, mais elle contredit la seconde. C'est donc une hypothèse à rejeter.

Voilà, quant à la doctrine préalable, une fausse voie qui se referme. Comment ouvrir la vraie ?

Nous renoncerons, tout d'abord, à parler de l'intuition en général, pour ne considérer que l'intuition spatiale, l'intuition relative à l'étendue, aux formes, aux figures, aux déplacements. D'autres genres d'intuition pourraient aussi être étudiés; mais tous ne peuvent l'être simultanément. Nous abandonnons les intuitions du joueur de bridge; nous renonçons à faire la théorie de la divination du savant (qui a longuement médité son sujet), etc. L'intuition dont nous avons à nous occuper est uniquement l'intuition qui préside à la genèse et au développement de la géométrie élémentaire.

Sur ce point, nous n'échapperons pas à la nécessité d'adopter une certaine façon de voir, qui s'intégrera à notre doctrine préalable. Mais nous ne nous livrerons pas au hasard de quelques informations sommaires. L'intuition n'est pas inaccessible à une observation objective. Elle n'est pas installée en nous

sans relations avec tout notre être psycho-physiologique. Elle n'est pas sans analogie avec les facultés que nous révèle la conduite d'autres êtres vivants. Pour s'en faire une idée juste, il est de nombreux faits qu'il faut respecter, certains même sur lesquels on peut s'appuyer.

De quelles informations pouvons-nous disposer[1] ? Citons, en tout premier lieu, la connaissance que nous avons de nous-mêmes. L'homme n'est pas totalement un inconnu pour lui-même. Nous nous sommes surpris, nous confiant à l'intuition de l'espace, prenant celle-ci comme fondement de notre réflexion géométrique. En un mot, nous connaissons l'intuition pour l'avoir utilement pratiquée.

Cette connaissance de notre être mental peut être confrontée avec ce qu'on observe de la genèse des conduites spatiales chez l'enfant, et de celle de l'idée d'espace et des notions qui en dépendent.

Ces observations peuvent se doubler de celles du pédagogue, spécialement au moment où l'enseignement de la géométrie commence.

D'autres renseignements peuvent être empruntés à la psycho-physiologie. Remarquons à ce propos que les psychologues et les physiologistes, lorsqu'ils analysent le fonctionnement de l'esprit humain, ne disposent pas toujours d'un ensemble de faits bien préparés sur lesquels ils n'auraient qu'à exercer leur perspicacité. Ils sont souvent amenés à imaginer des modèles satisfaisant à l'ensemble des exigences connues. Nous nous inspirerons de ce procédé.

Notre problème peut être éclairé par ce qu'on sait de la représentation du monde chez les espèces animales, spécialement chez les insectes. Des rapprochements singuliers et suggestifs sont possibles.

Dans un tout autre ordre d'idées, l'histoire des sciences, envisagée comme une histoire des notions, est aussi une source d'utiles renseignements.

Allons-nous présenter les uns après les autres, les uns à côté des autres, des faits empruntés à des disciplines si différentes ? Il n'en peut être question; nous dépasserions de toutes parts le cadre de cette étude. Mais si nous ne pouvons songer à faire intervenir explicitement tous ces faits, indiquons cependant qu'ils forment l'arrière-plan de nos préoccupations et contribuent à créer l'atmosphère de confrontation générale où viendra tout naturellement se placer la doctrine de l'intuition proposée. C'est en ayant le regard fixé sur cet ensemble de faits que nous avons choisi « le principe de la poupée russe », comme idée directrice.

Nous allons maintenant imaginer des modèles nous permettant d'atteindre et d'isoler (en pensée) les phénomènes singulièrement complexes de l'intuition. Ces modèles comprendront, comme constituants essentiels, des automates, des

[1] Nous ne pouvons pas dresser ici une liste de tous les ouvrages auxquels il faudrait recourir; nous nous contenterons de renvoyer aux travaux de M. Jean PIAGET et de ses collaborateurs et à ceux de MM. H. PIÉRON, W.R. HESS, M. MONNIER et A. KŒLSCH.

robots auxquels nous déléguerons une partie de nos fonctions, aussi bien sur le plan de la perception que sur celui de l'action.

Commençons par préciser quelques caractères de ces robots.

27. UN ROBOT SENSORI-MOTEUR ÉLÉMENTAIRE. La considération de mécanismes capables d'entrer en concurrence avec l'être vivant, dans le cadre de certaines actions limitées et déterminées, peut fournir d'utiles suggestions quant à l'organisation mentale de l'homme. On sait construire des automates exécutant sur commande une action ou une série d'actions appartenant normalement au répertoire des actions humaines. Nul doute qu'il soit possible de réaliser un robot chargé de la mission suivante[1] : *défendre contre toute intrusion une enceinte dans laquelle il se trouve lui-même placé, en projetant le lourd boulet dont il est armé sur quiconque tenterait de pénétrer dans l'enceinte*. La fabrication d'un tel automate n'est peut-être pas chose tout à fait aisée; elle pose certains problèmes de coordination et de localisation dont la solution exige sans doute de réels efforts techniques. Mais là n'est pas la question. Supposons ce robot construit; nous sommes en mesure de décrire d'avance les organes essentiels du mécanisme qui l'animera.

Pour que le robot entre en action, il faut tout d'abord que l'intrus lui soit signalé. À cet effet, il doit comporter une image, un *schéma interne* de la frontière. Nommons R la frontière et P son schéma. Nous dirons que le robot possède, par l'intermédiaire de P, une représentation de la frontière R, qu'il a pour mission de surveiller. Mais, pour que cette représentation puisse être mise en rapport avec la réalité extérieure, il faut naturellement un appareil de signalisation qui, détectant l'intrus en un point A de la frontière, vienne inscrire son signal en un point correspondant A′ de l'image P. La mise en correspondance des points A et A′ est essentielle. Elle nécessite un dispositif spécial. Ce dispositif est un organe de perception; il apporte au robot, par l'intermédiaire du signal qui vient s'inscrire au point interne A′, la perception du point externe A.

La perception ne constitue que la première péripétie de l'action. Passons immédiatement à la dernière, celle où le boulet se trouve projeté sur l'ennemi. Nous aurons besoin cette fois d'un appareil balistique, capable d'atteindre le point A aussitôt que le signal aura touché le point A′. Ce dispositif devra commander une série de déclenchements et de mouvements, chacun de ceux-ci correspondant à un point bien déterminé de la frontière. Imaginons, pour simplifier, que la série des déclenchements ne comprenne qu'une seule

[1] Des automates de ce genre nous ont déjà servi à étudier le rôle de l'intuition. Voir *Les mathématiques et la réalité* (p. 62 sq.) et *Qu'est-ce que la logique ?* (p. 66).

possibilité pour chacun de ces points. Pour régler la machine, il faudra constituer le tableau, le registre G de la collection des gestes possibles, et le mettre en correspondance avec la suite des points de la frontière. Ce registre sera donc une seconde image de R, telle que, si un signal vient s'inscrire en un de ses points A″, ce soit précisément le geste projetant le boulet en A qui se trouve déclenché.

Pour que la première et la dernière de ces péripéties se trouvent reliées de façon efficace, il suffit que le signal issu de A et perçu en A′ soit finalement transmis en A″. Cette mise en relation du registre P des perceptions et du registre G des gestes possibles exige un nouveau dispositif, un appareil de connexion interne approprié.

La figure 1 représente schématiquement l'ensemble du mécanisme. Pour plus de clarté, nous avons imaginé que les deux registres internes se trouvent

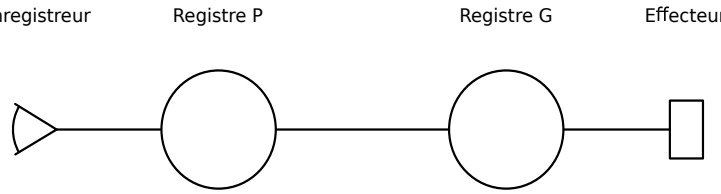


FIG. 1

réalisés séparément. On pourrait supposer que leur mise en relation se réduise à une simple superposition.

En quoi le robot est-il analogue à un homme maître de ses mouvements, au moins partiellement ? Par quoi en diffère-t-il ? Les deux questions ont leur importance. On aura certainement remarqué que le vocabulaire dont nous nous sommes servis fournit quelques points de comparaison. En lieu et place d'un robot, un homme pourrait être armé du même boulet et pourrait être chargé de surveiller et de défendre la frontière de l'enceinte. Il est physiologiquement organisé de façon à pouvoir remplir lui aussi cette tâche. Le robot n'est là que pour nous suggérer quelques idées concernant l'organisation de l'être vivant. Mais avant de nous engager dans la voie des analogies, mettons l'accent sur une différence fondamentale. En remettant la défense de l'enceinte à un automate, — et de ce fait même, — nous avons exclu de notre comparaison tous les phénomènes de conscience. Le geste du robot se réduit à l'incitation d'un acte se déroulant sans l'intervention consciente de la personne, à l'illustration mécanique d'un acte réflexe. Nous restons infiniment éloignés de l'acte réglé pour une part par des processus inconscients, mais soumis pour une autre part au jugement et à la volonté. Néanmoins, cette esquisse extrêmement grossière

et sommaire comporte déjà quelques indications importantes[1].

Pour pouvoir remplir sa fonction, le robot doit porter en lui une représentation suffisamment adéquate de la réalité dans laquelle son geste doit s'insérer. Cette représentation doit être inscrite dans le registre de ses perceptions aussi bien que dans celui des gestes dont il est capable. Elle imprime la structure de la réalité externe sur l'un et l'autre de ces registres; c'est sur elle que perceptions et mouvements se trouvent réglés.

Ces remarques ne s'appliquent-elles pas aussi au vivant lanceur de boulet ? Certes, nous savons que le moindre de ses gestes se répercute à travers une organisation incomparablement plus complexe que celle que nous avons prêtée à notre automate.

Mais quelle que soit la complexité des moyens mis en œuvre, et quels que soient la façon, la forme, la substance et les processus par lesquels l'organisme psycho-physiologique humain réalise ces gestes, ceux-ci comportent aussi les éléments fondamentaux que réclame le fonctionnement de l'automate. Toute réponse motrice à une perception comprend les moments essentiels que nous avons décrits. Pour être reconnue, spécifiée et donner naissance à une signification, toute perception doit venir se situer dans l'ensemble des perceptions inscrites dans un même registre P. Pour se déclencher, pour prendre son individualité, son lieu, sa forme, sa vitesse, tout geste doit être choisi dans l'ensemble des gestes contenus dans un même répertoire G. Et pour que le geste réponde à la perception dans la réalité externe, il faut que la structure de celle-ci ait présidé à la jonction interne du sensoriel et du moteur, c'est-à-dire à la mise en rapport des registres P et G.

En un mot, tout circuit sensori-moteur traverse deux totalités internes accordées l'une à l'autre par l'intermédiaire de la projection, sur chacune d'elles, d'une même réalité externe.

28. UN ROBOT SENSORI-MOTEUR PLUS COMPLEXE.

Un poisson[2] qui resterait complètement inerte ne flotterait pas dans une position d'équilibre normale. Dans cet état, des moments hydrostatiques tendraient à le retourner, s'il ne les annulait incessamment par l'action de certaines nageoires. De plus, pour rester sur place dans une eau courante, il lui faut compenser son mouvement d'entraînement. Or quelques espèces possèdent un appareil sensori-moteur spécialement affecté à ces tâches.

[1] Voici un exemple physiologique qui se rapproche de notre modèle automatique. Lorsqu'un signal apparaît en un point quelconque de l'équateur du champ visuel d'un œil, il peut arriver qu'un mouvement réflexe fasse dévier l'œil de sa position primitive, amenant l'axe de celui-ci à coïncider avec la direction dans laquelle ce signal est apparu.

[2] Nous empruntons les indications suivantes à un travail de M. W.R. HESS : *Die Motorik als Organisationsproblen. Biologisches Zentralblatt*, B. 61, H. 11/12, 1941.

Supposons qu'une proie frôle la surface de l'eau, et que le poisson, l'ayant aperçue, s'élance pour la happer; un autre appareil sensori-moteur entre en action. Un autre système de nageoires exécute la réponse adéquate à cette nouvelle perception. Nous avons ainsi l'exemple d'un organisme où se trouvent réalisés deux circuits sensori-moteurs relativement indépendants, adaptés à des fonctions différentes et dont les effets ne se superposent que dans la dernière phase d'exécution, dans la phase motrice.

Cette division du travail est peut-être fort bien adaptée aux besoins des poissons qui sont ainsi organisés. Eu égard à d'autres réalisations sensori-motrices, elle prend un caractère simpliste et gauche. Une truite est capable de rester sur place dans un tourbillon. Les actions auxquelles elle est soumise sont si variées qu'elle n'arrive à les compenser que par le jeu combiné de tout son appareil moteur. Elle ne garde pas en réserve un système de nageoires prêt à entrer en action pour une tâche supplémentaire. Mais qu'une proie se présente : l'appareil natatoire tout entier agit comme appareil de propulsion. Exécutant un ordre venu du système nerveux central, les nageoires *superposent* à leur action primitive l'action requise pour atteindre le nouveau but.

La différence avec le cas précédent est frappante. *Un robot capable de réaliser une fonction analogue devra être organisé sur une nouvelle idée*. Voici une description très schématique de cet automate.

En lui, deux totalités sensorielles devraient d'abord enregistrer l'état du milieu extérieur, situant les perceptions correspondantes dans le registre des perceptions possibles de l'une ou de l'autre catégorie, l'un de ceux-ci se rapportant aux états du milieu aquatique, l'autre à la structure de l'espace visuel.

Mais ces deux ensembles de perceptions ne seraient pas transmis chacun pour son compte à un registre correspondant de réponses motrices; ces réponses devraient être inscrites, au contraire, dans un seul registre.

Supposons que le signal A, caractérisant le milieu aquatique, et le signal optique B aient engendré la réponse motrice C. S'il arrive que l'observation du milieu déclenche un nouveau signal B′, la réponse C se modifie. Mais, bien que B seul ait varié, la variation de C ne dépend pas seulement de la variation de B, elle dépend aussi du signal A. Le registre des actions motrices devrait être un registre à double entrée; la réponse s'y formerait par la prise en considération simultanée de deux observations à combiner.

Le rôle de ce registre à double entrée peut être illustré de la façon suivante.

Supposons que deux forces de longueurs variables, X et Y, aient respectivement pour support les axes O*x* et O*y*. Leur résultante passant par l'origine aura la grandeur $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Pour calculer Z, on pourrait naturellement établir une table numérique à

double entrée fournissant Z à partir d'une paire (arbitraire entre certaines limites) de valeurs X et Y (fig. 2). Cette table numérique remplacerait la règle de composition des forces envisagées.

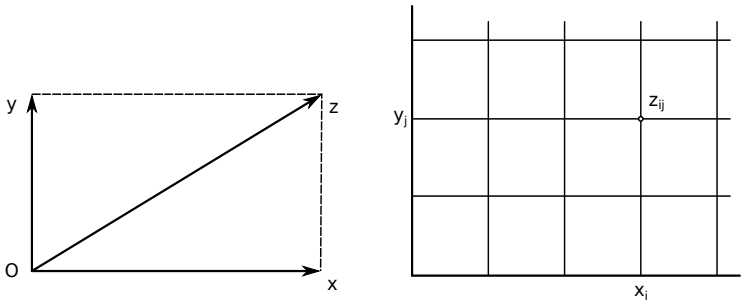


FIG. 2

Cette comparaison met en évidence la signification du registre unique des possibilités motrices répondant à deux registres de sollicitations sensorielles; ce registre unique représente l'équivalent physiologique interne d'une règle de superposition des réponses motrices.

Le progrès accompli en passant de deux circuits sensorimoteurs indépendants l'un de l'autre à la solution combinée est un progrès de principe. Pour une répartition plus efficace des efforts musculaires, le système nerveux central anticipe, par fonction interne et autonome, la superposition des solutions motrices. La réponse qu'il transmet à l'appareil moteur porte en elle, avant même d'être effectuée, tous les caractères d'une solution résultante.

29. L'IDÉE GÉNÉRALE DU ROBOT SENSORI-MOTEUR.

Que voulons-nous suggérer par les deux exemples précédents ? S'ils ne représentent qu'un point de départ, ils permettent cependant d'imaginer des robots d'une complexité croissante, dans lesquels un ensemble toujours plus étendu de registres d'excitations seraient branchés sur un registre toujours plus vaste de réponses motrices résultantes. Cela nous amène à l'idée générale du robot sensori-moteur capable d'assumer des tâches de plus en plus variées, et auquel pourrait être confié un secteur choisi à volonté des actions naturelles à l'être vivant.

L'idée de ce robot est susceptible de nous aider à comprendre comment une certaine connaissance, — et même une connaissance d'une complexité étonnante, — peut se trouver inscrite dans notre système nerveux et, en particulier, dans le système nerveux central. Dans les robots, les registres sont de véritables porteurs internes de connaissance, et ils le doivent à leur structure et à leurs modes de connexion. Chez l'être vivant, ce rôle est dévolu au système

nerveux; sa structure même en fait le porteur d'une connaissance que l'on pourrait appeler généralement *intuitive*, le porteur de règles de conduite adéquate que l'on pourrait nommer *instinctive*, conformément à l'usage.

Les deux exemples de robots que nous avons donnés, et notre tentative de dégager l'idée générale du robot sensori-moteur n'ont pas d'autre but que de suggérer l'existence d'une organisation préalable de nos moyens naturels de connaissance, qui rende compte d'une connaissance déjà fixée, du moins à l'âge adulte.

Nous nous sommes ainsi approchés d'un pas des conditions dans lesquelles l'intuition géométrique intervient. Nous en sommes cependant encore notablement éloignés; l'idée du robot sensori-moteur général ne nous permettra pas à elle seule de caractériser et de situer l'intuition du géomètre. En effet, elle ne comporte pas certaines distinctions qui se révéleront indispensables. D'autre part, notre description s'attarde encore au stade où l'intervention de la conscience et de la réflexion ne se présente pas encore comme un moment essentiel et nécessaire. Or, nous le répétons, le rôle de l'intuition géométrique est inséparable de la conscience que nous en prenons. Notre analyse n'a pas encore atteint son but.

30. INSUFFISANCE DE L'AUTOMATE.

Quel est ce but ? Est-ce simplement de conférer en pensée l'existence à un robot capable de tout ce dont un homme est capable ? Si ce but pouvait être atteint, si nous étions parvenus à construire ou même seulement à imaginer ce robot totalitaire, l'étude de l'homme marquerait un progrès important. Le fonctionnement de notre corps et de notre esprit nous pose un certain nombre de problèmes d'organisation. Si le robot intégral pouvait être appelé à l'existence mécanisée, peut-être nous donnerait-il des indications décisives sur la façon dont fonctionne notre esprit. Et peut-être saurions-nous situer à quelque articulation de cet automate, l'organe qui y tiendrait lieu et place d'intuition. Mais l'idée de ce robot exhaustif n'est-elle pas chimérique ? Nous ne saurions trop insister sur la distance qui sépare l'action automatique de l'action consciente et volontaire. Allons-nous l'ignorer ? Allons-nous poser en principe qu'il ne tient qu'à nous de décider qu'elle est négligeable ? Allons-nous admettre qu'elle finira par s'annuler, pourvu que l'automate ait gagné suffisamment de terrain ? Où irions-nous en prendre le droit ?

Nous pensons, au contraire, qu'il est vain de chercher à épuiser l'homme par l'automate. Jamais, par exemple, un robot n'interrompra de lui-même le cours prédéterminé de ses actions pour réfléchir sur son propre sort et se demander : « Quel est donc le sens de mes actes ? Quelles raisons ai-je donc de faire ce que je fais ? »

Même si on le dotait d'une mémoire artificielle enregistrant tout ce qu'il fait

et déterminant partiellement le geste actuel, on ne saisirait pas l'essentiel de l'acte de conscience, acte qui se dépasse lui-même par la conscience qu'il prend de soi.

Supposons qu'on ait réalisé par un robot un certain ensemble de conduites et de fonctions de l'être vivant et demandons-nous ce qu'il faudrait lui adjoindre pour qu'il soutienne en toutes circonstances la comparaison avec l'être vivant. Il lui manque précisément les attributions essentielles de la personne. En d'autres termes, pour compléter un robot jusqu'à en faire un concurrent de l'être vivant, il faut lui attribuer quelque chose comme un personnage interne doué d'une conscience, d'un jugement plus ou moins libre et juste, d'une volonté plus ou moins autonome et efficace, etc.

Bref, ce qui manque au robot pour être une personne, ce n'est ni plus ni moins qu'une personne. Rien ne nous empêche d'ailleurs de nommer cette personne complémentaire une personne seconde, — pour autant qu'on n'attribue à ces vues et à ces dénominations qu'une valeur de schématisation.

31. L'IDÉE DIRECTRICE : LE PRINCIPE DE LA POUPÉE RUSSE. Ce n'est donc pas l'espoir de capter tout l'homme par le robot qui peut soutenir notre enquête. Nous allons au contraire la placer sous l'obédience d'un principe tout différent.

Ce principe, auquel l'idéal de l'homme-machine est profondément contraire, pourrait être appelé *le principe de la poupée russe*, en faisant allusion à ces figurines peintes qui s'ouvrent et dévoilent une autre figurine qui s'ouvre à son tour, et ainsi de suite. Il consistera à imaginer qu'un certain ensemble de conduites et de réactions de la personne humaine pourraient être attribuées à un premier robot, auquel on adjoindrait une personne seconde, leur réunion devant être capable d'assumer le rôle de la personne originelle. Puis à recueillir un certain ensemble d'attributions de la personne seconde dans un second robot, toutes les attributions restantes devant revenir à une personne doublement interne, à une personne tierce, et ainsi de suite.

La poupée russe finit par livrer la dernière des figurines qu'elle contient; mais une analyse conforme à notre principe ne saurait tendre vers un dernier robot. Elle devrait admettre, au contraire, qu'une suite de robots, quelle qu'elle soit, ne pourra jamais être équivalente à une personne. Si loin que le procédé ait été prolongé, il ne saurait dépouiller totalement la composante interne au profit des composantes extériorisées. En un mot, notre principe rejette, comme une hypothèse arbitraire, l'idée que l'ensemble de nos activités soit réductible à de purs automatismes.

Il n'en reste pas moins vrai que toute la partie constructive de cette analyse se trouvera représentée par les robots et par leur organisation. Bien entendu, ce procédé n'apportera de l'homme qu'une connaissance très schématisée. Mais

toute connaissance ne l'est-elle pas plus ou moins ?

Qu'on se rappelle maintenant les explications précédant l'énoncé du principe de la poupée russe. On remarquera que nous n'aurions accompli aucun progrès véritable en poursuivant simplement en extension l'idée d'un robot sensori-moteur. Ce dont nous avons besoin, c'est d'une perspective en profondeur qui nous permette de spécifier différents stades successifs dans l'élaboration des robots. Nous allons donc reprendre notre analyse en nous laissant guider par ce nouveau principe de schématisation.

32. LE ROBOT PÉRIPHÉRIQUE ET SA PERSONNE SECONDE. Un organe tel que l'œil, par exemple, n'est certainement pas un appareil sensoriel autonome. Avec les autres organes récepteurs et avec tous les organes effecteurs, il forme, par l'intermédiaire du système nerveux, et spécialement du système nerveux central, une communauté de travail, une totalité dont toutes les parties réagissent les unes sur les autres.

L'œil peut cependant être examiné séparément et comparé pour son compte à un instrument de mesure. Comme ce dernier, il est capable, en réponse à certaines actions extérieures, d'un certain ensemble d'états, ou plutôt d'un certain ensemble de changements d'états (ceux-ci pouvant consister aussi bien en variations internes qu'en déplacements de l'organe). Ces changements d'états fourniront le matériel originel, le matériel sensoriel élémentaire de ce qui deviendra connaissance d'une réalité extérieure.

Sans que la volonté ait à intervenir, sans même que la conscience en soit informée, un dispositif adéquat signale ces changements d'états vers l'intérieur[1]. De ce processus sensoriel, ne considérons que le segment qui va de la réception de l'agent extérieur (ici de la réception du pinceau lumineux) à la transmission vers l'intérieur (celle-ci comprise). Nous ne nous trompons certainement pas en admettant que ce segment pourrait être assez fidèlement réalisé par un dispositif automatique adéquat.

Ces remarques ne sont pas seulement valables pour l'œil; elles le sont également pour tout autre organe. Ainsi, l'organe diffus de la proprioceptivité envoie vers l'intérieur le signal des états ou des changements d'états des systèmes effecteurs. Il est légitime d'imaginer que, dans ce cas aussi, un même segment périphérique du processus sensoriel puisse être confié à un robot.

Nous avons considéré le segment périphérique de la sensation. Portons

[1] Cette façon de voir est sans doute simpliste. Il vaudrait mieux dire que chaque changement d'états de l'organe induit un changement d'états de la totalité dont il fait partie. Il faudrait ajouter que la transmission vers l'intérieur d'une variation de l'organe peut être affectée par quelque mot d'ordre venu de l'intérieur. Mais ces précautions sont ici superflues, quelle que puisse être d'ailleurs leur importance. Si jamais la chose devient nécessaire, l'adjonction au robot de la personne interne nous permettra d'en tenir compte.

maintenant notre attention sur le segment périphérique du processus de sens contraire. Certains signaux venant de l'intérieur et portant des ordres déterminés peuvent aboutir dans les effecteurs. Ils s'y traduisent par des changements d'états correspondants de l'ensemble ou d'une partie des effecteurs. Les variations de ceux-ci sont d'ailleurs en général des réponses adéquates aux impressions sensorielles[1]. De ce processus moteur, n'envisageons que le segment qui va de l'arrivée des signaux porteurs d'un ordre jusqu'à l'exécution de cet ordre, dans le cas du moins où l'exécution ne rencontre pas d'obstacle extérieur. Il n'est pas absurde de penser que, pour tel ou tel ensemble déterminé de conduites, ce segment puisse être assez exactement réalisé par un robot.

Supposons maintenant qu'ayant construit dans un même robot les segments périphériques sensoriel et moteur, nous les laissions sans connexion aucune : le robot ne sera capable d'aucune action sensée. Dans ce cas, l'opportunité de notre principe d'adjonction saute aux yeux. Pour que le robot soit capable de quelque conduite humaine, il faut lui adjoindre une personne interne qui soit en état de recevoir le message sensoriel, de le comprendre, de le transcrire et de dicter le message moteur répondant à la signification du message sensoriel. Mais comment cette personne seconde prendra-t-elle connaissance du premier et comment aura-t-elle la possibilité de formuler le second. Nous devons la supposer douée[2] d'une mémoire grâce à laquelle elle saura reconnaître un message sensoriel pour ce qu'il est, — ou, ce qui revient au même, munie d'un registre des états et des changements d'états des enregistreurs, — et douée d'une mémoire semblable, ou munie d'un registre analogue du côté des effecteurs. Laissons dans l'ombre tout le segment du processus dont la personne seconde devrait être le siège et qui viendrait se placer entre l'inscription dans son registre du message venu de l'extérieur et le choix dans le second registre du message porteur des ordres. Ignorant volontairement tout ce qui pourrait être raison ou explication profonde, demandons-nous plutôt comment les choses se passeraient si la personne interne obéissait elle-même à quelque automatisme; si, renonçant à toute liberté de choix et à toute invention, elle faisait toujours suivre l'arrivée d'un même message de l'expédition des mêmes ordres. Il est clair que, dans ce cas précis, le rôle de la personne pourrait être entièrement assumé par le robot. Il suffirait de remettre à celui-ci (comme nous l'avons expliqué dans l'exemple du robot porteur de boulet) deux registres périphériques entre lesquels auraient été établies des connexions convenables.

Un robot de cette structure, dans lequel les segments périphériques sensoriel

[1] Bien entendu, il pourrait être utile, dans certains cas, de nuancer cette description, d'observer des précautions analogues à celles que nous avons indiquées à propos du processus sensoriel. À cet endroit, ces précautions sont superflues.

[2] Ceci ne suffit d'ailleurs pas. Il y a, dans l'être vivant, des valorisations dont il n'est pas indispensable de parler ici.

et moteur se trouvent directement en connexion, en court-circuit vis-à-vis de l'élément conscience de la personne, est un *robot périphérique* ou un *robot-alpha*[1]. Ce robot est capable, par définition, d'autant de conduites significatives qu'on le voudra, pourvu que chacune d'elles soit individuellement déterminée. Notons que l'expression « conduites significatives » n'a de sens que dans la perspective de la personne interne.

Cette personne n'a maintenant plus aucun contact direct avec l'extérieur. Elle ne joue, vis-à-vis des conduites significatives assumées par le robot périphérique, que le rôle strictement passif d'un observateur. Nous la désignerons dans la suite sous le nom de *personne-lambda*[2].

En résumé, au niveau d'analyse que nous avons atteint et pour les conduites envisagées, l'homme peut être remplacé par un ensemble d'organes automatiques : le robot-alpha, et par une personne interne, dépositaire de la signification des conduites du robot-alpha : la personne-lambda.

33. RÔLE DE LA PERSONNE-LAMBDA. Les possibilités d'un robot-alpha sont toujours limitées. On pourra les compliquer à plaisir, elles resteront toujours d'une essentielle pauvreté comparées à la variété des situations que l'être vivant parvient à maîtriser. Le robot périphérique reste incapable de former les notions qui permettent à une véritable intelligence de distinguer dans des situations extrêmement diverses ce qui en fait le caractère commun, et de saisir précisément l'élément qui motive ou qui déclenche telle ou telle conduite. L'exemple du poisson permet d'illustrer notre pensée. Pour que le poisson prenne son élan, nous lui avons mis une proie sous les yeux. Non pas un objet quelconque, mais quelque chose qu'il sache reconnaître pour une proie. Nous n'avons pas imaginé qu'on lui envoyât un signal lumineux quelconque issu du point sur lequel il devait se précipiter. C'est une proie qu'il fallait dire. Mais il y a dans cette notion un élément constructif[3] qui permet de saisir dans un seul caractère une infinité de cas particuliers. Chacun de ceux-ci représente pour le robot-alpha une situation différente des autres. Or c'est leur ensemble qui représente *une* situation déterminée pour l'être vivant, une situation qui réclame une conduite précise : celle de l'élan vers la proie. La notion générale de proie domine donc les conduites du

[1] Peut-être n'existe-t-il aucune liaison directe dans l'être vivant entre l'organe des sens et les muscles. Peut-être est-il nécessaire, pour que la connexion s'établisse, que certains éléments laissés jusqu'ici dans l'ombre (certains éléments affectifs par exemple) viennent encore s'insérer dans le circuit. Mais il n'est pas impossible non plus que certaines réactions purement réflexes empruntent une voie ainsi périphériquement dérivée. Pour la poursuite de notre analyse, c'est là une question que nous ne sommes pas obligés de trancher. Dans les deux cas, l'idée du sensori-moteur pur aura été expliquée par ce qui précède, que nous la trouvions ou non réalisée exactement.

[2] Voir la note à la page 76.

[3] Du moins, en général.

poisson; elle n'est cependant pas inscriptible dans un robot périphérique. Le « matériel conceptuel » du robot-alpha est uniquement représenté par les états et les changements d'états de l'organe enregistreur, chacun de ceux-ci intervenant individuellement.

Ainsi, un robot reste infiniment en deçà des exigences réelles. N'avons-nous fait qu'un schéma impossible à appliquer ? Non, car c'est en prévision de pareilles difficultés que nous avons adopté le principe de la poupée russe, le principe de l'adjonction nécessaire, inéluctable de la personne interne.

Examinons donc quels pourraient être le rôle et la position de la personne seconde ? Quelle serait sa réalité extérieure ? Quels seraient ses moyens d'information et d'action ? Rien ne l'atteint et rien n'émane d'elle qui ne passe à travers le robot-alpha. Elle n'a pas d'autre forme de connaissance que celle des changements d'états des enregistreurs, tels qu'ils viennent s'inscrire au registre P. Elle n'a pas d'autre forme d'action que celle des ordres à donner, tels qu'ils peuvent se ranger dans le registre G. Si donc, elle doit concevoir une notion telle que celle de proie (ou de cercle), c'est uniquement à partir au matériel sensoriel et moteur inscrit ou inscriptible dans ces deux registres qu'elle pourra y parvenir. Ces registres représentent en quelque sorte le monde de son expérience et de son activité.

Les choses ne se présentent-elles pas d'ailleurs de façon semblable pour une personne réelle ? L'esprit ne se trouve-t-il pas emprisonné étroitement dans un corps, comme l'est la personne seconde dans son robot ? Toute son information ne doit-elle pas passer par le segment sensoriel périphérique, et toute son activité ne se transmet-elle pas par le segment moteur périphérique ? L'analogie est frappante. Il est inutile de s'y attarder. Tentons plutôt de pousser en profondeur notre analyse schématique, ne serait-ce que d'un pas.

34. Le robot lambertien et la personne mathématicienne.

Le programme à suivre est tracé d'avance. Conformément au principe de la poupée russe, c'est maintenant la personne seconde que nous prendrons pour objet de notre analyse. Nous avons découvert la réalité intermédiaire où se situe son monde extérieur immédiat, réalité qui s'interpose entre elle et la réalité extérieure du robot-alpha. Mais de quels organes doit-elle être dotée pour pouvoir en prendre connaissance et pour y faire valoir ses intentions ?

Revenons au robot élémentaire de notre premier exemple. Sa tâche était bien délimitée : jeter un projectile sur tout objet franchissant la frontière de l'enceinte. Une organisation sensori-motrice-alpha suffisait pour en venir à bout. Imposons maintenant à ce robot une nouvelle consigne, franchement plus difficile à observer que la première : le jet du boulet devra cesser si la personne qui tente de franchir la frontière porte un fanion triangulaire; il devra reprendre

aussitôt que se présentera une personne portant un fanion en forme de disque. Le robot périphérique est-il organisé pour exécuter ces nouveaux ordres ? S'il peut reconnaître telle ou telle figure déterminée, ou quelque série bien déterminée de figures qu'on aurait d'avance confiée à sa « mémoire », il lui manque l'organe qui lui permettrait de reconnaître un triangle dans une figure dont le modèle exact (sous le rapport de la forme, de la grandeur et de la position) n'aurait pas été d'avance désigné au registre P.

Un esprit qui sait concevoir la forme du triangle n'a pas besoin d'avoir pris connaissance de tous les triangles pour en reconnaître un. Quelques cas particuliers lui suffiront pour entrer en possession du caractère typique qu'il saura distinguer dans tous les triangles. Tel que nous l'avons imaginé, notre robot est précisément dénué de cette faculté d'abstraire une forme du matériel sensoriel qu'il capte et transmet vers l'intérieur[1].

Le robot-alpha restera donc aveugle à sa nouvelle consigne. Si l'on exige que celle-ci soit tout de même observée, c'est à la personne-lambda qu'il faut la confier, c'est elle qui doit être chargée de la suivre.

La personne-lambda, avons-nous dit, doit être, elle aussi, soumise à l'analyse schématisante. Notre programme est audacieux : imaginer un second robot auquel la personne-lambda puisse remettre l'exécution de la consigne que nous venons de lui imposer, rechercher une fois de plus les conditions d'une obéissance automatique.

« Autant aller à la découverte de la caverne d'Ali-Baba, dira-t-on, pour y surprendre le mécanisme répondant au *Sésame ouvre-toi !* » — « Cette idée parait franchement absurde, répondrons-nous. Mais le conte ou le rêve ne sont parfois que le préambule du raisonnable. La montagne qui s'ouvre lorsqu'on lui murmure les mots-clefs est de l'ordre du fantastique; la porte bardée d'acier qui s'entrebâille pourvu qu'on ait prononcé la phrase efficace est de l'ordre des faits. La technique saurait mettre à notre service un dispositif réagissant, non pas au sens des mots, mais à un élément de forme contenu dans la succession des sons, un dispositif ouvrant les portes automatiquement, pourvu qu'on le lui

[1] Il n'y a là rien d'étonnant; de nombreuses expériences faites sur des blessés du cerveau ont clairement démontré que tous les éléments d'une totalité peuvent être distinctement perçus, sans que la totalité elle-même soit aperçue. La notion de *mot*, par exemple, ne se présente pas naturellement pour faire d'une suite de lettres davantage qu'une suite de lettres; un signe est enregistré, mais sa signification peut être oubliée. De même, les signaux sensoriels que l'œil transmet à propos d'un triangle ne portent pas encore avec eux, explicitée, l'idée du triangle.

Il serait d'ailleurs erroné de prétendre que le sensoriel ne comporte aucun élément de forme. De même que la lettre a sa forme avant d'intervenir comme élément constitutif d'un mot, un signal possède sa forme avant d'entrer comme élément dans la forme constituée du triangle. Comment faire la différence entre les formes élémentaires dont le sensoriel (ou le moteur) est doué et celles qui lui sont superposées ? Les premières sont déterminées (pour le sensoriel) par la nature de l'organe récepteur, par celle de la transmission et de la réception dans le registre P, en un mot par la façon dont fonctionne le segment sensoriel périphérique.

demande de la façon convenue. »

Cet exemple suffit, à lui seul, pour assurer en principe la possibilité de la réception de l'élément formel que le robot périphérique est impuissant à enregistrer. Mais il n'est pas indispensable de décrire la structure et le fonctionnement du radar, ou de quelque autre appareil capable de saisir le signal triangulaire et de le reconnaître pour tel. Il nous suffit de savoir que nous ne quittons pas la ligne du possible en imaginant un dispositif sensible à ce qu'on pourrait appeler les modulations du matériel sensoriel élémentaire, et apte à les manifester. Renonçons donc, pour l'instant, à examiner comment cette manifestation pourra elle-même prendre corps et forme, et demandons-nous plutôt comment le processus en question se traduit dans une conscience vivante. Ce que nous y désignons ainsi, c'est le royaume des formes, des sons et des mélodies, des couleurs et de leurs jeux, etc. C'est la forme concave et la forme convexe, la verticale, l'horizontale ou l'oblique, c'est la surface polie ou la surface rugueuse, c'est la forme de l'anneau ou celle du disque, celle de la règle ou celle de l'œuf; c'est le chant du merle, le clapotis de l'eau ou le roulement d'un char, c'est le reflet sur le lac, etc.

C'est, en un mot, tout ce que LAMBERT[1] désignait par l'expression : *der reale Schein*. Non pas l'apparence variable, fuyante, insaisissable du réel, mais les formes sous lesquelles le réel nous apparaît, sous lesquelles il prend pour nous la signification de réalité.

Considérons maintenant le segment périphérique moteur. Pouvons-nous concevoir ce que représenterait une *modulation* des états et des changements d'états inscriptibles au registre G ? La chose est toute simple : l'une quelconque de nos conduites naturelles, — faire un pas en avant, saisir un objet, suivre des yeux le vol d'un oiseau, — représente une forme motrice[2].

Nous savons que, dans l'être que nous sommes, la liaison entre les formes et les gestes se fait par leur incorporation commune dans l'espace et dans le temps. Mais dans le schéma que nous tentons d'esquisser, il est bien clair que ni l'espace, ni le temps ne sont des réalités extérieures données sans intermédiaire. Pour en être bien sûr, il suffit de remarquer que, si nous parlons de nous-même, c'est en tant que personne-lambda que nous intervenons. Or, celle-ci ne connaît la réalité qu'à travers l'écran du robot-alpha. L'espace et le temps constituent en quelque sorte la scène interne où se place notre horizon de réalité. Ils en sont à la fois le cadre, le médium et le théâtre. Par la façon dont nos représentations s'y insèrent, s'y joignent ou s'y distinguent, ce théâtre est

[1] C'est par allusion à l'initiale de LAMBERT que notre second robot porte le nom de *robot-lambda*.

[2] Insistons encore une fois sur le fait que, dans leur genèse, les formes de la sensation et les schémas de la motricité ne sont probablement pas concevables indépendamment les uns des autres. Cependant, eu égard à notre but, ce fait est ici sans conséquence.

un registre général des modulations possibles, de nos sensations aussi bien que de nos gestes. Plus exactement, il équivaut à un double registre et nous fournit ainsi le moyen d'associer la sensation et le geste.

C'est ainsi que les choses se présentent en nous, et que nous pouvons imaginer qu'elles se présentent pour la personne-lambda. Mais notre but était de confier à un robot la mission de joindre l'apparition de la forme triangulaire à l'exécution d'un geste, il est vrai encore peu modulé. Devons-nous renoncer à cette intention ?

Nullement. Imitons simplement ce que nous avons déjà fait une fois, en confiant au robot-alpha les registres P et G, entre lesquels des connexions adéquates avaient été établies. Remettons cette fois au robot-lambda le théâtre *schématisé* de notre horizon naturel de réalité. Le plus simple est de supposer que ce théâtre existe en deux exemplaires destinés, l'un à recevoir *les apparences réelles*, l'autre à présenter *les apparences du robot-lambda à sa personne interne*.

On pourrait chercher comment ce théâtre devrait être abstraitement constitué pour rendre les services que nous en attendons. Mais ce serait ici dépasser le but que nous nous proposons. Laissons-nous guider simplement par ce que nous savons de l'organisation de notre propre théâtre, *puisque nous en pouvons prendre conscience*, Donnons donc au mot théâtre une signification à la fois symbolique et concrète; ce sera le meilleur moyen d'y voir clair.

Nommons TP le théâtre où les modulations du sensoriel prendraient leur apparente réalité, et TG celui où les gestes seraient figurés. Pour que le robot-lambda soit constitué, il suffit maintenant d'admettre qu'une liaison ait été opérée entre telle ou telle apparition sur le théâtre TP et telle ou telle figuration sur le théâtre TG.

Si l'on suppose que le robot va se trouver devant une tâche déterminée[1], qu'il n'aura qu'à lier telle représentation déterminée à telle figuration également déterminée, on peut admettre qu'il se tirera d'affaire, même si l'exécution de son geste doit être contrôlée et guidée par ce qu'on lui demande.

Nous réserverons donc le qualificatif *sensori-moteur-lambda*[2] à un circuit

[1] Il ne peut être question ici d'un robot-lambda général, chargé de l'ensemble des réactions qui pourraient être coordonnées à l'ensemble de tous les signaux possibles; ni l'un, ni l'autre de ces ensembles n'existant par avance. Du fait même de sa construction, un robot-lambda ne saurait remplir qu'un ensemble de missions qui soient inscrites d'avance, comme *possibilités réalisables*, dans sa structure. Si donc il nous arrive de dire : le robot-lambda, qu'on veuille bien entendre qu'il s'agit toujours d'un robot quelconque relatif à la mission envisagée.

[2] Ce qualificatif n'est peut-être jamais applicable. Peut-être aucun des processus réels, par lesquels un être vivant réagit activement à une perception, ne correspond-il exactement et fidèlement à ce modèle ? Peut-être n'obtiendra-t-on jamais de schéma qui ne s'éloigne pas trop visiblement de la réalité qu'en intercalant dans le circuit la personne complémentaire que le principe directeur de notre analyse nous fait un devoir d'appeler à l'existence ? Peut-être même est-il indispensable de confier à la personne-mu le pouvoir de modifier par décret autonome, et dans une certaine

qui se formerait par l'intermédiaire d'un robot-lambda, Pour des raisons expliquées ci-dessous, nous appellerons la personne adjointe à un robot lambertien une *personne mathématicienne* ou une *personne-mu*.

35. RÔLE DE LA PERSONNE-MU. Dans la recherche de notre faculté d'intuition, nous avons déjà fait un assez long chemin. Nous avons dépouillé la personne-alpha au profit de deux robots successifs. Les fonctions dont nous les avons chargés ne pouvaient certainement pas être identifiées avec la prise de connaissance par intuition, que nous n'avons d'ailleurs jamais mise en doute. Si notre chemin devait être encore long, la perspective mentale que nous avons évoquée finirait certainement par s'obscurcir. Mais nous sommes tout près d'aboutir.

La mise en œuvre du principe de la poupée russe tendait précisément au but suivant : créer une situation bien claire à ce point précis de notre analyse. Nous avons payé d'un réel effort la faculté dont nous disposons maintenant d'opposer ou de réunir le robot porteur des formes à la personne qui s'en servira. Nous devions gagner la liberté de nuancer l'idée de la réalité extérieure, voire de la retoucher, la personne-mu trouvant dans les projections scéniques dont le robot-lambda est le théâtre la matière de sa réalité *immédiatement extérieure*.

C'est la composante-robot de notre être schématisé qui jusqu'ici a fait l'objet de cette étude. Il est temps de reporter notre attention sur la composante-personne. Voici l'instant où se pose la question décisive :

Quelle est la nature de la connaissance dont la personne-mu doit être capable ?

Dans la perspective que nous tentons d'ouvrir, les formes recueillies par le robot-lambda et présentées à la personne adjointe ne sont que des signes, des figurations d'événements dans lesquels robot et personne se trouvent engagés. Devons-nous admettre que la personne soit aussi consciente de ce fait ? Si la correspondance entre un événement et sa figuration est suffisamment étroite, il peut arriver que nous ne fassions aucune distinction entre eux. Ce que nous voyons projeté sur un écran cinématographique, par exemple, prend caractère de réalité authentique, le rôle intermédiaire des images projetées passant à l'arrière-plan de la conscience. Or, nous savons que l'écran n'est qu'un moyen : nous l'avons vu vide de toute image. La figuration réalisée par un robot est au

mesure, les connexions établies dans le robot-lambda entre les deux scènes où se projettent les apparences réelles.

Mais peut-être aussi, l'idée du circuit sensori-moteur-lambda rend-elle compte, jusqu'à un certain point, de l'existence de conduites instinctives aussi bien que de l'acquisition de certaines habitudes, de certains automatismes, et même de la constitution d'un certain genre de virtuosité. Dans notre langage de schématisation, nous dirons précisément que la personne-mu s'est déchargée de ces tâches sur un robot-lambda, et que, de ce fait même, leur exécution est soustraite à la conscience.

contraire la seule source d'information de la personne; elle est le moyen même de cette information. Il est donc tout indiqué d'admettre que pour la personne, la forme scénique représente la forme même de la réalité, aussi longtemps du moins que cette forme n'aura pas rencontré une antinomie de l'expérience.

Pour que le robot-lambda remplisse efficacement sa tâche, il doit pouvoir figurer le caractère, la forme dont tous les triangles se trouvent revêtus quelles que soient leurs dimensions et leur position dans l'espace où nous avons imaginé le robot. Cela revient à dire que la forme du triangle doit se trouver comme élément de connaissance immédiat dans le monde de la personne-mu. Pour que le robot-lambda ne soit pas inférieur à sa mission, il doit reconnaître et manifester le cercle chaque fois qu'un disque entre dans son horizon. Il faut que le cercle envisagé, non comme un disque matériel, mais comme la forme commune à tous les disques possibles, figure au nombre des réalités directement accessibles à la personne-mu.

Nous l'avons déjà dit, ces formes, qui se présentent à nous dans la perspective créée par notre analyse comme des apparences figurées, doivent se présenter à la personne-mu avec les caractères de la réalité. Leur réalité s'impose avec sa structure, avec ses lois, avec ses nécessités propres. Rien n'autorise à statuer arbitrairement que telles relations s'établissent entre elles plutôt que telles autres. Comme la scène a son optique, son atmosphère, sa réalité, et aussi ses figurants et ses accessoires, dans lesquels se rencontrent la fonction de réalité pour soi et celle de réalisation pour autre chose, le monde des formes se réalise, pour la personne-mu, avec ses caractères inaliénables.

Ainsi, il ne pourra se faire qu'il passe plus d'une droite par deux points (la droite et le point étant aussi des figures réelles, comme le triangle ou le cercle). Il n'arrivera jamais que deux cercles aient plus de deux points en commun. Jamais, il ne se présentera que deux cercles enlacés se séparent l'un de l'autre sans se traverser, etc.

La dénomination que nous avons choisie pour la personne complétant le robot lambertien s'explique maintenant : la personne-mu, c'est la *personne mathématicienne*, à laquelle la réalité apparaît sous l'angle géométrique, sous l'angle de la géométrie intuitive. La réponse à notre question s'énonce donc comme suit :

Considérée dans sa nature et non dans son objet, la connaissance dont la personne-mu est naturellement capable, c'est l'intuition formelle, la connaissance intuitive dans le royaume des formes pures[1].

[1] C'est à dessein que nous nous bornons à l'intuition géométrique spatiale. Mais nos explications resteraient valables aussi pour l'intuition arithmétique, pour une certaine intuition des couleurs, etc.

36. CONNAISSANCE ET GÉOMÉTRIE INTUITIVES. Dans ce qui précède, nous n'avons pas inventé un homme artificiel; nous nous sommes fait de l'homme normal une image schématique et simplificatrice, peut-être audacieusement schématique et brutalement simplificatrice.

L'analyse par robots et personnes adjointes ne fait que répondre, nous semble-t-il, aux exigences réunies d'une double connaissance de nous-mêmes : de la connaissance anatomique et physiologique de notre être somatique, d'une part; d'une connaissance mille fois éprouvée de notre être mental, d'autre part.

Tout ce travail de schématisation était-il nécessaire pour ce que nous avions en vue, c'est-à-dire pour reconnaître et décrire l'aspect intuitif de la géométrie, le rôle de l'intuition dans la géométrie ? Nous pensons qu'il n'est guère possible de s'en tirer à meilleur compte, car nous ne savons pas comment nous pourrions parler utilement de l'intuition en renonçant à la possibilité que nous avons maintenant acquise de faire intervenir séparément ou conjointement (à notre gré) le robot lambertien et la personne mathématicienne.

En géométrie, l'intuition est une prise de conscience d'une certaine connaissance de l'espace et des formes étendues. Nous y insistons; ce n'est pas seulement une connaissance implicite qui resterait inconsciente. Le rôle de l'intuition est de présenter cette connaissance au regard interne de la conscience. Il faut donc distinguer entre le contenu de la connaissance et ce qui la rend présente à l'esprit, entre ce qui sera saisi par l'intuition et la faculté qui saisit.

Dans notre schéma, les choses se présentent de la façon la plus simple. Les rôles se répartissent clairement entre le robot-lambda et la personne-mu. La faculté de connaître par intuition, de connaître d'un savoir sur lequel la réflexion puisse revenir et s'appuyer, c'est la personne-mu qui en est douée. Et l'objet sur lequel cette faculté doit s'exercer, la forme que la connaissance consciente doit épouser, c'est le robot-lambda qui en est le porteur. N'est-ce pas au robot que nous avons remis les registres des formes qui peuvent être projetées ou figurées sur les théâtres TP et TG ? Parmi les premières de ces formes se trouvent, par exemple, la forme sphérique ou celle de deux cercles enlacés. Mais d'innombrables autres formes s'y trouvent également.

Il faut opérer ici une distinction essentielle entre deux attitudes que la personne-mu peut adopter. Son intérêt peut se porter sur la réalité extérieure. Où rencontrera-t-elle celle-ci ? Cette réalité ne lui parvient qu'à travers le jeu des formes appartenant au théâtre TP. Dans leur jeu, ces formes comportent des significations, dont la personne-mu est juge et qui motivent son intervention; celle-ci se produit par l'intermédiaire d'une combinaison de formes de l'autre théâtre. Dans cette première attitude, la réalité des deux théâtres n'est point envisagée pour elle-même; elle n'est que signe et symbole d'une autre réalité.

Mais la personne peut aussi fixer son attention sur les formes elles-mêmes, indépendamment de toutes les significations extérieures que celles-ci pourraient

assumer. C'est dans cette seconde attitude que la personne-mu est mathématicienne. En particulier, lorsqu'elle se propose de ramener sa réflexion sur ces formes, pour apercevoir consciemment les rapports qui existent entre elles, pour organiser systématiquement la connaissance qu'elle en a, elle est géomètre.

C'est en examinant les « accessoires » du théâtre TP que la personne-mu y découvre la droite, le plan, le cercle, etc. C'est en les rapprochant l'un de l'autre qu'elle fait les constatations fondamentales sur lesquelles la géométrie s'est tout naturellement édifiée :

que le cercle partage le plan en deux régions, l'une formée de points qui lui sont intérieurs, et l'autre de points qui lui sont extérieurs,

que deux droites ne peuvent pas se rencontrer en plus d'un point, — et deux cercles en plus de deux points,

etc., etc.

En un mot, c'est en tant que personne-mu que nous concevons comme vraies, par intuition, toutes les propriétés géométriques dont l'évidence nous touche avant et en dehors de toute démonstration.

L'intuition géométrique reprend le jeu des formes spatiales pour l'organiser consciemment. C'est la faculté de se représenter ces formes (non la réalité elle-même) et leurs rapports.

De ce point de vue, il est relativement facile de distinguer les caractères que l'on s'accorde à conférer à la connaissance par intuition.

Elle porte avec elle son évidence. Cela veut dire simplement qu'elle se présente comme une réalité immédiate : la réalité intermédiaire (pour nous) des formes de l'intuition est la forme même de la réalité pour la personne-mu. Elle est évidente comme la lumière est évidente à celui qui la voit, la masse à celui qui la soupèse. Comment pourrait-elle être mise en doute, puisqu'elle ne fait que révéler la structure et l'arrangement de nos moyens de connaissance. C'est une connaissance interne, une connaissance primaire des formes sous lesquelles la réalité entre en nous.

Son évidence s'étend-elle à la réalité extérieure ? Celle-ci est à l'origine des signaux que nous captons (en tant que robots-alpha), mais nous ne la connaissons (en tant que personnes-mu) que par des indications indirectes merveilleusement cohérentes, du moins dans le cadre de nos activités naturelles. Il serait cependant aventureux d'étendre jusqu'à la réalité extérieure l'idée de l'évidence inconditionnelle : rien ne nous assure d'avance que cette évidence ne sera jamais contredite par une expérience élargie.

La connaissance par intuition est une connaissance à priori (chez l'adulte !), par quoi l'on entend dire qu'elle précède la connaissance par expérience ou du moins qu'elle n'est pas une conséquence de celle-ci. La chose s'explique presque d'elle-même.

La connaissance par expérience se sert des robots (alpha et lambda) comme

d'instruments. Pour que l'expérience soit possible, il faut que ces robots soient déjà constitués. En ce sens, la réalité interne de leur structure est antérieure à l'expérience : elle est à priori.

Bien plus, la constitution préalable des formes que pourra revêtir l'information venant de l'extérieur — formes sur lesquelles porte l'information intuitive — conditionne ce que peut être et ce que peut apporter l'expérience.

Il faut cependant remarquer que, chez l'homme, l'organisation du robot-lambda n'est pas innée. On peut suivre, chez le petit enfant, sa constitution progressive. Les choses semblent se passer comme si un habile mécanicien en établissait les connexions de façon à permettre un accord durable de l'activité sensorielle et de la motricité.

En particulier, il semble qu'il faille un développement de plusieurs années pour que la scène où les formes viennent se projeter soit complètement installée, c'est-à-dire pour que la représentation de l'espace et du temps ait atteint tout son développement.

Certaines expériences donnent à penser que des révisions restent encore possibles chez l'adulte, par exemple pour sauvegarder le jeu cohérent des formes et son efficacité vers l'extérieur, ou pour corriger les déformations accidentelles des appareils sensoriels ou des appareils moteurs.

La connaissance intuitive n'est pas nécessairement présente d'avance dans la conscience. Il semble qu'elle puisse et même qu'elle doive être gagnée par la contemplation des formes, qu'elle ait à être éveillée par certaines suggestions. Mais dès qu'elle se présente, elle s'impose avec nécessité.

Il n'est pas surprenant. qu'elle évoque un monde des « Idées », où la réalité serait à la fois vérité et nécessité. La connaissance vraie serait comme un souvenir de ce monde idéal, et mériterait qu'on en dise avec PLATON : « La recherche et le savoir ne sont au total que réminiscence[1]. »

En voie de constitution sous la pression de l'expérience, la connaissance par intuition présente certains traits de la connaissance par expérience; constituée, c'est *le Monde des Idées et des Formes* qu'elle paraît évoquer.

L'aspect expérimental

37. COMMENT RÉVÉLER L'ÉLÉMENT EXPÉRIMENTAL ?

L'analyse de l'aspect expérimental que présente la géométrie élémentaire va prendre une voie toute différente de celle que vient de suivre l'analyse de l'aspect intuitif. L'intuition et tout particulièrement l'intuition spatiale est une faculté de l'esprit. Etudier l'aspect intuitif de la géométrie revient à étudier dans quelle mesure la géométrie élémentaire répond à la structure de notre organisme.

[1] *Ménon*, 81 d.

Certes, nous sommes doués d'une faculté d'expérimenter et nous en dirons aussi quelques mots. Mais il ne servirait à rien de chercher à la spécifier comme nous l'avons fait pour l'intuition. Elle est d'ordre si général que nous ne trouverions pas grand'chose à dire concernant son emploi en géométrie, car ce n'est pas dans le cadre de cette science qu'elle revêt toute sa signification.

Comment mettre en évidence les caractères de *réalité* de la géométrie ? Par le fait lui-même, c'est-à-dire en en présentant une réalisation authentique. Ce sera ainsi par l'expérience elle-même que se dégagera l'aspect expérimental. Notre seule ressource est d'édifier la géométrie en discipline expérimentale.

D'autre part, une expérimentation peut se placer à différents niveaux; elle peut faire intervenir des instruments d'une haute précision, et mesurer des phénomènes qui échappent à nos organes naturels de connaissance; elle peut aussi ne mettre en œuvre que nos moyens de connaissance élémentaire. L'organisation expérimentale de la géométrie telle que nous l'envisageons restera au niveau de notre information naturelle.

Mais cela n'exclut pas qu'elle soit informée par avance de la connaissance que nous avons déjà de la géométrie élémentaire habituelle. Non seulement notre essai sera fondé sur la conception préalable des notions fondamentales, telles qu'elles sont et ne peuvent pas ne pas être dans notre connaissance intuitive; mais l'organisation de tout l'essai, la suite des démarches expérimentales à effectuer ne cessera pas d'être inspirée par le résultat à obtenir, résultat qui nous est connu d'avance.

38. RÉALISATION TECHNIQUE DES ÊTRES GÉOMÉTRIQUES FONDAMENTAUX.

Une discipline expérimentale ne consiste pas en des séries de mesures faites n'importe comment et sur n'importe quoi; la comparaison de mesures de cette sorte ne conduirait probablement jamais à rien. Ce qu'on prétend mesurer doit être conçu comme une certaine réalité du monde phénoménal, comme une réalité sur laquelle les manipulations qu'on effectue ont prise.

Pour que la géométrie assume l'aspect d'une discipline expérimentale, il faut donc en réaliser les notions et les êtres par des objets.

a) Le plan. — Comment matérialiser un plan ? Avons-nous d'avance une conception du plan qui s'y prête ? Chacun de nous ne se représente-t-il pas un plan réalisé de la façon suivante : *c'est une surface qui n'est nulle part concave et nulle part convexe*.

Or voici un procédé par lequel on peut fabriquer une surface polie réalisant cette idée avec un haut degré de perfection :

On dresse pour commencer trois surfaces métalliques approximativement planes : M, M_1, M_2. On applique M sur M_1, par exemple, et on les use l'une contre l'autre (on les rode l'une par l'autre) pendant un certain temps. On interrompt cette opération pour remplacer M_1 par M_2, et l'on use M et M_2 l'une par l'autre. On interrompt à nouveau cette opération pour user M_1 et M_2 l'une par l'autre, et ainsi de suite.

Si l'on prolonge suffisamment ce rodage alterné, on obtient trois surfaces lisses qui s'appliquent l'une sur l'autre de façon extraordinairement étroite, sans laisser entre elles aucun espace appréciable[1]. On les appelle des *marbres*.

Si l'on traite de la même façon un autre groupe de trois marbres, chacun de ces derniers jouit de la même propriété par rapport à chacun des premiers.

Le contact de deux marbres bien faits est si juste qu'il est très difficile de les séparer, si ce n'est en les faisant glisser l'un sur l'autre. Ce glissement peut d'ailleurs s'effectuer dans tous les sens.

En outre, on observera qu'un marbre ne peut reposer sur un autre marbre en trois endroits sans reposer intégralement[2] sur ce dernier.

Est-il nécessaire de partir de trois surfaces et de les traiter par un rodage alterné ? Deux ne pourraient-elles suffire ? Il faut observer que le rodage de deux surfaces l'une par l'autre ne conduit pas nécessairement à deux surfaces planes, se recouvrant très exactement l'une l'autre. Mais si l'on fait intervenir une troisième surface, aucun des trois marbres qu'on obtient ne peut être ni convexe, ni concave. Car, si M par exemple était concave, et si M_1 qui doit en épouser fidèlement la forme était convexe, il faudrait que M_2 fût convexe pour s'appliquer sur M, et concave pour s'appliquer sur M_1. La chose est impossible : il est bien évident qu'une surface ne peut être à la fois (au même endroit et du même côté) convexe et concave. Ainsi, en partant de trois surfaces au moins, le procédé du rodage alterné nous met en possession de trois *objets* réalisant avec un haut degré de perfection technique l'idée la plus naturelle d'un plan.

Le premier pas vers la constitution d'une géométrie expérimentale est ainsi fait; le second consistera à nous procurer un objet rectiligne.

b) La droite. — De quelle idée de la droite partirons-nous pour tenter cette réalisation ? La plus immédiate n'est-elle pas celle d'une ligne qui ne dévie, qui ne se courbe dans aucun sens, ni vers le haut, ni vers le bas, ni à droite, ni à gauche ? L'arête de rencontre de deux marbres répond sensiblement à ces

[1] Le qualificatif « appréciable » se rapporte à une observation minutieuse, à l'œil nu ou à la loupe.

[2] Le mot « intégralement » doit être interprété en tenant compte du fait qu'en général, deux marbres appliqués l'un sur l'autre ne se recouvrent pas exactement, surtout si on les fait glisser l'un sur l'autre; « intégralement » veut naturellement dire : « en tout endroit où l'un des marbres ne dépasse pas l'autre ».

exigences; on peut la placer devant l'œil de telle sorte que tous ses points tombent sur une même ligne de visée.

Il nous suffira donc d'appliquer une seconde fois, sur un marbre, la technique du rodage alterné; nous appellerons l'objet ainsi fabriqué un *coin* et son arête une *règle*.

Les règles et les marbres sont les premiers instruments permettant de faire des expériences géométriques.

c) Le point. — Il convient aussi de réaliser *l'endroit précis*, et le moyen de le désigner. Dans ce but, on se servira de la fine pointe d'une aiguille acérée. Nous appellerons un instrument de ce genre un *style*. Le lieu occupé par la pointe d'un style est, en réalisation, *un point*.

De la pointe d'un style, on pourra graver sur un marbre deux lignes très fines se coupant. L'endroit où elles se croisent désigne également un point.

39. Vérification expérimentale des propriétés de l'incidence et des déplacements.

Toutes les expériences qu'on peut faire avec les trois instruments indiqués, avec les styles, les règles et les marbres, mettent en évidence deux groupes de propriétés :

celles du premier groupe, les propriétés d'incidence, sont relatives au rapport de contenant à contenu qui sont possibles entre les trois premiers êtres géométriques que nous avons réalisés;

celles du second se rapportent à la liberté de déplacement dont ils jouissent dans les limites de leurs incidences réciproques.

Nous avons déjà indiqué les observations fondamentales auxquelles donnent lieu les rapports des marbres entre eux :

1° Deux marbres quelconques sont intégralement superposables.

Bien entendu, cette observation n'a pas été faite pour tous les marbres possibles. Elle a seulement été faite un assez grand nombre de fois, et jamais elle ne s'est trouvée en défaut. Lorsque nous affirmons que deux marbres quelconques sont superposables, nous formulons ici une loi générale que l'expérience rend très probable. En le faisant, nous restons strictement dans le cadre de la méthode expérimentale; c'est de la même façon que se prouvent ou que se vérifient les lois expérimentales de la physique, de la chimie, etc.

2° Deux marbres superposés peuvent glisser l'un sur l'autre dans tous les sens.

Les règles se prêtent à des observations analogues :

3° Deux règles quelconques sont intégralement superposables.

4° Deux règles restant superposées, l'une peut glisser le long de l'autre.

5° Deux règles ne peuvent se toucher en deux endroits différents sans se superposer.

Les marbres et les règles se prêtent ensemble à l'observation des lois suivantes :

6° Toute règle qui repose par deux points sur un marbre repose intégralement sur ce marbre.

7° Sans cesser de reposer intégralement sur un marbre, une règle peut être déplacée dans tous les sens.

Etc., etc.

Toute une série d'expériences semblables peuvent être effectuées; elles sont très simples, très élémentaires; ce n'en sont pas moins de vraies expériences.

Ces deux groupes de propriétés ne forment qu'une première assise géométrique. Notre procédé de rodage va nous permettre de les compléter par l'introduction d'un nouvel instrument : le coin droit.

40. LA NOTION DE PERPENDICULARITÉ : COINS DROITS ET TRIRECTANGLES. *a)* Coins droits. — Supposons qu'au lieu de dresser trois surfaces à peu près planes, on ait commencé par établir trois blocs métalliques ayant approximativement la forme de parallélipipèdes rectangles. Nous les nommerons A, B, C, en désignant respectivement leurs faces consécutives par α_1, α_2,... α_6; β_1, β_2,... β_6; γ_1, γ_2,... γ_6 (fig. 3).

Trois de ces faces (α_1, β_1 et γ_1 par exemple) pourront être traitées comme nous venons de l'expliquer. Supposons donc que ce soient déjà des marbres bien faits et passons au rodage des faces α_2, β_2 et γ_2. Nous prendrons ici une précaution supplémentaire : pendant leur rodage alterné, les faces α_1 β_1 et γ_1 resteront en contact avec quelque autre marbre dont on disposerait déjà.

De cette façon, on finit par obtenir trois coins limités respectivement par les faces α_1 et α_2, β_1 et β_2, γ_1 et γ_2. De quelles propriétés privilégiées les précautions supplémentaires que nous avons prises les auront-elles dotées ?

Pour répondre à cette question, faisons reposer le coin A par sa face α_1 sur un marbre que rien ne nous empêche de supposer horizontal. Si A était un coin quelconque (un coin oblique), il pourrait arriver que la face α_2, descendît en plan incliné vers la surface du marbre et forme avec elle un angle rentrant. Le coin B devrait s'introduire exactement dans l'angle obtenu, touchant le marbre par sa face β_1 et la face α_2, par sa face β_2. Celle-ci descendrait donc en surplomb vers le marbre. Quant au coin C, il devrait pouvoir prendre la place de B par rapport à A, et la place de A par rapport à B. Sa face γ_2, devrait donc descendre vers le marbre la première fois en plan incliné et la seconde fois en surplomb. La chose est impossible, car il est bien évident qu'une surface ne peut être à la fois en surplomb et en talus.

C'est donc que les trois coins A, B et C sont *droits*.

Par rapport à la face α_1, par exemple, la face α_2, réalise l'idée que nous

nous formons le plus naturellement d'un plan vertical, qui n'est incliné dans aucun sens.

Les coins droits peuvent maintenant entrer dans notre technique expérimentale. On observera que l'angle existant entre le marbre de base et la face α_2 dans lequel les coins B et C s'insèrent parfaitement, peut être exactement occupé par tout autre coin droit fabriqué de façon analogue. On pourra donc énoncer le résultat suivant, obtenu à la fois par construction et observation : tous les coins droits sont congruents.

b) Coins trirectangles. — On peut imaginer un système de rodage encore plus compliqué, aboutissant à la fabrication de coins triplement droits. Désignons par R_{12} le rodage que nous avons décrit, et qui est un rodage mutuel de α_2, β_2, γ_2, les faces α_1, β_1, γ_1 glissant sur un marbre auxiliaire. Ce qu'on entend par R_{13}, R_{23},... n'a pas besoin d'être expliqué.

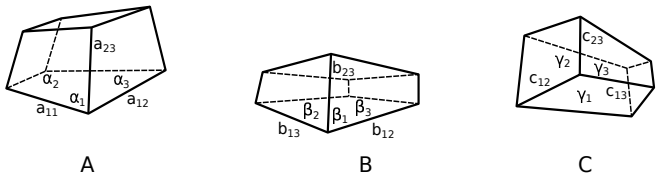


FIG. 3

Supposons que les coins A, B et C (fig. 3) aient subi les rodages R_{12} et R_{13}. Seuls les coins d'arêtes a_{23}, b_{23}, c_{23} ne sont pas droits. Effectuons donc R_{23}. Si nous supposons que les faces qui restent au contact du marbre auxiliaire ne s'usent pas, les angles d'arêtes a_{12}, b_{12}, c_{12} resteront droits. Mais rien ne nous assure qu'il en est de même des angles d'arêtes a_{13}, b_{13}, c_{13}. Nous devrons donc reprendre le rodage R_{13}, puis à nouveau R_{23}, etc.

Pour tenir compte de l'usure éventuelle des faces qui sont au contact du marbre auxiliaire, nous utiliserons un procédé plus symétrique : interruption et reprise alternées assez rapides des rodages R_{12}, R_{23}, R_{31}.

c) Coins orientés. — La fabrication des coins trirectangles permet de mettre en évidence la propriété fondamentale des coins orientés.

Remarquons, en effet, qu'au début des opérations précédentes, nous avons dû faire un choix; nous pouvions roder les faces α_3 et β_3, A et B glissant sur le marbre D par leurs faces α_1 et β_1, en ayant les deux faces α_2 et β_2 devant nous, ou en ayant α_2 devant et β_2 derrière nous. Nous avions ainsi la possibilité de construire deux blocs trirectangles A et B d'orientations différentes (dans la première éventualité), ou de même orientation (dans la deuxième éventualité).

Dans l'éventualité d'orientations différentes, on pourra mettre en contact les arêtes a_{13} et b_{13}, a_{23} et b_{23}; par contre, a_{12} et b_{12} seront dans le prolongement l'une de l'autre.

Si A et C se trouvent rodés dans les mêmes conditions, il s'ensuit que B et C sont congruents. Donc, tous les blocs trirectangles B, C... dont l'orientation diffère de celle de A ont la même orientation. Et rien ne nous empêche de réaliser d'autres exemplaires de blocs possédant la même orientation que A. Chacun d'eux peut prendre la place de A dans la confection des blocs orientés comme B. Ainsi tous les blocs de même orientation sont congruents, mais deux blocs quelconques d'orientations différentes ne le sont pas, ayant toujours une paire d'arêtes placées dans le prolongement l'une de l'autre lorsque les deux autres paires sont superposées.

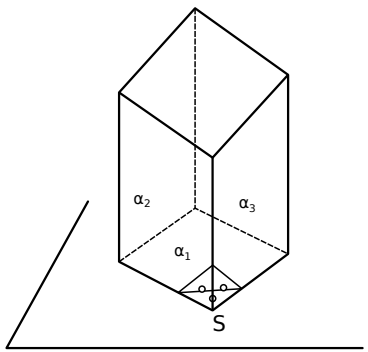


FIG. 4

d) La perpendiculaire. — Supposons que les faces a_1, a_2, a_3 d'un coin trirectangle se rencontrent au sommet S et que ce coin (ou ce bloc) repose par sa face a_1 sur un marbre quelconque (fig. 4). La règle où se rencontrent les faces a_2, et a_3 réalise alors l'idée de la verticale, ou de la perpendiculaire. Les instruments dont nous disposons permettraient à nouveau d'étendre le champ de notre expérimentation : celui-ci comprendrait tout le groupe des propriétés de perpendicularité ou d'orthogonalité des droites et des plans, à côté des propriétés d'incidence dont il a déjà été question.

Par exemple, on pourrait chercher à mettre en contact les deux arêtes verticales de deux coins trirectangles reposant chacun par une face sur un marbre quelconque : on observerait que l'on ne peut les faire se toucher en un endroit sans qu'elles entrent intégralement en contact (fig. 5). Cette expérience aurait la signification suivante :

par un point, on ne peut mener qu'une verticale, n'élever qu'une perpendiculaire à un marbre.

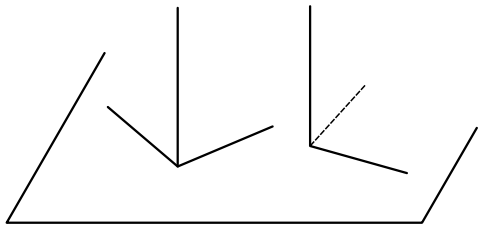


FIG. 5

D'autres expériences pourraient être faites concernant la rotation des coins trirectangles autour de leurs arêtes prises comme axes de rotation, ou relatives aux propriétés de superposition de ces coins entre eux.

41. LE PARALLÉLISME. L'une des expériences qui pourraient encore être faites aurait un intérêt théorique particulier pour la suite de notre étude. Il s'agit de la possibilité de fabriquer un bloc rectangle, en partant d'un parallélipipède rectangle à peu près ébauché. Il est visible que si l'on a rendu les quatre coins A, B, C, E, — dont trois, et trois seulement, appartiennent à une même face, — du bloc ABCDEFGH tous triplement droits (fig. 6), la forme du corps entier est d'ores et déjà déterminée. Nous ne sommes plus libres, à ce moment-là, de retoucher les coins restants D, F, G, H. Ceux-ci sont-ils aussi trirectangles ? C'est une expérience à faire. Quel en serait le résultat ?

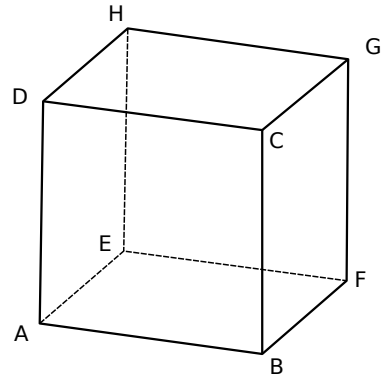


FIG. 6

On constaterait que, pour les blocs dont les dimensions restent dans les limites de nos procédés de fabrication, ces coins sont tous sensiblement trirectangles.

Sur la foi de ces observations, nous pourrions parler de marbres et de règles parallèles :

seraient dits parallèles, deux marbres formant deux faces opposées d'un marbre partout droit, et deux règles telles que les arêtes AD et BC ou AD et EH.

Le champ de notre expérimentation serait déjà fort étendu et des manipulations fort diverses y seraient possibles. On remarquera que nous n'y avons pas encore introduit d'unité de mesure ni d'instruments propres à mesurer.

Il nous suffirait d'un instrument capable de saisir et de reporter les longueurs (tel que le compas), d'un instrument susceptible d'un emploi analogue pour les angles, d'une échelle rectiligne des longueurs et d'une échelle circulaire des ouvertures angulaires. La géométrie entière entrerait alors dans le champ de notre technique expérimentale. On pourrait vérifier :

qu'entre deux points, la règle est plus courte que la ligne brisée,

que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique,

etc., etc.

Nous pourrions nous arrêter ici, si notre but se réduisait à montrer que la géométrie peut être traitée comme une discipline expérimentale. Dès maintenant la chose est claire. Nous aurons cependant encore recours à deux expériences afin de faciliter les commentaires qui devront suivre.

42. VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE DEUX PROPOSITIONS. Proposons-nous d'abord de vérifier que *la somme* $\alpha + \beta + \gamma$ *des trois angles d'un triangle quelconque vaut un angle plat*.

Imaginons le triangle ABC réalisé en trois exemplaires égaux, par exemple à l'aide de trois fois trois réglettes ajustées en A, B et C. (L'égalité de ces trois exemplaires entre eux peut être vérifiée par superposition.)

Plaçons le premier exemplaire sur un marbre, dans la position ABC; juxtaposons-lui le second exemplaire dans la position CBA′ qu'on obtient en faisant tourner ABC d'un demi-tour autour du milieu L de BC; et plaçons le troisième exemplaire dans la position A′BC″, obtenue à partir de CBA′ par une nouvelle rotation d'un demi-tour autour du milieu M de A′B (fig. 7).

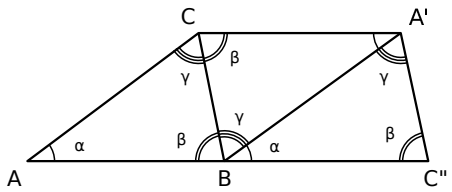


FIG. 7

En B, les trois angles α, β, γ se trouvent maintenant juxtaposés. Il suffit de constater qu'une règle peut s'appliquer à la fois sur les côtés AB et BC″ pour être assuré que la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat.

Vérifions maintenant la proposition sur laquelle LEGENDRE[1] s'appuie pour démontrer le postulat d'EUCLIDE :

par un point situé à l'intérieur d'un angle, on peut toujours mener une droite qui coupe les deux côtés de l'angle.

Supposons les côtés de l'angle réalisés par deux règles, et le point par le pivot P d'une lunette (fig. 8).

Dirigeons la lunette sur le point O, sommet de l'angle, puis suivons avec elle un point A s'éloignant de 0 sur le premier côté de l'angle. Faisons de même sur l'autre côté pour un point B.

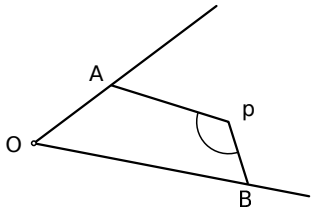


FIG. 8

Il suffira de constater que l'angle O entre les lignes de visée PA et PB, qui est nul si A et B sont au point O, peut dépasser deux droits. En effet, la droite PA coupe le côté OB comme le côté OA. Pour être concluante, l'expérience devra être répétée pour différents points, spécialement pour des points éloignés.

[1] *Éléments de géométrie*, avec des notes, Paris, 14e édition. Didot, 1851, p. 280.

43. L'INTENTION EXPÉRIMENTALE. Nous n'avons pas l'intention de faire une revue complète de tous les aspects sous lesquels la géométrie peut être envisagée comme discipline expérimentale. Nous avons donné la préférence à une réalisation matérielle, par l'intermédiaire de laquelle l'expérimentation se réduit à des manipulations et à des mesures effectuées sur des objets fabriqués avec un soin particulier. Mais nous aurions également pu faire usage, comme dans la vérification de la proposition de LEGENDRE, d'une technique optique où la ligne droite se serait trouvée réalisée par une ligne de visée. Les conclusions seraient restées les mêmes.

a) La géométrie, chapitre de la physique expérimentale. — Les procédés de fabrication des marbres, des règles, des coins droits n'ont pas été imaginés au hasard. Ils nous ont été suggérés par certaines idées que nous avons tout naturellement du point, de la droite, du plan, de la perpendiculaire, etc. Ces idées forment un certain fond de connaissance, dont tout homme normal dispose sans qu'il y prenne garde, sans qu'il y attache spécialement son attention ou sa volonté. Par ces idées, s'exprime précisément l'intuition spatiale, connaissance intuitive de l'espace, des formes et des possibilités de déplacer les objets. Nos procédés techniques n'ont pas pour but de créer cette connaissance de toutes pièces, ni même de fabriquer des formes nouvelles; ils doivent réaliser aussi parfaitement que possible les idées intuitives qui étaient déjà en notre possession.

Ainsi, toute notre technique expérimentale se fonde sur un certain ensemble de vues intuitives qui l'inspirent, l'orientent et la guident. La technique s'empare à son tour de ces intuitions, les précise, les prolonge et les engage dans les vérifications compliquées et exigeantes qui caractérisent la connaissance scientifique des phénomènes naturels.

Sous cet aspect, la géométrie n'est qu'un chapitre de la *physique expérimentale*. Chaque théorème qu'on y vérifie prend la signification d'une loi valable dans le monde physique, la signification d'une loi naturelle.

b) La géométrie, technique de mesure approximative. — Quel est le degré de vérité des énoncés que notre technique expérimentale permet de contrôler, de vérifier ? La réponse à cette question est celle qui convient en principe à toute connaissance expérimentale. Tout système de manipulations et de mesures comporte une marge d'erreur. Celle-ci dépend des phénomènes observés, des instruments et des expérimentateurs. Tout résultat d'observation se trouve ainsi frangé d'une zone d'indétermination. Selon les cas, celle-ci peut être plus ou moins large. Sa largeur caractérise, qualifie (en principe inévitablement) la technique en question.

Il n'en est pas autrement dans notre cas. Aussi la constatation qu'il existe des blocs partout rectangles est-elle à considérer seulement comme approximative, et même à double titre.

Tout d'abord, étant donnée l'imperfection inévitable des *réalisations* avec lesquelles on opère, cet énoncé signifie qu'il existe des blocs qui ne diffèrent d'un bloc partout rectangle que dans une mesure inappréciable par la technique mise en œuvre, c'est-à-dire que de quantités inférieures à la marge d'erreur correspondante.

D'autre part, les blocs soumis à nos mesures ne pourront dépasser certaines dimensions, au delà desquelles il nous serait matériellement impossible de les fabriquer et de les manipuler. Il pourrait donc arriver que notre énoncé cessât d'être valable pour des blocs de plus en plus grands.

Pour la première des deux vérifications expérimentales que nous avons décrites au numéro précédent, ces deux remarques conservent toute leur valeur. L'énoncé expérimental : *la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat* est soit entaché d'une inévitable imprécision, pour les triangles que nous savons réaliser, soit entaché d'extrapolation pour les triangles que nous ne pouvons pas réaliser.

Pour la seconde de ces vérifications, c'est particulièrement le second de ces caractères d'imprécision qu'il faut souligner.

L'énoncé : *par tout point d'un angle on peut mener une droite coupant les deux côtés de cet angle* ne peut pas être considéré comme expérimentalement vérifié pour les endroits qui nous seraient techniquement inaccessibles.

L'existence de la marge d'imprécision inhérente à toute technique de mesure prend une signification de principe pour tout un secteur de la géométrie. Par exemple, l'observation ne pourra jamais démontrer à elle seule que le rapport de la diagonale au côté d'un carré n'est pas rationnel (que la diagonale et le côté sont incommensurables). Ne pouvant apprécier ce rapport qu'approximativement, elle n'aura jamais le droit d'en poser la valeur égale à $\sqrt{2}$. Cette valeur s'accompagne d'une frange d'indétermination de largeur finie, à l'intérieur de laquelle le rationnel et l'irrationnel trouvent place tous les deux.

Il en est de même pour ce qui concerne la continuité et les propriétés limites; l'observation pure ne peut les déceler; elle ne peut les serrer d'assez près.

c) La géométrie, collection de résultats indépendants. — Un troisième point doit être souligné : les résultats d'observation sont admis, sont même à admettre, indépendamment les uns des autres. Reprenons par exemple les énoncés suivants :

il existe des blocs partout rectangles;

la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat;

par tout point d'un angle, il passe au moins une droite coupant les deux côtés de l'angle.

Tous trois sont accessibles à l'observation, dans les limites que nous venons de préciser. Les trois expériences servant à les vérifier peuvent être faites isolément, chacune pour soi; l'une quelconque peut être montée et effectuée sans tenir compte du résultat des deux autres.

Du point de vue du pur expérimentateur, de l'expérimentateur qui veut faire jouer l'observation dans toute la mesure du possible, il n'y a pas à se demander si l'une de ces trois observations rend les autres superflues; si le résultat de l'une entraîne le résultat des autres. L'expérimentateur rigoureux peut se dispenser de l'effort d'imagination et de réflexion qui réussirait peut-être à établir un lien de nécessité entre les résultats de ces trois séries d'observation. Les trois énoncés, une fois vérifiés, peuvent venir se placer dans sa perspective scientifique comme trois lois isolées, valables séparément. Il peut juger superflu (et même gênant) le souci, essentiel pour le théoricien, de savoir jusqu'à quel point elles sont dépendantes ou indépendantes les unes des autres. Pour lui, elles sont *empiriquement* indépendantes.

Les remarques qui précèdent ne suffisent pas pour caractériser une *méthode expérimentale*; elles ne servent qu'à préciser comment, et dans quelle mesure, la géométrie élémentaire peut être envisagée comme une discipline expérimentale.

La conclusion s'impose d'elle-même.

Si l'on y attachait quelque importance, la géométrie pourrait être présentée comme un chapitre élémentaire de physique expérimentale. Le lien rationnel entre les différents théorèmes pourrait être passé sous silence, chaque théorème étant considéré comme une propriété, une loi naturelle à vérifier par l'expérience. Ainsi, l'aspect expérimental de la géométrie se trouverait mis en pleine lumière.

L'aspect théorique

44. L'INTENTION THÉORIQUE. Nous avons souligné deux aspects de la connaissance de l'espace et des formes étendues. D'une part, cette connaissance présente un caractère intuitif inséparable de notre vision même du monde extérieur. D'autre part, la géométrie peut être traitée comme une discipline expérimentale, plus précisément comme un chapitre très simple de physique expérimentale. Et pourtant, il existe fort peu de traités de géométrie, dans lesquels l'un ou l'autre de ces deux aspects se trouve spécialement mis en évidence. C'est au contraire sur l'aspect rationnel ou théorique qu'on cherche presque toujours à mettre l'accent. Tout l'effort tend à soustraire la pensée géométrique à la juridiction de l'intuition non analysée, à la retirer du domaine de l'expérimentation matérielle et de la réalisation technique.

Examinons maintenant cet aspect rationnel, sans d'ailleurs nous y arrêter longuement. Ce n'est en effet qu'au chapitre suivant qu'une analyse plus approfondie deviendra nécessaire.

Sait-on d'avance, de façon certaine et claire, ce qu'est une discipline

purement rationnelle ? Saurions-nous en donner une définition ? Celle que voici, par exemple, est-elle admissible : une discipline purement rationnelle est une discipline dont tous les termes ont été légitimement définis et dont les résultats s'obtiennent par le seul exercice du raisonnement.

De deux choses l'une :

Ou bien cette définition est exacte et, dans ce cas, la géométrie n'y satisfait pas. Nous ne possédons des termes géométriques fondamentaux (du point, de la droite, etc.) aucune définition dont nous puissions savoir d'avance qu'elle est légitime. Notre enquête sur la doctrine préalable a mis ce point en évidence. Ce n'est pas par des définitions correctes et exhaustives que les notions primitives sont introduites. Nous reviendrons tout à l'heure sur la façon dont on les suggère.

Ou bien la géométrie peut être constituée en discipline rationnelle, et la définition précédente est fausse.

Laquelle de ces éventualités devons-nous retenir ? La seconde, naturellement. Il n'est pas contestable que la géométrie se présente aussi comme une science théorique. Ce qui est douteux, c'est qu'on puisse jamais donner une définition complète et définitive de ce qui fait le caractère théorique d'une discipline quelconque. Aussi, remettant à plus tard une étude plus exigeante et plus systématique, nous contenterons-nous ici de souligner quelques traits par lesquels une discipline rationnelle se distingue et s'écarte sensiblement d'une discipline expérimentale ou d'un ensemble de jugements intuitifs.

Revenons d'abord sur l'attitude expérimentale. Un expérimentateur ne manipule pas au petit bonheur des instruments construits sans aucune intention; les mesures qu'il effectue ne sont ni arbitraires, ni gratuites. Elles sont orientées et guidées par un certain ensemble de vues et de représentations préalables concernant les phénomènes soumis à la recherche. Les actes de l'expérimentateur ne sauraient être séparés de la réflexion qui les inspire et en apprécie la portée et la signification.

Cependant, ce n'est pas le jeu plus ou moins autonome des pensées de l'observateur qui forme le moment spécifique de l'expérience. L'attention de celui qui expérimente ne se retourne pas sur elle-même; elle se porte au contraire vers les réalités du secteur phénoménal observé. Cet expérimentateur n'invente pas les questions qu'il tient à poser, du moins pas de toutes pièces; ce n'est pas à lui-même qu'il les adresse; quant aux réponses qu'il reçoit, ce n'est pas lui qui les imagine. Questions et réponses se rapportent à un monde phénoménal qui se révèle indépendant de la conscience de l'observateur.

L'expérience est en quelque sorte un dialogue entre deux personnages irréductiblement différents l'un de l'autre : l'expérimentateur questionne, la nature répond. Toute expérience est une question que l'homme pose à la nature; toute mesure est une réponse que la nature concède à l'homme.

Ce dialogue est particulièrement clair en physique; il l'est moins en biologie expérimentale; moins encore en psychologie expérimentale, lorsque l'expérimentateur se prend lui-même comme objet de son expérience. Cependant, lorsqu'il adopte une attitude réflexive, celui qui observe opère sur deux plans : sur l'un d'eux, sa pensée prend le caractère d'une réalité extérieure qu'il n'est pas maître de retoucher à sa guise.

Face à ces caractères de la méthode expérimentale, comment définir l'intention du théoricien ? Sa préoccupation fondamentale est de formuler à lui seul, de sa propre autorité, les questions et les réponses, de réunir en une seule conscience les deux personnages du dialogue expérimental, d'assumer les deux rôles avec une égale légitimité. Certes, les questions qu'il pose ne visent pas nécessairement un autre monde que celui auquel l'expérimentateur s'intéresse, et ses réponses peuvent aussi y prendre leur signification. Mais il entend répondre lui-même, par ses propres moyens.

La science théorique qui réaliserait parfaitement cette intention serait un monologue éternel : le théoricien y parlerait à la fois pour l'homme et pour la nature. Mais cet idéal est-il pleinement réalisable ? Rien, pour l'instant, ne nous oblige à l'admettre. Rien, par la suite, ne nous y autorisera.

45. Insertion du moment théorique : deux exemples.

Telle est l'intention qui anime le théoricien; comment se réalise-t-elle ? Deux exemples, d'une simplicité concertée, vont le faire saisir.

Comptant les billes contenues dans un sac, on en trouve 53; puis, comptant celles d'un second sac, on en trouve 67. Supposons qu'on vide les deux sacs dans un troisième, et demandons le nombre de billes contenues dans ce troisième sac.

La réponse à une question aussi simple peut-elle donner lieu à une remarque de quelque valeur ?

Chargeons un partisan intransigeant de la méthode expérimentale de nous la donner. « Il n'y a, dira-t-il, pas à hésiter sur la méthode à suivre. Comptons tout simplement les billes que le troisième sac contient et nous en aurons le cœur net. »

Recueillons maintenant l'avis d'un partisan des méthodes théoriques. « Pourquoi prendre la peine de compter toutes ces billes une à une ? fera-t-il observer avec une. nuance de mépris. Ne suffit-il pas d'additionner 53 et 67 ? La somme de ces deux nombres vaut 120. C'est le nombre des billes contenues dans le troisième sac. »

Ces deux façons de faire sont toutes proches l'une de l'autre. Et pourtant, elles ne sont pas en tous points pareilles. Le résultat de la première se présente comme une réponse fournie par l'expérience (dans le cadre technique de la pure énumération des objets un à un). La seconde nécessite une opération arithméti-

que et, comme telle, hétérogène aux données du problème. Cette opération constitue un moment théorique tout simple, mais indéniable, qui vient s'insérer dans l'expérience. Ici, la réponse est le fait de l'arithméticien qui a posé

$$53 + 67 = 120,$$

sans s'occuper de savoir si ces nombres devraient représenter des billes, des jours ou des pas.

Choisissons comme second exemple le théorème déjà considéré :
les trois angles d'un triangle ABC forment ensemble un angle plat.

Remettons le soin de vérifier cette proposition à un pur observateur. Il procédera probablement comme nous l'avons exposé au numéro 42.

Un géomètre moins soucieux de ne faire aucune concession à l'intention théorique aurait pu procéder de la façon suivante : Ayant mesuré sur le triangle ABC chacun des angles α, β et γ, il aurait additionné les résultats de ces trois opérations et constaté, — avec la marge d'approximation correspondant à la précision de ses mesures, — que leur somme est égale à 180 degrés.

Entre les deux procédés envisagés dans ce second exemple, il y a la même différence qu'entre les deux procédés du premier; cette différence, sur laquelle on a pris l'habitude de passer comme si elle était insignifiante, reprend toute sa valeur, pour peu qu'on y réfléchisse. Dans le premier procédé, la réponse ne peut provenir que d'une expérience à faire. Par l'intermédiaire de la règle, c'est la réalité extérieure qui répond par oui ou par non, selon que la règle vient ou ne vient pas s'appliquer en même temps sur les deux côtés AC et BC″ (fig. 7). Au contraire, dans le second procédé, la vérification essentielle est du ressort de l'arithméticien qui formule un jugement de sa propre autorité. Ici aussi, l'intervention du calcul représente un moment théorique, complètement absent du procédé purement expérimental.

46. PREMIER ESSAI DE SPÉCIFICATION DU THÉORIQUE.

Nous demandions tout à l'heure comment se réalise l'intention théorique. Les deux exemples précédents comportent les éléments d'une première réponse. Dans leur extrême simplicité, ils permettent déjà de préciser quelques traits essentiels.

Dans le premier exemple, le théoricien ne tient aucun compte de la nature ni de la forme des billes en question. Ce sont pour lui des objets quelconques. Il opère sur une idée abstraite de l'objet. Peu lui importe aussi que les billes soient contenues dans des sacs ou dans des coupes ou dans toute autre sorte de récipients : il.remplace leur réunion dans un seul récipient par une opération abstraite sur deux ensembles d'objets quelconques, leur réunion en un seul ensemble, cette réunion se traduisant par l'addition de deux nombres entiers.

Dans le second exemple, le théoricien remplace également l'extension réelle

de chacun des angles par un caractère abstrait, par sa grandeur exprimée en degrés. Et il substitue à la réunion concrète des trois angles par juxtaposition une opération abstraite, portant sur les grandeurs de ces angles : leur addition.

Dans les deux cas, le théoricien imagine des équivalents abstraits aussi bien pour les réalités concrètes de l'expérimentateur que pour les opérations que celui-ci effectue. Et sur ce point, nos deux exemples ne font que mettre en évidence un caractère général, inhérent à tout essai théorique. Le théoricien ne réalise pas, comme le fait l'expérimentateur, ses questions par des appareils destinés à capter une énergie, à manifester une impulsion, etc. Le lieu de son expérience — car il expérimente lui aussi — n'est plus le monde des phénomènes physiques, mais la scène de sa propre pensée. Séduit par son expérimentation intérieure, il peut lui arriver d'oublier le monde extérieur sur lequel elle s'appuie. Dans tous les cas, même lorsqu'il ne cesse pas de viser consciemment la réalité phénoménale, il commence par la transcrire en termes abstraits, en représentations et en signes issus de son engagement dans le réel, mais plus ou moins dus à sa propre initiative. C'est avec ce matériel mental ou figuré qu'il entend expérimenter, c'est-à-dire raisonner, déduire, calculer...

Nous voyons ainsi se manifester deux attitudes contraires, deux intentions antagonistes et complémentaires. L'intention expérimentale tend à pousser le partenaire nature au premier plan, à exiger de lui toutes les indications, toutes les décisions. À l'extrême, cette intention s'incarnerait dans l'expérimentateur exclusif, pour qui jamais la liaison de deux faits par le raisonnement n'aurait de force contraignante. Pour cet observateur, la science n'existerait pas; la connaissance se réduirait à une poussière amorphe de faits constatés ou vérifiés. L'intention théorique tend, au contraire, à réduire le rôle de ce partenaire, porteur d'une vérité venue d'ailleurs. Elle cherche à lui substituer, dans toute la mesure du possible, l'exercice autonome de nos facultés mentales.

Cette explication du théorique rejoint le sens actuel du terme. L'étymologie nous aurait conduit sur une tout autre piste. Aux premiers pas de la connaissance scientifique, le savoir théorique était celui qui s'acquiert par l'attention contemplative, peut-être même par une contemplation méditative tournée vers les sources de notre connaissance intime[1]. L'attitude théorique ainsi conçue s'oppose à l'attitude pratique qui engage l'homme vers les activités extérieures. En suivant cette voie, c'est donc plutôt à la connaissance intuitive que nous aurions abouti.

Quelles seront les règles de la discipline mentale qui, traitant les termes abstraits, arrivera à les lier, à les coordonner, à les structurer parallèlement aux liaisons, aux coordinations et aux structures que l'intention expérimentale

[1] *Théôrein* signifie en effet contempler.

prétend simplement constater ou vérifier ? Nos deux premiers exemples ne nous permettent pas encore de les distinguer : c'est là l'inconvénient de leur extrême simplicité. C'est pourquoi nous ne pourrons nous passer d'un troisième exemple plus circonstancié. En revanche, il est un autre point que ces deux exemples mettent parfaitement en lumière.

Il s'agit de savoir si l'ensemble de nos connaissances se partage en secteurs nettement distincts, en secteurs purement théorique, purement expérimental et purement intuitif. Il s'agit de reconnaître si, pour être mises à exécution, l'intention théorique et l'intention expérimentale s'adressent à des « mondes » radicalement séparés, l'intention théorique ne se réalisant que dans un monde abstrait uniquement soumis à la juridiction de la raison et l'intention expérimentale ne trouvant son efficacité qu'en prenant possession sans compromis du monde des réalités concrètes. En un mot, les trois aspects de la géométrie se constituent-ils indépendamment les uns des autres ?

Les exemples précédents ont été précisément choisis pour élucider ce point sans équivoque. Dans l'un et dans l'autre, un moment théorique vient s'insérer dans un cadre expérimental. Mais, quant à l'essentiel, l'intention expérimentale subsiste. En un moment seulement de l'expérience, le théoricien prend le dessus et se substitue à l'expérimentateur. Dans l'ensemble, l'intention expérimentale reste dominante. Ce fait est si vrai qu'un expérimentateur ne ferait vraisemblablement aucune différence entre les deux procédés que nous avons proposés pour chaque exemple : dans l'un et l'autre cas, l'expérience lui paraîtrait pure de toute compromission.

Ce que nos exemples ont mis en lumière ne leur est d'ailleurs pas particulier. C'est un trait général des rapports qui s'établissent tout naturellement entre l'expérience et la théorie : nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance; il n'est aucun secteur de la connaissance où les intentions correspondantes ne trouvent à s'exercer conjointement ou alternativement.

Ainsi, les aspects sous lesquels la connaissance de l'espace se manifeste ne se disjoignent pas d'eux-mêmes. Nous les rencontrons engagés dans une compénétration mutuelle difficile à analyser.

Mais, demandera-t-on, faut-il en conclure qu'ils ne pourront jamais être parfaitement séparés; qu'ils ne pourront jamais être constitués de façon autonome; que jamais on n'aura le droit de parler du rationnel pur, ou du purement expérimental ?

Ceci est une autre question. Nous aurons à y revenir sous peu : toute l'orientation de notre étude dépend de la réponse que nous lui donnerons. Mais, avant de reprendre ce point avec toute l'attention qu'il mérite, nous avons à revenir sur la question qui nous occupe encore :

quels sont les moyens par lesquels l'intention théorique se réalise ?

47. Troisième exemple : démonstration de la formule d'Euler relative aux polyèdres.

La simplicité même des deux premiers exemples était un moyen de mettre certains caractères de l'aspect théorique en évidence. Mais d'autres caractères, tout aussi importants, ne pourront apparaître que sur un exemple où l'intention théorique soit franchement dominante, où se dessinent nettement les étapes d'une progression de quelque amplitude.

Nous nous proposons de vérifier la formule d'Euler, relative au nombre s des sommets, a des arêtes et f des faces d'un polyèdre ordinaire (simplement connexe), formule qui s'écrit :

$$s + f - a = 2.$$

Nous ne préciserons pas ce qu'il faut entendre par polyèdre, face, arête et sommet. Nous admettrons même qu'on n'en possède que les notions sommaires et peu analysées que le maniement de modèles matériels suggère. Nous supposerons que l'on sache se représenter comment une surface polyédrique peut être fendue le long d'une arête ou d'une ligne formée d'arêtes successives. Si les explications que nous allons donner n'étaient pas claires par elles-mêmes, nous trouverions légitime de les illustrer par des figures adéquates ou par la confection d'objets appropriés. C'est dire que nous entendons nous placer dans une situation où le domaine du rationnel et ceux de l'expérience et de l'intuition n'ont pas encore été nettement opposés les uns aux autres. La signification de ce troisième exemple tient, pour une bonne part, à cette dernière supposition.

Il nous faut cependant expliquer ce que veut dire le qualificatif simplement connexe. Fendons une surface polyédrique le long d'une suite d'arêtes formant un contour fermé. Deux éventualités peuvent se produire :

ou bien la surface polyédrique se sépare en deux parties distinctes,

ou bien la surface fendue reste encore d'une seule pièce.

Si la seconde éventualité ne se présente pour aucune des suites fermées d'arêtes contenues dans la surface envisagée, celle-ci est simplement connexe. Le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, etc., en sont des exemples.

Supposons donc que F soit une surface polyédrique de ce genre et fendons-la le long d'un circuit fermé d'arêtes C (fig. 9). Conformément à la définition du simplement connexe, elle se trouvera partagée en deux morceaux, F_1 et F_2 bordés l'un et l'autre par le circuit C.

Saisissons l'un de ces morceaux, F_1 par exemple, et fendons-le le long d'une suite d'arêtes, — que nous nommerons une section S, — partant du bord et y revenant. Voici comment on peut mettre hors de doute que cette section partage F_1 à son tour, en deux morceaux :

Soient A et B les sommets où la section S aboutit à C; ces deux sommets partagent C en deux parties, C_1 et C_2; S et l'une de celles-ci, C_1 par exemple,

forment aussi une suite d'arêtes fermée, le long de laquelle la surface F peut être partagée en deux morceaux. Chacun de ceux-ci contient d'ailleurs des points de F_1; F_1 est donc lui-même partagé en deux morceaux.

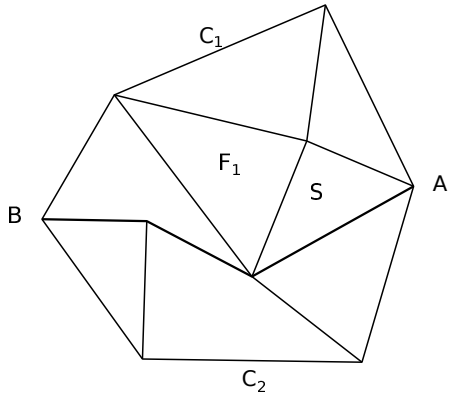


FIG. 9

Après avoir partagé F_1 en deux morceaux, nous pouvons en faire de même de F_2 puis de chacun des quatre morceaux obtenus... Nous ne nous arrêterons que lorsqu'il sera impossible de continuer, c'est-à-dire lorsque chacun des morceaux obtenus sera l'une ou l'autre des faces polygonales du polyèdre. Que vaut l'expression

$$s - a + f$$

pour un tel polygone ? s, le nombre des sommets, est égal à a, le nombre des arêtes; f vaut 1; on a donc :

$$s - a + f = 1.$$

Pour calculer ce que vaut la même expression pour la surface primitive F, il va nous suffire de recomposer celle-ci, en effaçant l'une après l'autre les sections que nous y avons pratiquées.

Nous aurons à distinguer deux éventualités :

l'assemblage de deux parties ne reconstitue pas la surface polyédrique entière;

le dernier assemblage reconstitue F.

Soient s_1, a_1 et f_1 les nombres des sommets, des arêtes et des faces pour le premier des morceaux qu'on rapproche, s_2, a_2 et f_2 les nombres correspondants pour le second, et s, a et f ces nombres pour le morceau reconstitué.

Supposons qu'on ait les deux équations suivantes (certainement vraies pour les deux premières faces polygonales qu'on rapproche) :

(1) $$s_1 - a_1 + f_1 = 1$$

(2) $$s_2 - a_2 + f_2 = 1.$$

Additionnons-les membre à membre :

(3) $$s_1 + s_2 - (a_1 + a_2) + f_1 + f_2 = 2.$$

Mais

$$f_1 + f_2 = f, \qquad s_1 + s_2 = s + \sigma, \qquad a_1 + a_2 = a + \alpha,$$

σ et α désignant respectivement le nombre des sommets et celui des arêtes de la ligne de suture.

L'équation (3) s'écrit donc :

(4) $$s - a + f = 2 - (\sigma - \alpha).$$

Tant que nous nous trouvons dans la première éventualité, $\sigma - \alpha = 1$, et le membre de droite de (4) reste égal à 1. Or les équations (1) et (2) sont vraies au début de la reconstitution. Elles le restent donc pour tous les morceaux qu'on rapproche, jusqu'au moment de la dernière opération.

Dans le dernier assemblage, la ligne de suture est un polygone fermé, pour lequel on a $\sigma - \alpha = 0$, et l'équation (4) valable pour F est alors :

$$s - a + f = 2.$$

La formule d'EULER est démontrée.

L'exposé du troisième exemple est ainsi terminé; il nous reste à en tirer la leçon.

48. SPÉCIFICATION DU THÉORIQUE AU NIVEAU DE L'INTUITION. La vérification théorique de la formule d'EULER qui vient d'être donnée ne s'est pas faite d'un coup. Elle comporte toute une chaîne d'opérations que nous saurions effectuer concrètement sur tel ou tel modèle matériel, mais que nous jugeons valables pour toute figure polyédrique du genre envisagé. C'est donc, en fait, une chaîne d'opérations mentales que nous avons imaginées, grâce auxquelles la formule s'est trouvée finalement établie.

La validité de tout le procédé tient :

1° à la légitimité de chacune des opérations,

2° à celle de leur enchaînement.

Pour ce qui concerne les opérations elles-mêmes (fendre en pensée une surface polyédrique le long d'une suite d'arêtes fermée ou non, distinguer les éventualités qui se présentent, pratiquer des sections S sur les morceaux et constater que la section S et le contour primitif du morceau forment ensemble un circuit fermé sur la surface du polyèdre, juger que la formule $s + f - a = 1$ est valable pour un polygone, rapprocher des morceaux pour les ressouder, etc.), nous remarquons que chacune d'elles est assez simple pour que nous puissions nous fier à notre connaissance intuitive de l'espace et des formes étendues. Leur légitimité tient entièrement à la validité de notre intuition.

Et quant à leur enchaînement[1], il n'était pas donné d'avance. Il n'est pas le seul enchaînement qui mène de la définition du simplement connexe à la formule d'EULER. Il constitue une réussite de l'activité théorique. Ses étapes jalonnent une voie qui n'était pas discernable d'elle-même.

L'intention théorique n'est pas en possession d'une « boussole logique » qui conduit à coup sûr, sans tâtonnement et sans détour, de l'énoncé d'un théorème au *quod erat demonstrandum*. L'ouvrage une fois terminé, il semble qu'on n'a eu qu'à mettre en place un certain nombre d'éventualités déterminées. Par le jeu des compatibles et des contradictoires, la succession de ces éventualités force alors l'esprit à concevoir la nécessité de la conclusion. Mais avant d'être ajustées les unes aux autres suivant leur ordre à la fois logique et efficace, ces éventualités avaient peut-être donné lieu à maintes combinaisons infructueuses, dont il ne reste plus trace dans la démonstration finale. Peut-être a-t-il même fallu les engendrer de toutes pièces, en imaginant telle ou telle opération, dont l'opportunité n'était pas certaine d'avance...

À travers le troisième exemple, l'activité théorique se présente donc comme *une expérimentation mentale sur des éventualités nettement conçues et telles que l'intuition sache chaque fois décider si elles sont compatibles ou si elles sont contradictoires entre elles. Ces éventualités, pour une part, s'imposent; et, pour une autre part, l'esprit les imagine librement. Elles sont par ailleurs soumises aux règles du raisonnement, c'est-à-dire aux lois qui régissent leurs combinaisons*.

L'expérimentation sur les éventualités a ses échecs et ses succès. La science théorique ne retient que les derniers,... mais elle est faite des uns et des autres.

Peut-être quelqu'un trouvera-t-il que, dans ce qui précède, l'idée du théorique n'est pas serrée d'assez près. « Ne fait-on pas la part trop belle à l'intuition ? dira-t-il. Car c'est elle, ici, qui décide, en dernière instance, si telle ou telle opération est faisable, et si telle éventualité est à prendre en considération. C'est elle qui juge si les faits imaginés (les éventualités) sont compatibles ou contradictoires. À chaque articulation de leur enchaînement, c'est l'intuition qui préside aux jugements d'existence ou de non-existence, de validité ou de non-validité. Le rôle de la logique paraît incroyablement réduit; à peine atteint-il celui d'un agent de la circulation. N'y a-t-il pas une pensée théorique qui sache mieux se garder de l'intrusion de l'intuitif, cet expérimental larvé ? N'y a-t-il pas une démarche rationnelle qui considère le recours sans contrôle, sans limite à l'intuitif (à l'intuitif toujours présent et jamais analysé), comme une défaillance de méthode ? N'existe-t-il pas une progression plus strictement logique des hypothèses aux conclusions ? N'est-ce pas dans cette direction qu'il faut chercher la vraie nature du théorique ? »

[1] Dans cet enchaînement intervient aussi le moment arithmétique dont nous avons souligné la présence dans les deux exemples précédents.

Voici ce que nous avons à répondre à ces remarques : ce dont vous nous faites un reproche, c'est précisément ce qui formait le fond de notre intention ! Pas plus que les deux premiers exemples, le troisIème ne doit servir à réaliser le rationnel dans son intégrité (intégrité qui, pour nous, est encore un problème). Certes, l'aspect théorique peut être plus étroitement caractérisé; il peut être spécifié de façon beaucoup plus exigeante que dans les paragraphes précédents. Et le chapitre III n'aura pas d'autre but que de reprendre la question et de faire franchir un pas de plus à la spécification (à la définition dialectique) du rationnel. Mais dans ce chapitre-ci, nous voulons résolument nous abstenir d'une démarche trop hâtive. Ce qui nous importe, c'est de montrer qu'une déduction valable n'exige pas que le théorique se soit constitué en catégorie autonome et, anticipant sur le chapitre III, que la déduction n'a pas besoin d'être axiomatisée pour être authentique. Au contraire, l'intention théorique peut fort bien prendre comme point d'appui, soit au départ, soit à tout autre instant, une connaissance intuitive préalable, — une connaissance qui ne s'explicite que dans la mesure nécessaire. Ces remarques auront leur importance.

Telle que nous venons de la décrire, la démarche théorique répond à l'idée que DESCARTES[1] se faisait de la démarche mathématique : « Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. »

Synthèse dialectique au niveau de l'information naturelle

49. DU RAPPORT DES TROIS ASPECTS ENTRE EUX.

En étudiant les trois aspects que la connaissance géométrique revêt, notre but est-il d'en disjoindre le faisceau ? Certainement non. Nous n'analysons pas la pensée géométrique pour le simple plaisir de l'analyser, mais pour mieux l'engager vers ses fins; nous en voulons l'authenticité et l'efficacité. Nous ne délions le faisceau que pour gagner la liberté de le reformer de façon

[1] *Discours de la méthode*, seconde partie.

plus consciente, plus étroite et plus idoine.

C'est donc là notre but; mais que la hâte ne nous précipite pas tête baissée dans la reconstruction. Celle-ci se pose maintenant en problème; prenons le temps d'en examiner les données.

À plusieurs reprises, nous avons fait allusion à la question des rapports qui existent entre ces trois aspects. Le moment est venu de faire avancer au premier plan l'alternative suivante qui domine cette question : chacun des trois aspects est-il spécifiable jusqu'à l'autonomie, ou bien ne se présente-t-il jamais à l'état pur, appuyé qu'il est sur les deux autres ?

Ces deux éventualités comportent des conséquences très divergentes. Dans le premier cas, il devrait exister trois modes différents et indépendants de faire de la géométrie. Pour traiter le problème qui nous occupe, il suffirait alors de dégager ceux-ci, de manière à conférer à chacun d'eux sa propre et entière spécificité. Dans le second cas, la question ne s'éclaircirait pas aussi simplement; le problème des rapports entre les trois aspects aurait une tout autre portée et ce serait devant lui que nous nous trouverions maintenant placés.

L'alternative précédente marque donc une bifurcation de notre chemin; dans laquelle de ces voies devons-nous nous engager ? C'est ce que nous allons examiner; mais, qu'il reste entendu que nous ne quittons pas le niveau de l'information naturelle.

C'est à ce niveau seulement que nous possédons, pour l'instant, les éléments sur lesquels fonder une réponse.

50. Les trois aspects sont-ils spécifiables jusqu'à l'autonomie ?

Peut-être quelque lecteur sera-t-il troublé par la façon même dont l'alternative est posée. « Bon, dira-t-il, l'existence des trois aspects est bien établie. Mais pourquoi marquer tant de circonspection, sitôt qu'il s'agit de les concevoir chacun pour soi ? S'il y a un sens à parler d'un aspect expérimental ou d'un aspect théorique, par exemple, pouvons-nous refuser d'admettre qu'il y ait une catégorie parfaitement déterminée du théorique, et indépendamment de celle-ci, une catégorie parfaitement délimitée de l'expérimental ? De quel droit repousser l'existence du théorique en soi, de l'intuitif en soi ? N'est-ce pas pratiquer une singulière logique que de revendiquer l'emploi, — l'emploi usuel et efficace, — de trois qualificatifs, et de suggérer en même temps qu'on ne peut pas en déterminer le sens tout à fait exact ? N'existe-t-il vraiment aucun argument en faveur de l'opinion qui semble la plus simple et la plus naturelle : admettre que ces trois qualificatifs comportent chacun pour soi une signification véritable, tout à fait précise, signification sur laquelle l'emploi de ces trois mots est fondé ? »

Cet interlocuteur semble d'accord avec le plus élémentaire bon sens. Comment fonder toute une discussion, toute une étude sur des mots qui

n'auraient pas un sens tout à fait déterminé et, par conséquent, sur des idées encore confuses ? L'emploi juste des mots ne dérive-t-il pas uniquement de leur sens exact ?

Dans les sciences, ce sont les faits qui ont raison, — souvent contre le bon sens, parfois contre une logique trop simpliste.Tous les faits que nous pouvons invoquer à ce point de notre étude parlent contre l'espoir de conférer une existence autonome à chacun des trois aspects.

Qu'on se rappelle le procédé décrit pour fabriquer les surfaces planes. Ce procédé ne s'expliquerait pas si l'on ne savait d'ailleurs, — c'est-à-dire intuitivement, — qu'une surface ne peut être à la fois concave et convexe. De façon analogue, la confection des angles resterait un mystère, si l'on ne savait de source intuitive et sûre qu'un pan ne peut être en même temps en surplomb et en talus. Certes, on pourrait se donner l'air d'avoir oublié l'information intuitive et la négliger par la suite. Mais qu'y gagnerait-on ? Le plus simple est de reconnaître qu'il est difficile (et probablement impossible) de tracer une ligne de démarcation bien nette entre l'intuitif et l'expérimental. Ces deux aspects s'interpénètrent. Ainsi, nous devons prendre garde de ne pas nous laisser emporter par une logique trop simple. Il est certainement juste d'établir une distinction entre l'aspect intuitif et l'aspect expérimental de la géométrie. Dans certains cas, cette distinction saute aux yeux. Il est clair, par exemple, que notre intuition spatiale ne contient pas, d'avance et par elle-même, l'idée d'user trois plaques métalliques en frottant chacune d'elles alternativement sur les deux autres. D'autre part, sans qu'il soit nécessaire de le vérifier expérimentalement, nous savons que la surface d'une sphère sépare les points qu'elle enferme de ceux qu'elle laisse à l'extérieur. Les deux aspects ne se confondent certainement pas. Et pourtant, rien ne nous autorise à penser qu'ils puissent être entièrement séparés, que l'un puisse être imaginé sans que nous ayons à chercher aucun appui dans l'autre. L'aspect intuitif est un fait, l'aspect expérimental en est un autre. Mais l'aspect purement expérimental n'est probablement qu'un idéal irréalisable, et l'aspect intuitif aussi.

En un certain sens, l'intuitif et l'expérimental s'opposent : l'expérimentation tend toujours à dépasser l'intuition, à la contrôler, à la prendre en faute. Et pourtant, elle serait aveugle et paralysée, si elle ne disposait de la vision préalable de l'espace et de la conception préalable du temps. Et quant à l'intuition, sa sécurité ne lui vient-elle pas de s'être formée sous la pression de l'expérience ?

Avons-nous d'autre part des raisons de penser que nous rencontrerons moins de difficultés à définir un aspect purement théorique et que le théorique se séparera franchement de l'empirique (ce dernier comprenant l'expérimental et l'intuitif dont on ne pourrait se passer) ? Dans les exemples que nous avons traités, l'aspect théorique se développait au moyen de chaînes d'opération sûres

et de jugements certains. Mais où ces opérations mentales avaient-elles pris leur efficacité et ces jugements leur certitude ? Cette efficacité et cette certitude sont précisément les caractères que nous avons reconnus à la connaissance intuitive. En géométrie, le théorique tient partout à l'intuitif. Dans d'autres sciences, le théorique aboutit directement à l'expérimental. Dans d'autres encore, les racines empiriques sont plus cachées. Nulle part, la séparation totale du théorique et de l'empirique n'est un fait accompli.

Nos exemples sont trop peu nombreux, trouvera-t-on. Leur choix révèle d'avance la volonté de soutenir une thèse déterminée : l'incapacité où l'on serait de délimiter exactement, dans leurs rapports réciproques, les trois aspects dont l'existence est pratiquement démontrée. Mais d'autres exemples choisis avec d'autres préoccupations permettraient peut-être d'autres conclusions.

Qu'à cela ne tienne. Au chapitre suivant, nous nous tournerons résolument vers le rationnel, pour le mieux saisir, pour le préciser, pour le spécifier... Cet effort ne sera pas vain. Une meilleure spécification est possible. Nous verrons par quelle technique mentale elle s'obtient. Mais nous n'aboutirons pas au rationnel pur.

Autant il est indubitable que la connaissance de l'espace se présente sous trois aspects distincts, dont les différences parfois sautent aux yeux, autant il est douteux que nous soyons capables de les présenter isolément, parfaitement et définitivement spécifiés.

51. Le problème de l'espace au niveau de l'information naturelle.

Ainsi au niveau de l'information naturelle, la première éventualité est à écarter : l'examen des trois aspects les montre partiellement spécifiés et partiellement interdépendants. Et c'est en face de cette constatation, en l'absence d'une spécification donnée d'avance, ou même seulement possible d'avance, que le problème de l'accord des différentes sources de notre connaissance prend son importance et sa complexité.

Par l'idée, par la perception et par l'action, trois ordres de connaissance s'instituent en nous. N'est-il pas étonnant de les voir entièrement s'accorder ? S'il était prouvé que l'idée ne peut pas s'écarter du réel auquel elle s'applique, s'il était certain que la perception et la représentation ne peuvent nous égarer, s'il était indubitable que l'action ne dépasse jamais le cadre du déjà conçu, la concordance de nos différents moyens d'entrer en possession de l'espace nous paraîtrait à bon droit évidente. Mais nous savons que l'idée n'est pas toujours nécessairement fidèle au donné de l'expérience; nous savons que nos perceptions et nos sensations ne nous livrent qu'une connaissance sommaire et imparfaite; nous savons que l'action peut créer des catégories nouvelles... L'accord des trois aspects a donc les caractères d'une réussite. Mais une

réussite pose toujours un problème : Comment s'est-elle produite ? Si elle se maintient, comme une fonction bien réglée, le problème s'élargit : comment un jeu si bien accordé est-il possible ? Pour qu'il ait persisté, comment les trois ordres de connaissance s'appuient-ils les uns sur les autres ? La stabilité de cet accord est-elle, inconditionnellement, à l'abri de toute nouvelle expérience ?

Ainsi surgit le problème de l'espace, forme, cadre, lieu et moyen de toute notre activité. Il faut s'étonner que la géométrie puisse être ce qu'elle est, puis comprendre après coup qu'il en soit ainsi.

On ne manquera pas de trouver paradoxale cette façon de susciter un problème, presque de l'inventer. Normalement, la réponse n'est pas donnée avant la question; elle doit être, au contraire, cherchée, découverte ou construite. Dans notre cas, la solution ne nous a jamais fait défaut; avant même de l'avoir examiné, nous dominions pratiquement le jeu concerté des trois aspects.

Nous le dominions sans y prendre garde. Nous ne songions pas à nous étonner qu'il soit si fermement établi, avant de l'avoir analysé. Sans même que le problème fût posé pour nous, nous possédions une solution valable : connaissant une réponse, nous avons construit la question à laquelle cette réponse doit satisfaire.

Cette façon de procéder n'est pas sans inconvénients : le problème ainsi dégagé ne s'impose pas naturellement, on le dirait inventé pour le plaisir de jouer avec de plus ou moins subtiles distinctions. Il s'introduit incognito; son importance véritable reste cachée. Comment deviner qu'il représente la question à poursuivre, la question dominante ?

Cette façon de poser le problème de l'espace présente cependant un avantage décisif : elle précise du premier coup ce qu'une solution authentique doit nous apporter, jusqu'où nos exigences peuvent être poursuivies.

C'est déjà un avantage considérable de comprendre clairement que toute solution doit comporter un accord étendu à trois ordres de connaissance. On fait un pas de plus en distinguant ce que doit être la structure de cet accord (en montrant, par exemple, que cet accord se réalise sous la forme d'une synthèse dialectique, comme nous le verrons plus loin). S'arrêter là serait encore une fois se satisfaire à trop bon compte. Nous n'avons pas épuisé tout ce qui est exigible en restant simplement spectateurs curieux et attentifs de nous-mêmes, de ce qui se fait en nous. Satisfaire cette curiosité n'est pas notre but. Si nous nous examinons, jouant notre rôle spatial, c'est pour le jouer avec plus de succès. Or, voici le point essentiel : une solution normale doit être une solution techniquement accomplie. Nous voulons dire qu'elle doit comporter la mise à jour et l'installation du jeu dialectique des trois aspects dont il a été question. La solution est ce jeu lui-même, tenant lieu de moyen de connaissance et de régulateur de l'action.

Il ne faudra jamais perdre de vue ces exigences, surtout lorsque, dans sa

complexité, le problème de l'espace nous obligera à dépasser notre première solution. Pour l'instant, ne portons pas notre regard plus loin qu'il ne faut. Arrêtons-le sur la solution qui convient au niveau de connaissance où nous nous plaçons, celui de la géométrie élémentaire.

52. ÉMERGENCE HISTORIQUE DE LA DIALECTIQUE DES TROIS ASPECTS. Notre intention n'est pas de faire un exposé historique de la méthode en géométrie élémentaire. Il s'agit uniquement d'une enquête très sommaire, destinée à nous fournir quelques indications sur la façon dont la géométrie élémentaire, dans son évolution historique, a conçu la rencontre des trois aspects[1]. Nous posons la question de l'information naturelle : il est utile que nous consultions des juges que le progrès des sciences n'avait pas encore sensiblement éloignés de ce niveau de connaissance. Pour répondre tout à fait équitablement à cette question, nous sommes trop instruits. Nous ne saurions faire abstraction de toute l'information dont nous bénéficions aujourd'hui et dont les premiers géomètres ne pouvaient avoir le moindre soupçon. Le mieux est donc de nous reporter à une époque où l'état des connaissances était propre à soutenir une doctrine géométrique naturelle.

À la question de l'accord des trois aspects, chaque époque fournit une réponse plus ou moins complète, plus ou moins satisfaisante. À quel moment trouverons-nous une réponse qui puisse déjà nous convenir ?

Est-ce à l'époque d'EUCLIDE, alors que la géométrie grecque trouvait sa méthode et son expression définitives ? Pour deux raisons, la solution d'EUCLIDE ne répond pas à notre question.

Premièrement, les *Éléments* d'EUCLIDE ne sont pas à proprement parler un traité élémentaire. Ils sont l'aboutissement et le couronnement de la pensée grecque. On ne saurait sans commettre une grave erreur d'appréciation les déclarer inspirés par une doctrine naturelle. D'un bout à l'autre, ils sont informés par la philosophie platonicienne; celle-ci entre pour une part essentielle dans la doctrine préalable d'EUCLIDE. Les philosophes grecs en étaient eux-mêmes conscients, puisqu'ils voyaient dans la géométrie et dans ses exposés déductifs, le modèle même de la science conforme aux *Idées*, le modèle de toute science rationnelle.

Secondement, les *Éléments* ne contiennent point encore la réponse que nous attendons, parce que, conformément à l'attitude scientifique de l'époque, la composante expérimentale en est en principe exclue. Pour les Grecs, notre problème ne se posait pas. Il était résolu d'avance contre l'empirisme, par une

[1] Certains des renseignements qui suivent sont empruntés à la thèse de H.-S. GAGNEBIN, en voie de préparation.

croyance exclusive en la valeur de l'effort théorique.

Bien entendu, il y aurait intérêt à analyser l'œuvre du géomètre d'Alexandrie, en ce qui concerne sa doctrine préalable et le point particulier qui nous occupe maintenant. D'ailleurs, l'ayant fait, nous n'aurions pas à modifier les conclusions auxquelles nous serons amenés, mais nous aurions à prendre position prématurément (dans l'ordre de notre étude) contre un certain absolutisme méthodologique dont la source est sans conteste une foi doctrinale en la prédominance absolue du rationnel.

Bref, pour poser raisonnablement notre question, il nous faut attendre une période où les trois aspects envisagés se trouveront réunis dans l'horizon des géomètres. Cela veut dire tout simplement qu'il nous faut attendre jusqu'à la formation de l'esprit scientifique moderne.

En effet, EUCLIDE avait si fortement marqué la géométrie du sceau du rationnel pur, il l'avait fait avec tant de succès, que des siècles passèrent sans que cette empreinte fût en rien affaiblie. Ce n'est pas qu'aucun effort d'une originalité indéniable n'ait été tenté. Mais la géométrie euclidienne était trop fortement installée sur son piédestal pour en être ébranlée.

En France en tous cas, il faut attendre le milieu du XVIIIe siècle pour voir un changement se dessiner avec une certaine netteté. Pendant tout le XVIIe siècle, on en restera à l'ordre d'exposition euclidien. On accentuera même, sur certains points, la prédominance rationnelle, comme en témoigne l'essai cartésien de supprimer le recours aux figures, effort qui conduira, comme on le sait, à la création de la géométrie analytique[1].

Ainsi, nous devrons attendre que le mépris de DESCARTES[2] et des cartésiens pour l'information expérimentale soit contrebalancé. C'est d'ailleurs de l'extérieur, de la physique et de l'astronomie, que le renouvellement de la perspective fondamentale s'imposera. GALILÉE et NEWTON sont les grandes figures du courant qui devait introduire l'idée de la loi naturelle, de la réalité naturelle dans la science.

Le premier ouvrage français, où cette influence se marque clairement, est le traité de géométrie que CLAIRAUT écrivit à l'intention de la MARQUISE DU CHÂTELET (1741). Pour la première fois, on y voit la doctrine de la géométrie

[1] Dans le *Discours de la méthode*, DESCARTES ne dira-t-il pas : « L 'Analyse des anciens... est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination... »

[2] Voir à ce sujet la Règle III des *Requlæ ad directionent ingenii* : « ...nous allons énumérer ici tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur; il n'y en a que deux : l'intuition et la déduction ». Après avoir analysé ces deux modes, DESCARTES ajoute : « Voilà les deux voies les plus certaines pour conduire à la science : pour ce qui est de l'intelligence on n'en doit pas admettre davantage, et toutes les autres doivent être rejetées comme suspectes et exposées à l'erreur. » (Traduction de G. LE ROY. Paris, Boivin, 1933, p. 20-21 et 23-24.)

se faire naturelle comme la doctrine de l'éducation se fait naturelle dans l'*Émile*.

Qu'on en juge : « J'ai pensé, déclare CLAIRAUT[1] dans la préface de son ouvrage, que cette Science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commençants, puisque c'étaient des Commençants qui les avaient faits.

» Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie; et j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

» La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie... »

Passant en revue les avantages de sa méthode, CLAIRAUT ajoute[2] : « J'espère qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes...

» On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces *Éléments*, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement, que sur des propositions dont la vérité se découvre, pour peu qu'on y fasse attention. »

Et CLAIRAUT de poursuivre son plaidoyer[3] : « Qu'EUCLIDE se donne la peine de démontrer, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé; on n'en sera pas surpris. Ce Géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs. »

Le corps de l'ouvrage ne le cède en rien à la préface. Un seul alinéa suffira à nous en assurer : « Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une sorte de Géométrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une

[1] *Éléments de géométrie*. Nous citons cet ouvrage d'après l'édition qu'en a donné M. SOLOVINE. Paris, Gauthier-Villars, 1920, p. X.

[2] *Id.*, p. XII.

[3] *Id.*, p. XIII.

mesure connue à celle de la longueur qu'on veut connaître[1]. »

Dans l'œuvre de CLAIRAUT, l'aspect expérimental est clairement présenté; il y devient presque exclusif. Nous n'aurons cependant plus à attendre longtemps pour voir notre question traitée dans son intégrité et dans la pleine conscience d'inaugurer une nouvelle méthode en géométrie. On doit au géomètre genevois Louis BERTRAND une révision complète des éléments des mathématiques[2]. Vers la fin de sa vie (1791), il en reprit la partie géométrique et la publia sous forme d'*Éléments* (1812). Ceux-ci marquent, pour la question qui nous occupe, un tournant décisif.

Les trois aspects de la connaissance géométrique y sont explicitement indiqués, les trois modes de la pensée géométrique véritablement mis en œuvre, le tout étant présenté dans le cadre d'une information naturelle. Nous ne saurions mieux faire, pour le montrer, que de reproduire ici les premières pages de ces *Éléments*[3] :

> Il n'est pas facile de passer des idées qui viennent immédiatement des sens aux idées abstraites de la Géométrie. Cela s'est pourtant fait de toute ancienneté; mais on ignore par qui et de quelle manière. Si l'Histoire nous l'avait appris, nous saurions comment les idées scientifiques se formèrent des idées communes, et les unes nous feraient concevoir les autres. C'est donc un service à rendre à la Géométrie, que de suppléer par une fiction au fait historique dont les traces se sont effacées.
>
> Jadis un chasseur, ayant tué dans la plaine un daim d'un coup de flèche, voulut savoir à quelle distance il avait atteint sa proie; et à cet effet, posant successivement son arc sur cette distance, il trouva dans le nombre de fois qu'il put l'y poser, la longueur qu'il avait l'intention de mesurer. Puis, réfléchissant à cette circonstance, que lorsqu'il posait son arc sur le terrain, il faisait une singulière attention à ne le poser que selon certaine direction, exclusive de toute autre; cette direction, dit-il, qu'on nomme ligne droite, et dont j'ai une idée si claire, si l'on me demandait en quoi elle consiste et ce qui la distingue de toute autre, comment répondrais-je ? Dirais-je que c'est la direction que suit une flèche au sortir de l'arc, ou celle que prend un fil chargé d'un plomb, quand il est retenu par son autre extrémité; ou mieux encore, celle d'un rayon de lumière qui pénètre dans un lieu obscur ? Mais aucune de ces images ne mettrait sous les yeux les propriétés par lesquelles la ligne droite se distingue de toute autre; il en faudrait une qui les fît au moins entrevoir; on tâcherait ensuite de s'en faire des idées distinctes. Or cette image à désirer, ne serait-elle pas celle que présente une ligne tracée au cordeau sur une plaine ? Abstraction faite des bornes de la plaine, cette ligne ne la partagerait-elle pas en deux parties égales, sans se porter vers l'une plus que vers l'autre ? Ces idées ne se rapprocheraient-elles pas encore plus des idées abstraites et intellectuelles, si l'on substituait à la plaine la surface d'un lac parfaitement calme, et à la ligne tirée au cordeau sur cette plaine, le trait subtil que l'imagination trace de droit fil sur la surface de ce lac ? Par rapport ensuite à cette surface, qu'on qualifierait de plane, ne diviserait-elle pas l'espace en deux parties égales, sans se

[1] *Éléments de géométrie*, p. 1.

[2] *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques prise dans toute son étendue* (1778).

[3] *Op. cit.*, p. 1 à 4.

porter vers l'une plus que vers l'autre, et ne serait-ce point en cela que consisterait son caractère distinctif.

C'est ainsi que le chasseur développe, et les rapports de la ligne droite à la surface plane ou au plan, et ceux du plan à l'espace. Mais après être remonté à l'espace, comme à l'objet duquel dérivent ses notions de plan et de ligne droite, il ne peut remonter de l'espace à quelque autre objet duquel il dérive. C'est pourquoi il le considère en lui-même, afin que s'en faisant une idée plus complète et plus distincte, les idées de plan et de ligne droite, qu'il en a fait dépendre, deviennent aussi plus complètes et plus distinctes.

Explications et définitions fondamentales.

L'univers déploie à nos yeux un espace immense. C'est dans son immensité que les corps existent en repos ou en mouvement, et sont sujets à divers changements, soit dans leur forme extérieure, soit dans l'arrangement de leurs parties intérieures, tandis que l'espace, invariable dans tous ses points, demeure dans un éternel repos. L'idée que nous nous en formons est donc qu'il est infini ou sans bornes; homogène ou partout semblable à lui-même. Il est sans bornes : à quelque distance que l'imagination les transportât, elles se trouveraient dans son étendue, et en seraient de toute part environnées. Il est partout semblable à lui-même : la place qu'un corps y occupe en certain lieu ne diffère pas de celle qu'il occuperait en tout autre lieu. Enfin l'espace est autour d'un corps placé quelque part dans son immensité, ce qu'il est autour de ce corps placé autre part dans son immensité même.

Conformément à cette idée de l'espace, on peut le concevoir divisé en deux également par une limite qui, dans sa totalité, comme dans l'une quelconque de ses parties, se rapporte à la moitié de l'espace qu'elle laisse d'un côté, comme à la moitié de l'espace qu'elle laisse de l'autre côté. C'est cette limite, continûment indifférente aux deux parts qu'elle fait de l'espace, que le chasseur qualifie de *Plan* ou de *Surface plane*. J'observe ensuite que, comme l'espace est infini et homogène, il en est de même du plan; qu'il est infini, puisqu'il divise également l'espace qui est infini; qu'il est homogène, puisqu'il est continûment indifférent aux deux parts qu'il fait de l'espace, qui est homogène.

Le chasseur continue et dit : le plan étant infini et homogène comme l'espace, peut comme l'espace se diviser en deux également, par une limite qui, soit en totalité, soit en l'une quelconque de ses parties, se rapporte au demi-plan qu'elle laisse à sa droite, comme au demi-plan qu'elle laisse à sa gauche. C'est cette limite, continûment indifférente aux deux parts qu'elle fait du plan, que le chasseur nomme *Ligne droite*; après quoi il observe, qu'elle est comme le plan, infinie et homogène : infinie, puisqu'elle divise en deux également le plan, qui est infini; homogène, puisqu'elle est continûment indifférente aux deux parts qu'elle fait du plan, qui est homogène.

De ces définitions, le chasseur passe à celles des surfaces ou superficies considérées en général et dit que ce sont les limites qui séparent une portion quelconque de l'espace du reste de l'espace. Il les distingue ensuite en *planes* et *courbes* : planes, celles qui ont les propriétés du plan; courbes, celles qui ne les ont pas. Il dit aussi des lignes en général, que ce sont les limites des surfaces; puis il les distingue en *droites* et *courbes* : droites, celles qui ont les propriétés de la ligne droite; courbes, celles qui ne les ont pas. Il dit encore que le point est la limite des lignes; et par rapport aux *limites* des quantités étendues, ce sont, suivant lui, les termes auxquels ces quantités parviennent, mais qu'elles ne dépassent pas. Enfin, à la ressemblance de l'espace qui est autour de l'un de ses points ce qu'il est autour d'un autre quelconque, le chasseur observe qu'un plan est aussi autour d'un de ses points ce qu'il est autour d'un autre; et qu'une ligne droite est encore, de part et d'autre d'un de ses points, ce qu'elle est de part et d'autre d'un quelconque de ses autres points.

De la définition que le chasseur s'est faite du plan, il tire ensuite cette conséquence, savoir que *deux plans peuvent toujours convenir ou coïncider*, c'est-à-dire être couchés l'un sur l'autre de manière qu'ils se touchent par tous leurs points : car, puisque chacun d'eux n'a d'autre fonction que celle de partager l'espace en deux parties égales, sans cesser nulle part d'être indifférent à l'une et à l'autre, ils ne peuvent différer, ni par rapport aux parties qu'ils font de l'espace, ni par rapport à la manière dont ils les font; d'où il suit qu'il n'y a entre eux aucun principe de différence, et partant, qu'ils sont toujours capables de convenir ou de coïncider.

Le chasseur tire une conséquence semblable de sa définition de la ligne droite, savoir que *deux lignes droites sont toujours capables de convenir ou de coïncider*. Car puisque chacune d'elles n'a d'autre fonction que celle de diviser le plan en deux parties égales, sans cesser nulle part d'être indifférente à l'une et à l'autre, elles ne peuvent différer, ni par rapport aux parties qu'elles font du plan, ni par rapport à la manière dont elles les font; il n'y a donc entre elles aucun principe de différence, et partant, elles sont toujours capables de convenir ou de coïncider.

Telles sont les idées premières et fondamentales de la Géométrie. Nous les avons fait développer par un chasseur, auquel nous ne supposions aucune connaissance préliminaire de cette science, afin que le lecteur passant avec lui des idées communes aux idées scientifiques, vît de quelle manière les unes se formaient des autres. Ce sera nous, présentement, qui ferons sortir de nouvelles lumières de celles que le chasseur nous a communiquées.

Ce texte est remarquable à bien des égards. Au niveau du développement de la géométrie où notre discussion se situe maintenant, il reste un modèle dont on peut encore s'inspirer avec profit. Et quant à la question des trois aspects, la position de l'auteur s'y reflète nettement.

Certes, dès le début, les réflexions du chasseur sont sous-tendues et guidées par le raisonnement logique, mais celui-ci n'est pas le seul maître du jeu. L'intuition et l'expérience y participent avec les mêmes droits.

L'intervention de l'intuition y est fort bien indiquée : c'est elle qui suggère au chasseur le procédé par lequel il mesure la distance à laquelle il se trouvait de son but. Cet acte ne nous est pas présenté comme un acte réfléchi, mais comme un acte tout naturel : c'est instinctivement que le chasseur met son arc dans le prolongement direct de la position précédente. Pourquoi hésiterait-il ? Il est d'avance en possession d'une idée claire de la ligne droite. Son intuition en dispose. S'il prend après coup conscience des précautions dont il a usé pour la réaliser, il se rend compte aussi que sa conduite était informée par l'idée qu'il avait de la droite.

Dans le comportement du chasseur, l'intuition et l'expérience restent donc intimement liées, et ne se séparent pas du raisonnement. Cependant, lorsque la réflexion revient sur l'idée de la droite pour en dégager et pour en formuler les caractères distinctifs, l'expérience intervient à nouveau, avec plus d'indépen-

dance. Différentes images, différentes réalisations de la droite sont évoquées, avant que le chasseur ne s'arrête à celle qui suggérera la définition qu'il veut illustrer : l'image (l'expérience) du cordeau tendu[1].

Quant au rôle de la déduction, ni CLAIRAUT, ni BERTRAND n'entendent en contester la validité. Ils contestent cependant qu'elle soit le seul moyen légitime à employer dans l'édification de la géométrie. Du moins, disent-ils, ce n'est pas par la déduction que la géométrie a été découverte et ce n'est pas par la déduction pure qu'on la fera redécouvrir aux débutants.

Nous ne voulons pas négliger de souligner combien les vues géométriques de L. BERTRAND concordent avec celles auxquelles notre discussion nous amènera. Mais nous n'avons pas évoqué ses travaux pour l'unique plaisir de voir nos thèses partagées.

Nous devons poser à ce savant — qu'on s'en souvienne — une question précise : comment les trois modes de la connaissance géométrique concourent-ils à la constitution de la géométrie élémentaire ? Comment la rencontre des trois aspects se fait-elle à cet échelon de la science de l'espace ?

L'histoire du chasseur y répond, de façon implicite il est vrai, mais sans équivoque : l'intuition, l'observation et l'expérience, ainsi que la déduction, interviennent avec les mêmes droits dans la formation des notions fondamentales et des définitions[2]. Leur autorité est la même. Au regard de la tâche à accomplir, il n'y a pas d'ordre hiérarchique entre ces modes de connaissances : ils sont également valables. Rien ne donne à penser que l'un soit inférieur à l'un des deux autres. Dans la perspective du chasseur, ils s'allient, ils se complètent, ils se recouvrent. Rien ne permet d'imaginer qu'ils puissent entrer en contradiction.

On constate un accord semblable dans la perspective du géomètre dont la réflexion revient sur la conduite du chasseur. Dans l'introduction à son ouvrage, Louis BERTRAND va jusqu'à penser que les définitions fondamentales doivent participer des trois aspects. Non seulement ceux-ci ne sont jamais en désaccord, non seulement ils ont la même valeur de vérité; ils doivent être superposables.

La réponse à notre question est donc nette :

1° les trois aspects de la géométrie ont même valeur de vérité;

[1] Il ne faudrait pas imaginer que des réflexions préalables, du genre de celles que fait le chasseur, soient sans importance pour l'édification même de la géométrie. La reconnaissance explicite des trois aspects de la géométrie n'est pas sans influencer l'édification de la géométrie, et en particulier le choix des définitions fondamentales. En tous cas l'adoption de ce point de vue permet à BERTRAND de devancer ses contemporains dans le choix judicieux des définitions; et en particulier de rejeter (non comme fausse, mais comme impropre) la définition qui fait de la droite le plus court chemin d'un point à un autre, alors que ROUCHÉ et COMBEROUSSE ne l'abandonneront qu'à partir de la 7e éd. de leurs *Éléments*.

[2] L'analyse de quelques démonstrations ferait voir que c'est aussi le cas dans la chaîne déductive des théorèmes.

2° non seulement ils ne se contredisent pas, mais ils s'allient étroitement, se recouvrent, se superposent;

3° ils sont également nécessaires tous les trois.

Telle est, après celle de CLAIRAUT, la réponse de Louis BERTRAND. Notre brève enquête historique nous découvre ainsi la genèse d'une nouvelle *Méthode* de la géométrie, informée par une doctrine préalable fondamentalement différente de la doctrine euclidienne et platonicienne. Sans être formellement reconnue comme telle, cette méthode va pénétrer dans la majorité des traités élémentaires. Nous la retrouverons, par exemple, avec ses traits essentiels, dans la Géométrie de LEGENDRE (1794).

À ce niveau de notre discussion, cette méthode répond précisément au but de notre recherche. C'est pour être en mesure de la concevoir nettement, de la caractériser, d'en énoncer les propriétés distinctives que nous avons examiné les trois modes de la connaissance géométrique avec tant d'insistance. Il ne nous reste plus, avant de formuler nos conclusions, qu'à jeter un coup d'œil sur la situation actuelle : les manuels d'aujourd'hui se rallient-ils à la nouvelle méthode géométrique ? Et s'ils le font, le font-ils en pleine connaissance de cause ?

53. LES TROIS ASPECTS DANS L'ENSEIGNEMENT ACTUEL DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Quelle est, en face des trois aspects de la connaissance géométrique, la doctrine fondamentale des manuels modernes de géométrie élémentaire ?

Ouvrez l'un ou l'autre des plus couramment employés, vous n'y trouverez pas de réponse claire et explicite. On semble admettre que chacun sait à quoi s'en tenir. Un accord tacite et préalable semble régner entre l'auteur et ses lecteurs, par conséquent aussi entre les différents auteurs. Cet accord est-il vraiment établi ? Est-il si facile à réaliser qu'on ne prenne même pas la peine de le discuter et de le formuler ? Si l'on veut bien y songer, on ne tarde pas à voir que les choses se présentent de façon paradoxale.

La teneur de cet accord représenterait l'essentiel de ce que nous avons nommé la doctrine préalable. Or nous avons vu au premier chapitre combien les tentatives d'expliciter cette doctrine prenaient des directions divergentes. C'étaient, il est vrai, des essais d'étudiants qui n'avaient pas réfléchi suffisamment à la question. Mais, avions-nous remarqué, ces opinions n'étaient probablement que les échos d'opinions plus autorisées, celles des maîtres qui les avaient enseignées, celles des manuels dont on s'était servi.

Qu'on s'en souvienne : parmi les réponses relatives à l'axiome, il n'y en avait pas deux qui fussent pleinement conciliables. Ne faut-il pas en conclure que l'accord tacite dont nous parlons n'existe pas ? Que le seul moyen de ne pas faire éclater les divergences est de n'en point parler ? L'accord ne porterait

donc que sur la convention tacite de ne pas insister sur le désaccord réel.

D'autre part, si les divergences sur la doctrine préalable étaient réellement aussi profondes que notre enquête le laissait entrevoir, comment expliquer que tous les auteurs s'entendent sur toutes les propositions de géométrie qu'ils considèrent comme vraies ?

C'est une question que nous nous posions déjà au chapitre I. Elle ne semble pas s'être beaucoup éclaircie. Et pourtant, nous la verrons tout à l'heure s'élucider sans difficulté.

Pour y voir clair, il suffit d'ouvrir presque au hasard l'un ou l'autre des manuels en usage. Voici, extraite de l'ouvrage qui nous a servi de terme de comparaison au début du chapitre I, la démonstration du théorème relatif à la somme des angles d'un triangle. Ce théorème n'a rien qui le désigne spécialement à notre intention, si ce n'est que nous l'avons examiné sous plus d'une face. La démonstration que nous allons reproduire n'a rien d'original : elle se retrouve à peu près pareille dans tous les autres manuels élémentaires. Les remarques qu'elle va nous suggérer ne s'appliquent pas seulement à l'ouvrage dont elle est tirée; elles restent justes dans la plupart des cas.

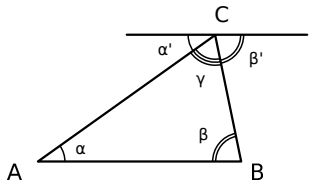


FIG. 10

Voici cette démonstration : « Menons par C la parallèle à AB (fig. 10). Les angles α' et β' qu'elle forme avec les côtés sont égaux à α et β comme alternes-internes, une fois avec la sécante AC, une seconde fois avec la sécante BC. On a donc :

$$\alpha' + \gamma + \beta' = 1 \text{ angle plat} = \alpha + \beta + \gamma^{1}. \text{ »}$$

Séparée de tout son contexte, cette démonstration n'est pas complète. Il faut y adjoindre les résultats précédemment démontrés, et auxquels le texte renvoie explicitement (par exemple, le théorème relatif aux angles alternes-internes). La démonstration précédente est extraite d'une chaîne déductive. Un coup d'œil au contexte confirme naturellement cette observation : les théorèmes sont numérotés; leur ordre est celui dans lequel ils peuvent se déduire les uns des autres; le même caractère logique apparaît dans l'ordre de succession des définitions. Il est visible que l'ouvrage entier s'organise en système déductif. Des trois aspects, l'un prédomine nettement : l'aspect théorique. Cette prédominance n'est pas fortuite. Elle correspond à l'intention des auteurs. Mais cette intention ne leur est pas particulière. À des degrés divers, elle inspire tous

[1] F. GONSETH et S. GAGNEBIN, *op. cit.*, p. 59.

les manuels élémentaires.

La géométrie telle que les manuels élémentaires la présentent est donc un essai théorique, plus ou moins strictement réalisé. Cependant, cet essai n'ignore jamais complètement les deux autres aspects. Reprenons en effet la démonstration précédente. Il serait vain de vouloir indiquer tous les points où l'intuition intervient (ce serait d'ailleurs empiéter sur l'objet du chapitre III). Il suffira d'en indiquer un qui soit suffisamment important.

En disant : « Menons par C la parallèle au côté AB », nous avons posé comme valable qu'il n'existe qu'une parallèle par C au côté AB. C'est ce que formule le Ve postulat d'EUCLIDE, dont nous avons rappelé l'énoncé au n° 25. Dans aucun manuel, ce postulat n'est antérieurement démontré : sa validité n'a pour garantie que notre intuition.

Mais la composante expérimentale n'est-elle pas complètement exclue des manuels considérés ? Pas le moins du monde. Non seulement une vérification expérimentale convainc le lecteur de la vérité du théorème et lui suggère souvent les éléments de la démonstration, mais dans la démonstration proprement dite, le raisonnement se développe à mesure que l'on construit la figure, et c'est là un acte expérimental, très simple, il est vrai, mais bien caractérisé.

La démonstration précédente n'est qu'un exemple entre cent. L'un quelconque des théorèmes classiques aurait pu nous rendre les mêmes services. En choisissant une démonstration comprise dans le système déductif, nous ne nous sommes pas placés dans les circonstances les plus favorables à notre discussion. Dans tous les manuels, il existe des paragraphes se prêtant bien plus facilement aux constatations qu'il nous importe de faire : ce sont les premiers paragraphes du volume, ceux où les notions fondamentales se trouvent expliquées et les premières définitions présentées. Il nous faudra d'ailleurs y revenir. Ainsi, bien que l'intention théorique y soit dominante, le manuel élémentaire n'évite pas la mise en œuvre combinée, alternative et successive, de moyens empruntés aux trois modes de la connaissance spatiale.

En somme, le manuel ne présente qu'une face de l'enseignement réel de la géométrie. Dans la pratique, et surtout au début, la prédominance du théorique est beaucoup moins accentuée que dans la suite. Pour qu'un enseignement soit efficace, il doit commencer par s'ancrer solidement dans l'intuitif. Le raisonnement doit s'appuyer sur la perception visuelle et sur l'activité manuelle. À elle seule, la démonstration logique ne crée pas la connaissance des formes spatiales, elle ne vous en communique pas la possession. Il faut qu'elle s'accompagne d'une vision intuitive et d'actions expérimentales. À côté de l'examen attentif de certains objets, de certains modèles, il faut que l'élève dessine, qu'il découple et assemble, qu'il modèle... Un simple retour à ce que nous avons dit de la connaissance intuitive fait comprendre que la genèse d'une

représentation de l'espace n'est pas essentiellement une affaire de logique. Le raisonnement est l'un de nos moyens, mais il n'est pas le seul.

Si donc nous envisageons la géométrie telle qu'elle doit être actuellement enseignée, et non telle que le manuel — un manuel quelconque — l'expose, la justesse de nos constatations se trouve confirmée jusqu'à l'évidence.

Répétons-le, lorsque nous écrivions[1] : « L'idée de surface est au nombre de ces idées familières dont nous nous servons sans en mesurer l'exacte portée : nous parlons de la surface de la terre, de celle d'un lac, de celle d'une lentille de verre. Il y a cependant quelque difficulté à préciser la signification de ce mot », nous aurions pu ajouter : « On y parvient par le jeu combiné de l'intuition, de l'expérience et de la déduction. »

Il est dûment constaté qu'aucune de ces trois composantes ne saurait être éliminée : la question de leurs rapports est dès lors à nouveau posée. Cette fois dans la perspective pédagogique. Comment imagine-t-on, en géométrie élémentaire, la façon dont elles s'accordent et se complètent ? En d'autres termes : quelle est, sur ce point, précis et central, la doctrine préalable de la géométrie élémentaire ?

La question doit être bien comprise. Nous ne demandons pas : quelle est, sur ce point, l'opinion de tel ou tel auteur ? Nous savons bien que les opinions divergent. Lorsque nous demandons quelle est la doctrine préalable de la géométrie élémentaire, ce n'est donc pas à cette pléiade de doctrines préalables que nous pensons. Certes, chacune de celles-ci est une réponse, disons plutôt un essai de réponse, à notre question. Maintenant que nous pouvons nous fonder sur l'existence des trois aspects, il nous serait facile de les mieux apprécier. La plupart préjugent la question : certaines d'entre elles s'inspirent de la croyance au rationnel pur. Avant de s'en être assuré par l'expérience, elles posent en fait que l'aspect théorique doit pouvoir être isolé pour lui-même. Elles admettent non seulement une prédominance du théorique, mais elles ne mettent pas en doute la possibilité d'une réduction totale à un rationnel pur. Rien, dans l'examen auquel nous venons de procéder, ne justifie un point de vue aussi extrême. D'autres mettent l'accent sur le jugement d'intuition, mais également dans un sens extrême qui dévalorise les deux autres aspects. D'autres encore cherchent une conciliation, et d'autres, enfin, adoptent assez exactement l'attitude que nous allons prendre.

Oublions-les toutes et détachons notre attention de ce que les auteurs de ces réponses *disent* pour la reporter sur ce qu'ils *font*. Négligeant leurs explications, contentons-nous de distinguer, d'enregistrer ce qu'ils ne peuvent se dispenser de faire.

[1] *Op. cit.*, p. 3.

Or, voici ce qu'aucun d'entre eux n'évite :

Tous admettent, explicitement ou non, que jamais les trois aspects ne pourront s'infliger réciproquement un démenti. Qu'on rejoigne l'intuitif à partir de l'expérimental et qu'on le prolonge dans le théorique, jamais, pensent-ils, l'un de ces ordres de connaissance n'entrera en conflit avec les autres. Il est vrai que l'expérimental conduit à des vérités qui ne sont souvent qu'approximatives; pour interpréter les résultats, on tiendra donc compte d'une marge d'approximation. Il n'en demeure pas moins que les trois aspects sont envisagés comme trois aspects d'une même réalité. Bref, on établit entre eux une équivalence de vérité.

Nous disions, il y a un instant, que l'aspect théorique est prédominant. Nous ne nous contredisons pas. S'il est convenu que trois personnages parleront des mêmes choses et qu'ils ne se contrediront pas, il n'est pas nécessairement entendu que leurs rôles auront la même importance. On peut répartir le dialogue entre eux de cent façons différentes, sans rompre la convention. Il en est de même dans le dialogue entre les trois aspects de la connaissance spatiale. Ce dialogue, c'est-à-dire la façon dont un enseignement géométrique est construit, peut comporter les dosages les plus divers des recours aux trois sources de notre information. À travers ces dosages, l'absence de contradiction n'en reste pas moins la base des relations réciproques. En un mot :

l'équivalence de vérité des trois aspects est l'idée dominante de la doctrine préalable de la géométrie élémentaire.

La connaissance géométrique s'organise sous cette idée dominante. Que dire de la façon dont elle le fait ? Nous ne voulons pas insister à cet instant sur l'organisation plus ou moins autonome de chacun des aspects pour soi. Par exemple, nous réservons pour le chapitre III l'étude de la façon dont l'aspect théorique se constitue en une structure rationnelle, en un système déductif. Ce que nous en avons dit est amplement suffisant pour établir cette constatation fondamentale : qu'une édification déductive n'exige aucunement l'existence d'un rationnel pur. De même, nous ne rappellerons pas les précautions à observer dans la pratique du dessin, ou dans l'organisation pour soi d'une technique quelconque de l'expérimentation spatiale. Nous ne parlerons pas non plus des erreurs de la perception et des mesures à prendre pour s'en garder, etc. C'est de l'organisation des trois aspects entre eux qu'il doit être question, de l'organisation de leur coopération réciproque.

Il faut rappeler ici le moment où, au début du chapitre I, nous donnions la parole au maître. Reportons-nous aux explications par lesquelles celui-ci s'efforce de suggérer les notions fondamentales de surface, de ligne et de point (n° 4). À travers ces explications, l'intention des auteurs apparaît nettement. Ils ne cherchent pas à dissimuler l'idée dominante que nous venons de formuler,

ils ne cherchent pas à se soustraire aux obligations qu'elle impose. Sachant qu'elle doit présider à la genèse des notions fondamentales, ils en font leur idée directrice. Leurs explications ont un but précis : celui de lier, dès le début, les trois sens de l'idée de point, de celles de droite, de plan, de distance, etc. Celui de suggérer les modalités de passage d'un sens aux autres; de bien distinguer les circonstances où l'on a le droit de confondre ces aspects de celles où il est utile (ou nécessaire) de les différencier. En partant de l'intuition et en s'appuyant sur l'expérience, les auteurs s'efforcent de suggérer les notions abstraites dont la déduction s'emparera, de dégager à partir du concret les énoncés théoriques originels (évidents) qui serviront de point d'appui à la démonstration logique. Ils tentent ainsi de fixer d'emblée le jeu concerté des apports venus de part et d'autre, de conformer leur exposé à l'idée dominante de leur doctrine préalable.

On peut naturellement défendre d'autres doctrines fondamentales, comme on défend telles ou telles doctrines philosophiques, sans trop se soucier de les éprouver dans la pratique de la connaissance. Mais si l'on veut être sincère, si l'on veut avoir la doctrine de sa pratique, il ne peut y avoir hésitation ni contestation sur l'idée dominante : pédagogiquement, tout le monde s'y conforme. Tous l'acceptent en fait, quelques-uns même sans y prendre garde. Mais tous sont-ils au clair sur ce qu'ils font ? Il est permis d'en douter.

Certes, même si l'on s'accorde sur l'idée dominante, il est encore possible de différer d'opinion sur le dosage des trois aspects. Les uns exigeront qu'on s'écarte le moins possible de l'intuition, les autres estimeront qu'il faut avant tout rechercher la rigueur, les uns mettront l'accent sur l'activité manuelle, les autres sur l'exercice du raisonnement... Peut-être personne n'a-t-il tort, car le dosage qui convient à tel enseignement ne convient pas à tel autre. Tout le monde pourrait avoir raison par choix délibéré, en pleine connaissance de cause. Ou du moins, en se trompant, les auteurs ne commettraient-ils que des erreurs d'appréciation. Et la critique s'exercerait au nom d'exigences concrètes, en se pliant elle-même à l'exigence supérieure de l'idée dominante.

En réalité, la doctrine préalable réelle est souvent méconnue, et la critique s'exerce au nom de doctrines préalables illégitimes, c'est-à-dire préconçues. Sans conception claire de l'idée dominante, il arrivera toujours que les uns déferont, pour le refaire (en croyant mieux faire), ce que les autres auront fait avant eux.

54. LA SOLUTION ET SES LIMITES. Nous disions que tout enseignement géométrique réel cherche à fixer, conformément à l'idée dominante, le jeu concerté des trois aspects. *Ce jeu même, dans lequel s'exprime la connaissance intégrale de l'espace, c'est précisément la solution du problème de l'espace*, au niveau d'une connaissance conforme à notre vision naturelle du monde. Donnons au jeu des trois aspects le nom qu'il mérite, le nom que les remarques précédentes justifient :

C'est un jeu dialectique, une synthèse dialectique de l'intuitif, de l'expérimental et du théorique.

Cette constatation représente un premier point d'aboutissement de notre étude. Celle-ci se clôt une première fois.

Mais nous aurons à prolonger le débat. Il nous faudra rouvrir la perspective. Quelques remarques concernant la nature de la solution vont nous y conduire.

La solution obtenue est une solution active. Elle met en œuvre un certain ensemble de moyens : ceux-ci ont-ils été analysés d'outre en outre ? Saurions-nous les décrire, les exploiter et les spécifier entièrement ?

Certainement non ! L'information sur laquelle se base le jeu des trois aspects reste dans un certain état d'imprécision, sinon même d'indétermination. Nous ne savons pas de façon tout à fait certaine, par exemple, si les trois aspects sont isolables.

Ils ne le sont probablement pas. Nous verrons, par la suite, qu'ils ne sauraient l'être. Nous ignorons, en tout cas, jusqu'à quel point ils le sont. Mais ce manque de précision définitive au niveau de connaissance où notre discussion se place, n'empêche pas le jeu précis des trois aspects.

La solution obtenue, disions-nous, met en œuvre un certain ensemble de moyens : s'agit-il d'une mise en œuvre automatique ? En aucune façon. Le but qui nous est assigné, la connaissance de l'espace, reste lui-même dans un certain état d'imprécision, et même d'indétermination, puisqu'au moment où nous le formulons, nous ne savons qu'imparfaitement ce que le mot d'espace signifie et signifiera. Nous en savons pourtant assez pour ne pas nous perdre dans l'inefficace.

La solution, enfin, est-elle définitive ?

Tant qu'on se maintient au même niveau de connaissance (nous dirons, plus tard, dans le même horizon de réalité), elle reste pleinement satisfaisante : elle est idoine.

Au contraire, si l'on s'élève au-dessus du niveau de connaissance où elle est idoine, il peut arriver qu'elle perde son efficacité. Ceci doit être expliqué plus à fond.

L'idée dominante de notre synthèse dialectique, de notre dialectique intégrale de l'espace, comporte une hypothèse sur le monde physique : celle de la continuité de la matière. L'espace théorique est continu. Il ne pourrait y avoir d'équivalence de vérité avec les réalisations expérimentales, si celles-ci possédaient une structure discrète, granuleuse, lacunaire...

Or, c'est précisément l'image que *l'atomisme* nous apporte de toute réalisation concrète. Dans le monde des atomes, un fil tendu a toujours une

épaisseur finie, qui ne peut avoir zéro pour limite. Exiger que son épaisseur décroisse au-dessous d'une certaine limite, c'est renoncer à l'idée du fil continu pour passer à celle d'une série de particules distinctes.

Le rayon lumineux occupe toujours un certain volume. Le lui refuser, c'est lui enlever son existence, c'est le diffracter.

L'efficacité d'un jeu dialectique établi peut tenir à un état sommaire de notre information. Celle-ci vient-elle à se préciser : il arrive, et c'est ce qui se passe dans notre cas, que la dialectique ne morde plus sur le réel. En tant que solution du problème de l'espace, notre synthèse dialectique perd son authenticité.

Tout est-il compromis ? Tout est-il à refaire ? Personne ne le croira. Peut-être même n'accordera-t-on pas sa véritable importance au problème qui se pose à nouveau. On ne mesure pas du premier coup l'effort qu'il faudra faire jusqu'à la constitution d'une nouvelle dialectique de l'espace, idoine dans l'horizon de réalité atomique.

Pour unir les trois aspects dans un nouveau jeu dialectique, il faudra commencer par les disjoindre encore plus complètement. Leur spécification doit être poussée d'un pas plus loin, en particulier celle de l'aspect théorique.

C'est à cette dernière tâche que sera consacré le chapitre III, *l'édification axiomatique de la géométrie*.

CHAPITRE III

L'ÉDIFICATION AXIOMATIQUE DE LA GÉOMÉTRIE

Une intention très nette va orienter tout ce troisième chapitre. Nous allons l'indiquer en quelques mots.

Jetons un regard en arrière. Deux choses sont apparues au cours du chapitre précédent :

1° La « connaissance de l'espace » se présente sous trois aspects différents, l'aspect intuitif, l'aspect expérimental et l'aspect déductif. Nous avons mis hors de doute leur spécificité : ils peuvent être tous trois caractérisés avec assez de précision pour que leurs différences s'imposent jusqu'à l'évidence.

2° Leur spécification n'a cependant pas atteint son terme, sa perfection. Rien ne nous permet d'affirmer d'avance qu'elle puisse être poussée jusqu'à leur autonomie mutuelle. Au niveau de connaissance du géomètre (du géomètre selon la tradition), ces trois aspects apparaissent comme trois branches d'un même tronc : distinctes ou indistinctes selon le point de vue où l'on se place.

Mais lieur accord, pour être possible, n'exige pas que leur spécification soit achevée. Sous l'idée dominante de leur « équivalence de vérité », leur synthèse apporte une première solution du problème de l'espace : c'est la géométrie élémentaire dans l'intégrité de sa signification.

On peut croire, si l'on en reste au niveau de l'information naturelle, que cette solution épuise la question. La réalité spatiale, pensera-t-on, s'y trouve saisie telle qu'elle est, exactement et définitivement. Cependant, si il'on passe au niveau d'une connaissance mieux informée, à celui de la connaissance des structures atomiques par exemple, l'idée dominante qui préside à la synthèse des trois aspects se trouve compromise. — Et si nous ne savions pas déjà que cette idée sera rétablie plus tard, dans une validité sommaire et schématique, nous ne dirions pas seulement qu'elle est compromise, nous aurions simplement à constater que sa validité s'est évanouie.

« Tout est-il à refaire ? » demandions-nous à la fin du deuxième chapitre. « Personne ne le croira, répondions-nous. Mais peut-être ne mesure-t-on pas à leur juste valeur la difficulté du problème qui se pose à nous et l'effort qu'il nous faudra faire pour retrouver les conditions d'un nouvel accord. »

Nous l'avons déjà dit : « Pour y réussir, il nous faudra faire un pas de plus dans la spécification des trois aspects déjà étudiés et tout particulièrement dans la spécification de l'aspect rationnel ou théorique. Comment allons-nous

accentuer leur autonomie réciproque ? Gardons-nous de croire que pour gagner une meilleure spécification, il suffise d'examiner avec plus d'attention les moyens dont nous nous sommes servi jusqu'ici. Il faut imaginer au contraire des moyens inédits, ce qu'on pourrait appeler une technique adéquate de la spécification. Pour l'aspect théorique dont nous allons maintenant nous occuper, ce sera la méthode axiomatique. C'est par l'édification axiomatique de la géométrie que l'idée d'une géométrie rationnelle va recevoir un sens plus précis, un sens mieux précisé. »

Caractères de la méthode axiomatique

55. LES PREMIÈRES EXIGENCES DE LA MÉTHODE AXIOMATIQUE. Pour déceler les premiers caractères de la méthode déductive, nous avons examiné la démonstration de deux théorèmes très simples. L'un et l'autre ont été démontrés deux fois, pour nous donner l'occasion d'insister sur ce qui caractérise la déduction en regard de l'expérimentation. Nous nous donnons maintenant pour tâche d'expliquer avec une plus grande précision ce qui fait l'essentiel de la démarche déductive. Dans cette intention, examinons encore une autre démonstration facile, celle de la proposition que voici :

Sur une droite, il existe toujours un point C à égale distance de deux points donnés A et B.

Raisonnons tout d'abord avec simplicité.

Imaginons un mobile M partant de A vers B. Au début de sa cour.se, il est tout près de A. Il en est encore si près qu'on peut affirmer sans craindre de se tromper qu'il en est plus près que de B. À la fin de sa course, alors qu'il va arriver en B, qu'il en est aussi proche que l'on veut, on affirmera avec autant de certitude qu'il est plus près de B que de A. Mais tout au long de sa course, le mobile s'éloigne régulièrement de A et se rapproche régulièrement de B. Il faut donc bien (la chose est évidente) qu'il passe par un point intermédiaire C situé à égale distance de A et de B.

À dessein, nous avons donné à cette démonstration une allure naïvement intuitive. Qu'en penserait un géomètre pour qui la géométrie doit être une science rationnelle ? Sans doute, il y verrait bien des lacunes; il y trouverait occasion de poser bien des questions insidieuses ou narquoises.

« Vous demandez d'imaginer un mobile sur une droite, dirait-il. La notion de mobile appartient-elle à la géométrie, est-elle une authentique notion géométrique ?

» Savez-vous d'ailleurs, par avance, et de façon parfaitement claire, ce qu'est un mobile qui a la dimension d'un point ? Les physiciens pourront vous regarder avec envie.

» Vous parlez de distance, de « très près », de « plus près », etc. D'où vous vient la faculté d'en parler avec une innocente sécurité, comme si toutes ces choses nous étaient données d'avance, sans examen ni réflexion préalables ?

» Enfin, au moment décisif, vous faites appel à une évidence commune. Êtes-vous vraiment sûr qu'elle soit plus immédiatement certaine que la propriété à démontrer ? »

« Faites mieux ! » répondrons-nous.

« Ne voyez-vous pas, continuera-t-il, que ce que vous appelez une démonstration n'est qu'un grand pêle-mêle ? La première chose à faire est d'y porter un peu d'ordre.

» Il conviendrait tout d'abord que vous légitimiez l'emploi que vous faites de telles ou telles notions. Comprenez-moi bien, je ne vous dis pas que toutes devraient être définies. Je n'ignore pas ce que PASCAL disait de l'impossibilité de définir authentiquement tous les termes dont on use. Mais il serait tout aussi faux de penser que rien ne peut être défini. Il conviendrait que vous nous préveniez d'avance que certaines notions (dont vous nous donneriez la liste) interviendront dans votre démonstration sans avoir été définies. Cette liste une fois dressée, il devrait naturellement vous être formellement défendu d'introduire aucune nouvelle notion sans l'avoir définie au préalable, sans l'avoir ramenée par des définitions bien claires aux notions privilégiées de la liste dont il vient d'être question.

» En vous soumettant à cette discipline, vous vous rendriez compte, par exemple, de la difficulté qu'il y a à lier proprement la notion de mobile aux autres notions géométriques.

» Mais 1à ne s'arrêteraient pas encore vos obligations. Vous devriez avoir encore le souci de ne pas encombrer votre liste : il conviendrait d'en expulser les termes réductibles, les termes définissables à partir des termes qui resteraient dans la liste.

» Je vous accorde que ce n'est pas toujours chose facile à faire : du moins devriez-vous vous en préoccuper. »

« La liste de vos conseils est-elle achevée ? » demanderons-nous.

« Oui, mais pour ce qui concerne les notions seulement. Il m'en reste tout autant à formuler, pour ce qui concerne les évidences, les propriétés dont on appelle le témoignage sans avoir à les démontrer.

» Vous savez bien en quoi consiste une « vraie » démonstration : c'est une réduction logique de ce qu'il faut démontrer à un certain nombre d'autres propositions de l'une ou de l'autre des deux catégories suivantes :

» 1° celle des propositions déjà démontrées,

» 2° celle des propositions qu'on juge évidentes et que, par conséquent, on ne démontre pas.

» Il est clair que si l'on ne voulait prendre que la première catégorie en considération, jamais une démonstration ne pourrait être exposée dans sa totalité. De toute proposition déjà démontrée, nous pourrions demander comment elle l'a été et quelles sont les propriétés déjà démontrées à partir desquelles elle l'a été — et ainsi de suite indéfiniment.

» Ce même raisonnement nous montre d'ailleurs que toutes les propositions de la première catégorie doivent finalement se réduire à des propositions de la seconde catégorie, à des propositions non démontrées.

» Aussi conviendrait-il que vous fassiez une seconde liste : celle des propositions que vous nous proposerez comme assez claires, assez simples, assez indubitables pour qu'il ne soit pas nécessaire d'en donner la preuve.

» Ceci fait, il vous sera naturellement interdit de faire intervenir aucune proposition nouvelle que vous n'auriez pas valablement démontrée. Vous auriez à vous soumettre strictement à la règle suivante : Toute proposition qui ne figure pas dans la liste des propositions privilégiées réclame sa démonstration, ou la démonstration de sa fausseté. Il n'y a que deux sortes d'énoncés à considérer : d'une part ceux dont il est entendu d'avance qu'ils ne se démontrent pas, et tous les autres, d'autre part. Et ce n'est pas encore tout ! Cette liste des énoncés non démontrés, il conviendrait de ne pas l'allonger arbitrairement, de ne pas l'allonger outre mesure. Il conviendrait d'en expulser les énoncés réductibles, les énoncés démontrables à partir de ceux qui resteraient dans la liste.

» Certes, il est plus facile de formuler cette exigence que de la remplir, mais du moins ne devriez-vous pas vous en désintéresser... »

« Ne pourriez-vous mettre vos conseils en pratique ? ajouterons-nous. Et réviser, à notre profit, la démonstration critiquée ? »

« Mesurez-vous ce que vous exigez ? reprendra-t-il. J'aurais tout d'abord encore quelques remarques à faire quant à la logique de la démonstration. Mais quant à vous refaire, en trois lignes ou en trois pages, la démonstration de tout à l'heure, n'y comptez pas. C'est une affaire de longue haleine. »

« Mais que gagnerions-nous à observer toutes ces précautions ? » demanderons-nous encore...

Et peut-être nous sera-t-il répondu par cette brève et sibylline formule : « Vous y gagnerez de ne plus tomber dans tous les pièges de l'évidence. »

Cette réponse trouvera peu à peu son éclaircissement.

Nous interromprons ici ce débat pour poser à notre tour quelques questions concernant les deux listes de notions et d'énoncés privilégiés, questions auxquelles un partisan du rationnel pur trouverait peut-être inutile ou incommode de répondre.

56. LA BASE AXIOMATIQUE. Il n'était question, dans la discussion qui vient de se terminer, que d'un théorème particulier. Mais il est évident que tout autre théorème se prêterait à des observations analogues; tout autre théorème ou tout groupe de théorèmes. C'est même la géométrie tout entière qu'il convient de soumettre à cet ordre et à cette discipline. Ainsi organisée, elle ne sera, d'ailleurs, qu'un exemple de discipline déductive bien établie.

Voici donc les exigences auxquelles une telle discipline doit satisfaire :

1° elle comportera une énumération complète des notions employées sans définition préalable : ce seront les notions primaires, primitives ou fondamentales de la théorie;

2° elle fournira également la liste complète des énoncés acceptés sans démonstration préalable : ce seront les énoncés primaires, les axiomes de la théorie; toutes les autres notions sont à définir explicitement, tous les autres énoncés à démontrer valablement;

3° elle comportera enfin une connaissance suffisamment claire et complète des moyens grâce auxquels une définition peut se formuler en toute légitimité, et une démonstration s'établir en toute validité.

Les notions primaires et les axiomes forment ensemble la *base axiomatique* de la discipline qui en sortira déductivement. Les axiomes de la base sont des énoncés non démontrés qui portent sur des notions non définies.

Les questions que nous allons poser maintenant ne regarderont pas le jeu des définitions et des démonstrations. Dans une discipline déductive bien organisée, ce jeu peut être suivi en remontant jusqu'à son origine, jusqu'à la base axiomatique. Ce jeu trouve là sa justification et son fondement. Pour procéder à l'édification axiomatique de la discipline, il n'est pas nécessaire de se demander d'où les notions et les énoncés primaires tirent leur légitimité. Une fois la base axiomatique posée, le travail d'édification se réduit à en tirer les conséquences. La base axiomatique représente donc un point de la théorie, qui, par méthode, n'est plus remis en question dans la théorie elle-même.

Mais l'examen critique n'y trouve pas forcément son point d'arrêt. Quelles raisons de méthode pourraient-elles l'empêcher de regarder encore plus loin, de jeter sa sonde encore plus en avant ? Il ne lui est pas interdit d'étudier la genèse des notions primaires et la constitution des postulats. Tout au contraire le fait de laisser la base du système déductif sans justification explicite appelle inévitablement une série de questions complémentaires telles que les suivantes :

Est-il explicable que nous disposions, d'avance, des notions dont le jeu déductif prendra possession ? Où l'efficacité de ces notions trouve-t-elle son fondement ? Et de quel droit posons-nous les axiomes comme valables ? Comment les avons-nous distingués et pour quelles raisons faut-il les accepter ?

Ce sont des questions auxquelles le système déductif ne fournit pas de

réponse, pas même un commencement de réponse. Cela ne signifie cependant pas que ces questions soient stupides et qu'elles n'aient pas à être posées. Elles reprennent leur sens dans un cadre plus large dont la déduction n'occupe qu'un compartiment. Elles comportent une réponse dans une systématique moins stricte, dont l'édification axiomatique ne représente qu'un aspect. Elles appartiennent à une autre discipline à laquelle les deux chapitres précédents apportent leur concours, — à la théorie de la connaissance.

Si pressantes qu'elles puissent être, il nous faut encore les laisser à l'écart. Disposant à peine des éléments nécessaires à l'édification d'une géométrie, il est tout naturel que nous ne disposions pas encore de tous ceux qu'une théorie de la connaissance exigerait. Si nous remettons cette tâche à plus tard, ce n'est donc que pour la traiter à son heure avec les moyens qui lui conviennent.

Ayant ainsi limité et circonscrit le point de vue auquel nous nous plaçons dans ce chapitre, reprenons l'examen des caractères essentiels d'un système déductif.

57. LA DIALECTIQUE DE LA DÉDUCTION. Les notions primitives une fois choisies et les axiomes une fois posés, le jeu de la déduction peut se mettre en branle. Mais il est clair que la chose ne se fait pas d'elle-même, automatiquement. Il faut que l'esprit imagine les raisonnements grâce auxquels les propositions déduites découleront des propositions primitives. L'argumentation qui met tout le système déductif sur pied n'est pas donnée d'avance : il faut l'inventer. Dans cette invention, comme dans toute autre, aucun des trois moments suivants ne pourra faire défaut :

1° *L'esprit ne se défait pas des significations qu'il attribue intuitivement aux notions primaires.* Ainsi, au moment où l'on décrète que les notions de point, de droite et de plan, par exemple, vont jouer le rôle de notion primaire, nous ne renions pas la signification que ces mots ont déjà pour nous. Au contraire, l'esprit reste informé par le sens que les mots ont pris avant leur intervention dans le système déductif.

2° *L'esprit ne fait pas abstraction des buts auxquels cette information primaire répondait : le jeu déductif les reprend à son compte, pour mieux les atteindre.* Ainsi, nous ne saurions oublier que le but de la géométrie est la connaissance des formes étendues et des déplacements que celles-ci peuvent effectuer. Au contraire, toute l'argumentation reste orientée par les fins qui lui sont proposées.

3° À la réflexion, les deux points que nous venons de relever ne souffrent aucun doute. Le troisième est de simple bon sens : *c'est que l'invention déductive n'est pas libre*. La façon dont les propositions du système sont accordées les unes aux autres, la façon, par exemple, dont les théorèmes de la géométrie s'engendrent les uns les autres n'est pas arbitraire. Au cours de notre

argumentation, nous n'aurons pas le droit de prétendre que deux points différents sont confondus, que l'on peut choisir quatre objets différents dans un groupe qui n'en contient que trois, que deux et deux font cinq, que l'on ne saurait compter au delà de mille, etc. Nous sommes au contraire tenus de respecter strictement ce que l'on nomme d'une expression très mal choisie, les lois et les nécessités de la pure logique. Peut-être serait-il plus indiqué de les appeler les lois et les nécessités élémentaires de la pensée : ce sont elles qui, judicieusement employées, soudent les propositions du système déductif les unes aux autres.

On pourrait être tenté d'exiger l'énumération complète de tout ce que l'on devra considérer comme loi, règle ou norme des associations élémentaires. C'est là, pourrait-on penser, une exigence toute naturelle, une exigence *sine qua non*. Une énumération de ce genre n'est-elle pas indispensable pour arriver à la claire conception de ce qu'une argumentation déductive peut et doit être ?

En fait, c'est une exigence d'une portée immense à laquelle nous ne sommes pas en mesure de répondre maintenant. Pour commencer, il nous faudra nous contenter de signaler, en passant, tel ou tel moment de l'argumentation. C'est plus tard seulement que la question d'une énumération exhaustive pourra être reprise, — avec un résultat d'ailleurs impossible à prévoir.

En résumé, voici les caractères principaux d'une argumentation qui doit permettre d'engendrer un système déductif à partir de sa base axiomatique :

1° *elle est informée par la signification des choses dont on parle,*

2° *elle est guidée par les fins qu'on se propose,*

3° *elle est astreinte à respecter certaines associations de pensée élémentaires.*

Nous appellerons une argumentation de ce genre une *dialectique*.

Et maintenant, on peut expliquer en deux mots à quelles conditions il est possible d'établir un système déductif :

1° *il faut premièrement avoir choisi une base axiomatique,*

2° *il faut ensuite disposer d'une dialectique appropriée.*

Sans la base, la dialectique tourne à vide; sans la dialectique, la base ne conduit à rien de plus qu'elle-même. Seule, leur association fournit à l'invention créatrice la matière et l'instrument dont elle saura se servir pour ériger un édifice rationnel.

58. LA MÉTHODE AXIOMATIQUE. On le voit bien : la méthode axiomatique dont nous venons d'expliquer les règles fondamentales ne fait que donner corps à une exigence toute naturelle. Elle entend établir un ordre très clair dans les démonstrations d'une théorie; elle entend surtout éviter toute confusion entre les énoncés de la théorie qui serviront de prémisses et ceux qui en seront des conséquences. Les moyens

qu'elle préconise sont extrêmement simples : une certaine économie dans le choix des moyens, une certaine rigueur dans leur mise en œuvre.

Ce sont là des exigences assez banales, et il est souvent fastidieux de les observer strictement. Leur importance ne s'impose pas du premier coup. On peut s'étonner qu'il suffise de si peu pour fonder une technique — une technique mentale — de la spécification du rationnel. Il faut, pensons-nous, en faire l'expérience pour bien s'en convaincre.

La méthode axiomatique ne prend tout son relief que par la pratique de l'édification axiomatique. Et les quelques remarques qui vont suivre ne prendront, elles aussi, toute leur signification qu'au moment où se feront sentir les difficultés inhérentes à cette édification.

Une théorie axiomatique se déduit entièrement de sa base axiomatique : celle-ci est-elle unique et les axiomes qui la composent sont-ils univoquement déterminés ? Tout au contraire.

Pour une part (pour une part seulement), elle dépend de notre choix. Il peut arriver que la dialectique appliquée à deux bases formées d'axiomes différents, se rapportant à des notions qui ne sont pas toutes les mêmes, conduise à deux édifices rationnels équivalents — c'est-à-dire à deux édifices tels que tout énoncé juste de chacun d'eux soit aussi un énoncé juste de l'autre. Toute conséquence de l'une des bases est alors axiome ou conséquence de l'autre et réciproquement. Deux bases de ce genre seront dites, elles aussi, équivalentes.

La faculté de changer de base axiomatique influence considérablement le rôle (la nature) des axiomes dans une théorie déductive. Dès qu'on peut, pourvu qu'on le veuille, promouvoir une conséquence au rang d'axiome, aucun énoncé ne porte plus sa qualité d'axiome comme un attribut intrinsèque. « Être un axiome » n'est plus qu'une fonction relative à une façon plus ou moins arbitraire de fixer le fondement d'un édifice axiomatique. C'est un point sur lequel nous reviendrons, d'ailleurs, avec insistance.

Il peut arriver, nous l'avons dit, qu'une base axiomatique comprenne, sans qu'on s'en soit aperçu, des axiomes inutiles, c'est-à-dire des énoncés démontrables à l'aide des autres axiomes seulement. Une base ainsi surchargée sera dite *surabondante*; une base au contraire dont aucun axiome n'est inutile (au sens que nous venons de préciser) sera dite *intègre*.

Toute édification axiomatique s'accompagne d'un souci d'économie dans le choix et la mise en action des moyens, aussi ressent-on la surabondance comme une faute de méthode. Mais est-ce là un grave défaut ?

Il est souvent très malaisé de reconnaître qu'une base est surabondante, ou de démontrer qu'elle est intègre. Comment prouver qu'un énoncé ne peut pas être déduit de certains autres (qu'il en est déductivement indépendant) ?

Remarquons que si l'on fait état d'un axiome de trop (d'un énoncé qui usurpe en quelque sorte son nom et sa fonction d'axiome), on a recours, par son intermédiaire, aux axiomes dont on pourrait le déduire. La validité des démonstrations dans lesquelles il intervient reste donc entière. La solidité de l'édifice axiomatique n'en est pas compromise.

Cela justifie l'attitude que nous serons obligés de prendre, au début surtout : l'intégrité de la base axiomatique restera à l'arrière-plan de nos préoccupations. Nous la regarderons plutôt comme une exigence esthétique, comme une qualité désirable, certes, mais non comme un caractère indispensable.

Signalons encore un autre emploi (que nous aurons à faire) de la notion d'équivalence.

Deux axiomes A et A′ sont dits équivalents, par rapport à un groupe d'axiomes G si A′ est déductible de G augmenté de A, et si, réciproquement, A est déductible de G augmenté de A′.

En termes plus simples, A et A′ peuvent se remplacer l'un l'autre pour compléter G.

Il est enfin clair qu'une base axiomatique n'est admissible que si elle n'engendre pas de contradiction, que si elle ne donne pas lieu à des conséquences incompatibles entre elles. Mais la question de la non-contradiction d'un système d'axiomes est une des plus profondes et des plus difficiles qui soient. Tant que le travail interne de l'édification axiomatique retiendra notre attention, il nous faudra également la laisser à l'écart. Mais plus tard, quand la géométrie axiomatique viendra prendre place dans un cadre qui la dépassera, cette question reprendra toute son actualité et toute son importance.

L'édification axiomatique de la géométrie élémentaire du plan

59. OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES. Nous allons maintenant mettre la main à la « pâte axiomatique ». Sur l'exemple de la géométrie plane élémentaire, nous montrerons comment une base axiomatique se choisit, comment la dialectique de la déduction s'y insère et comment la discipline s'édifie.

Mais avant de le faire, il nous faut prévenir une erreur d'interprétation éventuelle. Qu'on ne nous prête pas l'intention de donner une image fidèle et complète de toutes les recherches axiomatiques auxquelles la géométrie plane a déjà donné lieu.

Notre dessein est tout différent. Ce que nous entendons expliquer ici, décrire et commenter, c'est la méthode axiomatique elle-même, ce sont les péripéties essentielles, les moments importants de l'édification axiomatique. Nous ne pourrions le faire sans traiter avec soin un exemple d'une certaine ampleur : la géométrie plane est l'exemple tout désigné. Mais nous n'aurons pas le souci de

tout dire; si nous voulions ne rien omettre de ce qui, en géométrie plane seulement, présente un intérêt axiomatique réel, nous perdrions bientôt notre but de vue.

Qu'il soit donc bien entendu que ce qui va retenir avant tout notre attention, à travers un exemple privilégié, c'est l'axiomatisation en tant que méthode, en tant que technique mentale *sui generis*, en tant que moyen de spécification du rationnel.

Avant de passer au choix des notions primitives et à l'énoncé des axiomes qui vont servir de fondement à la géométrie « rationnelle », deux observations préalables sont encore nécessaires.

La première, c'est qu'il n'est pas indispensable de disposer déjà de la liste complète des notions primaires et de l'ensemble de tous les axiomes pour que la déduction puisse se mettre en marche. Tout au contraire, il est beaucoup plus commode de n'introduire les notions fondamentales et les axiomes correspondants que par groupes successifs. Un premier groupe d'axiomes pourra fort bien s'établir sur un premier groupe de notions, ces premières notions formant à elles seules l'objet de ces premiers axiomes.

Ce premier groupe pourra comporter une série de conséquences qu'il sera peut-être utile ou intéressant de tirer avant de songer à étendre la base axiomatique.

Cela fait, un second groupe de notions pourra venir prendre place dans le système en construction. Elles figureront dans un second groupe d'axiomes, mais elles n'en formeront pas exclusivement l'objet, car les notions introduites les premières devront aussi être axiomatiquement liées aux notions introduites après elles. En d'autres termes :

le premier groupe d'axiomes portera sur le premier groupe de notions primitives;

et le second groupe d'axiomes sur l'ensemble des notions du premier et du second groupe.

Les notions du troisième groupe seront alors introduites à leur tour..., et ainsi de suite jusqu'à ce que la base axiomatique soit complète, c'est-à-dire jusqu'à ce que toutes les notions et tous les axiomes que l'édification projetée réclame soient entrés dans le jeu déductif.

Celui-ci gagne beaucoup en clarté s'il ne touche tout d'abord que les notions et les axiomes du premier groupe, si donc il ne cherche à atteindre que des conséquences relatives aux notions de ce premier groupe : ces conséquences forment un premier palier de l'édifice à construire. Le second palier sera formé des propositions relatives à l'ensemble des notions du premier et du second groupe : ce sont les conséquences de l'ensemble des axiomes du premier et du second groupe..., et ainsi de suite.

La seconde observation concerne la nature des conséquences. Il serait faux

d'imaginer que la déduction, partant des axiomes, va nous conduire sans délai à des propositions d'un intérêt géométrique exceptionnel. Bien entendu, les conséquences auxquelles nous aboutirons ne seront pas autre chose que les théorèmes habituellement démontrés à l'école. Personne ne s'en étonnera. Mais peut-être s'étonnera-t-on de rencontrer au nombre des conséquences, au nombre des propositions strictement déduites, un certain nombre d'énoncés que les traités de géométrie élémentaire acceptent comme vrais sans même y prendre garde. À propos de ces conséquences, on se trouve pris dans une alternative assez gênante :

les admet-on au nombre des axiomes, lorsqu'on sait comment on peut les déduire : on contrevient certainement à la netteté de l'édification axiomatique en partant délibérément d'une base surabondante;

les démontre-t-on dans toutes les règles alors que leur simplicité ne paraît pas moindre que celle de certains axiomes : on se livre à un exercice fastidieux dont l'intérêt n'est pas toujours visible d'emblée.

Comment choisir ? Nous l'avons déjà dit, nous n'attacherons qu'une importance relative à purger la base axiomatique de ses axiomes « inutiles » (du point de vue strictement déductif). Mais d'autre part, une fois la base axiomatique posée, il ne doit plus être permis de transiger. Cela explique que nous ne tranchions pas l'alternative d'avance, une fois pour toutes. Nous nous laisserons guider selon les cas, par les nécessités de l'exposé.

Ajoutons enfin que les indications précédentes ne sauraient remplacer une certaine pratique de l'axiomatisation. Il faut, au contraire, avoir mis la main à la « pâte axiomatique » pour bien en saisir la portée.

60. LES CINQ GROUPES D'AXIOMES. Les axiomes que nous allons mettre à la base de la géométrie, — en nous bornant pour l'instant à la géométrie plane, — se répartissent en cinq groupes dont voici la liste :

I les axiomes de l'incidence,
II′ les axiomes de l'ordination sur la droite,
II″ les axiomes de l'ordination dans le plan,
III′ les axiomes de la congruence sur la droite,
III″ les axiomes de la congruence dans le plan,
IV les axiomes de la continuité (ou de la mesure),
V l'axiome (postulat) des parallèles.

Nous allons passer à l'examen de chacun de ces groupes et chercher à caractériser les « paliers géométriques » auxquels ils correspondent. Mais gardons-nous d'attribuer à ce travail régulateur une vertu magique qu'il ne saurait avoir. Ne nous imaginons pas qu'il suffise d'appeler tel ou tel de nos jugements « un axiome » ou « une proposition primitive » pour lui conférer une

nouvelle nature, pour en changer l'essence. Ce qui entre dans les axiomes, ce que les axiomes formulent, ce sont les notions et les idées qui sont déjà nôtres avant l'axiomatisation. Un axiome, pris indépendamment des autres, n'ajoute rien à la signification des mots qui le composent, il n'ajoute rien à la justesse de l'idée qu'il exprime : il n'est que l'expression d'une de nos pensées.

Ainsi donc, nous abordons le travail axiomatique en apportant d'avance les notions de point, de droite et toutes celles qui figureront dans les axiomes. Comment ces notions ont-elles pris naissance en nous ? Et d'où leur vient leur efficacité ? Ce sont des questions que nous décidons de ne pas nous poser en cet endroit. Il est trop tard, ou trop tôt, pour y répondre. Le fait est que nous disposons de ces notions. Elles sont non seulement en notre possession, mais en les concevant, nous imaginons déjà entre elles certaines relations, certaines dépendances, certaines possibilités, certaines nécessités. Encore une fois, ne nous arrêtons pas à la question de savoir pourquoi et comment nous procédons à ces associations mentales. Constatons simplement que nous en sommes capables.

L'INCIDENCE

61. LA BASE AXIOMATIQUE. Envisageons, parmi les relations que nous concevons entre un point et une droite, celle qui s'exprime par l'une ou l'autre des propositions suivantes :

un point se trouve sur une droite,
un point appartient à une droite,
une droite passe par un point,
une droite contient un point, etc.

Nous l'appellerons la relation d'incidence. Envisagée pour un point A et pour une droite a, nous la représenterons par le symbole J(a,A).

Cette relation (telle que nous la concevons avant même d'en faire un des éléments de notre construction axiomatique) est logiquement régulière. Cela signifie que, si A et a sont un point et une droite déterminés, J(a,A) n'est jamais incertaine. Ou bien elle est satisfaite, ou bien il est sûr qu'elle ne l'est pas. Jamais il n'y a de doute ou d'indétermination à ce propos.

Il peut paraître superflu d'insister sur ce caractère de la relation d'incidence. Le plus souvent, la régularité logique des relations figurant dans une base axiomatique est claire d'avance et l'on se dispense d'y insister. Il est cependant essentiel de bien définir leur domaine de validité.

Conçue en même temps que des notions de point et de droite, la relation d'incidence donne lieu aux quatre énoncés suivants. Ils sont à considérer comme quatre règles que, dans notre façon de voir, nous ne manquons jamais d'observer :

Axiome I, 1. — *Par deux points différents, il passe au moins une droite.*

En d'autres termes : pour deux points différents, A et B, il existe au moins une droite a telle que l'on ait à la fois

$$J(a,A) \qquad J(a,B).$$

Axiome I, 2. — *Par deux points différents, il passe au plus une droite.*

Axiome I, 3. — *Sur toute droite, il y a au moins deux points différents.*

Axiome I, 4. — *Il existe au moins trois points qui ne soient pas tous sur la même droite*[1].

Ces quatre axiomes forment le premier des cinq groupes à examiner : le groupe de l'incidence. Quant au premier groupe de notions primitives, il comprend les notions de point et de droite et celle de l'incidence d'un point et d'une droite. Ajoutons, pour ne rien oublier, que ce groupe contient encore une *convention verbale* : celle qui établit les équivalences verbales entre les expressions « passer par », « être sur », « être incidents », etc., lorsqu'il s'agit de points et de droites.

62. QUELQUES DÉDUCTIONS. À eux seuls, les axiomes de ce groupe comportent peu de conséquences dignes d'être retenues. Nous en citerons cependant deux qui vont nous permettre d'attirer l'attention sur un trait caractéristique de la méthode axiomatique.

Théorème 1. — *Par deux points différents, il passe exactement une droite.*

Est-ce là un axiome ? Non, car c'est une proposition différente de chacun des quatre axiomes déjà énoncés. Il n'est pas non plus réductible à l'un de ceux-ci par une simple transformation grammaticale ou par une des équivalences verbales adoptées pour rester en accord avec les habitudes du langage.

Dès lors, la méthode axiomatique exige une prise de position d'une intransigeance extrême : s'il est bien entendu que l'énoncé précédent ne doit pas être adjoint aux axiomes déjà posés, et si l'on veut avoir le droit d'en user comme d'une proposition valable, ce doit être un théorème, il doit être déduit.

Comment ? La chose est ici particulièrement simple.

Tout l'effort déductif se réduit à rapprocher les axiomes I, 1 et I, 2 l'un de l'autre, et à remarquer que « un au moins » et « un au plus » signifient à eux deux « exactement un ». Cette équivalence ne fait l'objet d'aucun axiome spécial : elle appartient à la dialectique de la déduction.

Il saute aux yeux, d'ailleurs, que le théorème 1 peut à lui seul remplacer les

[1] Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer ces trois derniers axiomes à l'aide du symbole J(a,A).

deux premiers axiomes. N'est-ce pas perdre son temps que d'en expliciter la déduction ? Y a-t-il la moindre nécessité à le faire ? Répétons-le, les précautions en apparence inutiles avec lesquelles nous avons traité le théorème 1 nous permettent de poser le doigt sur un moment capital : elles nous permettent de signaler une première intervention de la dialectique de la déduction. Ce doit être le souci constant de l'axiomatisation de ne pas faire de confusion entre ce qui ressortit à la dialectique et ce qui est matière axiomatique (ici matière géométrique) sur laquelle elle s'exerce.

Sur ce point précis, la méthode ne doit souffrir aucun compromis, elle ne doit montrer aucune défaillance. Elle n'est ce qu'elle est qu'en vertu de son intransigeance de principe.

Elle est ou elle n'est pas, selon qu'on accepte l'attitude indiquée sans aucune compromission, ou qu'on ne l'observe pas.

Cependant, s'il fallait conserver dans la pratique cette attitude intransigeante jusque dans les moindres détails, l'axiomatisation deviendrait une entreprise rebutante et fastidieuse. Aussi se permet-on quelques « licences axiomatiques », étant certain que le lecteur ou l'auditeur y suppléera.

L'une de ces licences serait, par exemple, d'énoncer le théorème 1 sans démonstration ni commentaire.

Théorème 2. — *Deux droites différentes passent au plus par un point commun.*

Examinons encore cet énoncé avec les plus sévères exigences. L'ayant appelé théorème, c'est donc que nous avons reconnu qu'il n'est pas au nombre des axiomes énoncés, et qu'il n'est pas non plus une transformation par convention verbale de l'un ou l'autre de ceux-ci : c'est donc que nous avons déjà exprimé l'intention de le démontrer.

Pour le démontrer, nous allons nous servir d'un raisonnement indirect, du procédé dit « par réduction à l'absurde ».

Le théorème prétend que seules les deux éventualités suivantes peuvent se présenter :

1) il n'y a aucun point qui soit à la fois sur l'une et l'autre droite;

2) il existe exactement un point, qui se trouve à la fois sur l'une et l'autre droite.

Par convention verbale, on dit dans le premier cas que les deux droites ne se coupent pas; dans le second, qu'elles se coupent en un point qui est leur point d'intersection ou leur point commun.

Si le théorème 2 est en défaut, c'est qu'il existe deux droites différentes dont le nombre des points d'intersection n'est ni zéro ni un. Que dire de ce nombre ? C'est encore une fois la dialectique de la déduction qui répond. C'est elle qui nous permet d'affirmer que le contraire de « zéro ou un », c'est « deux au moins ». La négation du théorème 2 s'énonce donc ainsi :

il existe deux droites différentes ayant au moins deux points en commun.

Ceci fait, la dialectique de la déduction intervient encore une fois pour confronter ce résultat avec l'axiome I, 2 (ou avec le théorème 1) et constater qu'ils sont contradictoires.

La négation du théorème 2 est donc fausse; le théorème lui-même est ainsi démontré.

L'ORDINATION SUR LA DROITE

63. GÉNÉRALITÉS. Le but du groupe d'axiomes qui va être introduit maintenant est de faire entrer dans le système déductif les notions et les propriétés relatives à l'ordination des points d'une droite. Un autre groupe étendra plus tard cette prise de possession axiomatique aux éléments du plan. Nous ne nous lasserons pas de le répéter : au niveau où nous en sommes, ce n'est pas l'axiomatisation qui crée le contenu des notions et la signification des énoncés, c'est au contraire l'intuition qui lui fournit la matière qu'elle a mission d'organiser rationnellement. Cette matière est assez riche et diverse. La façon dont nous concevons la succession des points sur une droite inspire et dirige l'emploi d'un assez grand nombre d'expressions. Donnons-en quelques exemples :

le point B se trouve entre les points A et C,
le point B est sur le segment AC,
le point B appartient à l'intervalle AC,
les points A et C se trouvent de part et d'autre de B,
les points B et C se trouvent d'un même côté de A,
les segments AB et BC ont le même sens, etc...

Nous n'avons pas à nous plaindre du manque de notions appropriées, ni à nous reprocher de ne pas savoir nous en servir. Pour les fins d'une organisation déductive, nous souffrons plutôt d'un embarras de richesses. Toutes les notions qui interviennent dans les énoncés précédents ne sauraient être admises à la fois comme notions primitives. II faut choisir, et se décider pour l'une ou l'autre des nombreuses possibilités.

Nous allons faire deux essais, le premier avec la notion primitive « de même sens », le second avec la notion primitive « entre ».

Premier essai
La notion « de même sens » comme notion primitive

64. LA BASE AXIOMATIQUE. Deux points A et B, cités dans l'ordre littéral AB ou dans l'ordre BA, définissent chaque fois un *segment orienté* : nous considérons donc les segments AB et BA comme

différents. A et B en sont appelés les extrémités. Cette définition présuppose que A et B ne soient jamais identiques.

Soient AB et CD deux segments orientés quelconques. Imaginons entre eux une relation s'exprimant par les mots : AB est de même sens que CD. Et, pour notre commodité, convenons d'écrire

$$\text{AB } p \text{ CD}$$

lorsque cette relation est réalisée, et

$$\text{AB } np \text{ CD}$$

lorsqu'elle ne l'est pas. Nous l'appellerons aussi la « relation p ».

Cette relation, telle que nous l'imaginons, comporte un certain ensemble de propriétés (que personne ne songe à mettre en doute), dont quelques-unes vont être portées au rang d'axiomes. Celles auxquelles nous conférons cette fonction ne se distinguent d'ailleurs pas des autres par quelque marque particulière. À l'essai, il se révèle qu'elles se prêtent assez naturellement au rôle que nous leur attribuons.

La première remarque à faire concerne la régularité logique. Tant que les deux segments qui figurent dans la relation p sont de vrais segments, c'est-à-dire tant que ni pour l'un ni pour l'autre les deux extrémités ne se confondent pas, la relation est logiquement régulière : si l'on n'a pas

$$\text{AB } p \text{ CD}$$

c'est qu'on doit avoir

$$\text{AB } np \text{ CD}$$

et réciproquement.

Dans certaines spéculations géométriques, il est parfois utile de prendre en considération des segments « nuls », des segments tels que AA ou BB. C'est à condition de les exclure que la relation p pourra rester logiquement régulière.

Voici maintenant les six premiers axiomes du deuxième groupe :

Axiome II′, 1. — *La relation p est symétrique.*

C'est-à-dire que les deux expressions

$$\text{AB } p \text{ CD} \qquad \text{et} \qquad \text{CD } p \text{ AB}$$

sont équivalentes; chacune d'elles étant conséquence de l'autre.

Axiome II′, 2. — *La relation p est transitive.*

En d'autres termes : si l'on a à la fois AB p CD et AB p EF, on a nécessairement aussi CD p EF. En symboles[1] :

$$\left.\begin{matrix}\text{AB } p \text{ CD}\\ \text{AB } p \text{ EF}\end{matrix}\right\} \rightarrow \text{CD } p \text{ EF}$$

Axiome II′, 3. — *La relation p est réflexive.*

$$\text{AB } p \text{ AB}.$$

Axiome II′, 4. — AB p BC $\rightarrow$ AB p AC.

La figure 11 peut tenir lieu de justification.

Axiome II′, 5. — AB np CD $\rightarrow$ AB p DC.

C'est-à-dire : si AB n'a pas le même sens que CD, il a le même sens que DC.

Axiome II′, 6. — AB np BA.

C'est-à-dire : AB et BA n'ont jamais le même sens.

La liste des axiomes de ce groupe n'est pas encore complète. Ceux qui précèdent entraînent cependant déjà toute une série de conséquences.

65. LES AXIOMES D'ÉQUIVALENCE. Les trois premiers de ces axiomes jouent un rôle à part. Ils ne conviennent pas seulement à la relation p que satisfont deux segments « de même sens ». Ils formulent trois propriétés que doivent posséder toutes les relations d'égalité ou d'équivalence, que ce soit l'égalité numérique, l'équivalence de poids, de volume, l'identité de couleur, ou par exemple, l'appartenance à une même profession.

En un mot, ce sont les trois propriétés fondamentales de la relation d'appartenance à une même catégorie : nous les appellerons les axiomes de l'équivalence[2].

Ces trois axiomes se trouvent réalisés d'eux-mêmes, grammaticalement, dans les règles d'emploi des mots « le même » ou « la même ».

L'axiome II′, 1, par exempte, correspond au fait que les trois expressions suivantes sont grammaticalement équivalentes :

X possède le même attribut D que Y,

Y possède le même attribut D que X,

[1] La flèche indique la conséquence logique.

[2] Dans ce troisième chapitre, la question de l'indépendance mutuelle des axiomes adoptés restera secondaire. Cette remarque est ici déjà à sa place. Par la suite, elle pourrait être répétée à bien des reprises.

X et Y ont le même attribut D,
quels que soient les sujets X et Y et quel que soit l'attribut D.

II′, 2 correspond à l'équivalence des deux expressions suivantes (en ce qui concerne Y et Z) :

X a le même attribut D que Y et que Z,

Y et Z ont le même attribut D.

II′, 3 est à la base même de l'idée d'attribut réel et déterminé.

Si simples qu'elles soient, ces remarques ont leur importance. Elles nous suggèrent une curieuse idée. Il aurait été très naturel d'appeler la relation p la relation d'identité du sens de deux segments. En la nommant ainsi, nous aurions anticipé sur les trois axiomes de l'équivalence. Sans les énoncer, nous les aurions déjà introduits, par la façon même dont la grammaire nous eût obligé à parler de l'identité. Pour en tenir compte, il suffit d'observer les règles du langage courant. Nous fiant à un usage correct de la langue, nous aurions ainsi pu supprimer les trois axiomes de notre liste.

Mais, en fait, aurions-nous renoncé à nous en servir ? Les règles qu'ils formulent seraient-elles devenues superflues ? En aucun cas ! Elles n'auraient fait que passer d'un compartiment dans un autre. Exclues de la base axiomatique, elles feraient tout simplement partie des règles de la dialectique.

À peine sommes-nous engagés dans notre axiomatisation que déjà nous découvrons un fait aussi imprévu qu'important : la ligne de démarcation entre la dialectique et la base axiomatique n'est pas d'une rigidité absolue. Elle ne nous est pas complètement imposée. Pour une part, elle dépend de notre choix. Elle marque l'état d'un certain arbitrage entre l'implicite et l'explicite, entre l'intuitif et le formalisé. C'est là une remarque d'une grande portée.

Notons ici qu'il serait assez vain de ne pas se plier à l'usage et de ne pas admettre certaines équivalences verbales qu'il faudrait faire effort pour éviter. Au lieu de dire : AB et CD sont de même sens, nous dirons aussi qu'ils *ont* le même sens, que l'orientation de l'un est la même que celle de l'autre, etc.

Nous disions que la répartition des compétences entre la base axiomatique et la dialectique est pour une part affaire de choix. Le nôtre est fait. Pour la clarté et la précision de la déduction, il y a avantage à faire passer ces trois axiomes, pour autant qu'ils s'appliquent au sens des segments, du rang de règles non formulées (bien que toujours observées) de la dialectique au rang de règles énoncées de l'axiomatique.

66. QUELQUES DÉDUCTIONS. Nous allons maintenant procéder à quelques déductions. Remarquons que certains de nos axiomes ont la forme d'une implication, c'est-à-dire la forme

$$F \rightarrow G \qquad \text{(F entraîne G)}$$

Bien entendu, la dialectique de la déduction comprend la logique de l'implication d'après laquelle, par exemple, si F est juste, G l'est aussi. Cette règle est d'un emploi si commun que nous nous dispenserons d'en marquer spécialement l'emploi.

Théorème 3. — *Si le segment AB a le même sens que BC, AC a aussi le même sens que BC* (fig. 11).

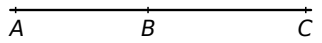


FIG. 11

En symboles :

$$AB\ p\ BC \rightarrow AC\ p\ BC.$$

On observera, pour commencer, que l'énoncé précédent n'est pas un axiome. Il est en particulier différent de l'axiome II′, 4 bien qu'il lui soit très analogue.

L'hypothèse est donc

(1) $$AB\ p\ BC.$$

Elle forme le membre de gauche de II′, 4 :

$$AB\ p\ BC \rightarrow AB\ p\ AC.$$

Nous pouvons donc poser

(2) $$AB\ p\ AC$$

Répétons l'hypothèse AB p BC.

(1) et (2) formulent précisément les conditions de validité de l'axiome II′, 2. La règle d'implication s'y applique encore une fois, et nous fournit

$$AC\ p\ BC.$$

C'est la formule à démontrer.

La démonstration précédente n'a rien d'exceptionnel. Mais qu'on veuille bien remarquer que chaque progrès vers la conclusion s'y accompagne de sa justification explicite. À chaque pas, nous avons invoqué soit une hypothèse, soit un axiome, soit un procédé de la dialectique.

C'est parce que nous avons strictement observé cette discipline que notre démonstration est axiomatiquement correcte.

Théorème 4. — *Si AB et CD sont deux segments orientés, l'une ou l'autre des deux éventualités : 1) AB p CD, 2) AB p DC est vraie, et l'une des deux seulement.*

Cet énoncé est équivalent aux deux axiomes II′, 5 et II′, 6. Grâce à cette qualité, il va nous faciliter quelques démonstrations ultérieures.

Il est d'ailleurs une conséquence presque directe du fait que p est une relation logiquement régulière.

Supposons que la première éventualité ne soit pas réalisée. La régularité logique exige alors qu'on ait

$$\text{AB } np \text{ CD}$$

et l'axiome II′, 5 permet d'en inférer

$$\text{AB } p \text{ DC},$$

ce qui est précisément la seconde éventualité.

On montre de façon analogue que 1) doit être juste, si 2) ne l'est pas.

Enfin, 1) et 2) ne peuvent être justes à la fois, car l'axiome II′, 2 permettrait d'en tirer

$$\text{CD } p \text{ DC},$$

ce qui est interdit par l'axiome II′, 6.

Théorème 5. — *Si AB a le même sens que CD, BA a aussi le même sens que DC.*

En symboles :

$$\text{AB } p \text{ CD} \rightarrow \text{BA } p \text{ DC}.$$

L'hypothèse du théorème est donc

$$\text{AB } p \text{ CD}$$

et sa conclusion

$$\text{BA } p \text{ DC}.$$

Nous allons procéder par réduction à l'absurde; en d'autres termes, nous supposons subsidiairement qu'il puisse arriver (au moins une fois) que l'hypothèse ne conduise pas à la conclusion.

Mais si l'éventualité

$$\text{BA } p \text{ DC}$$

n'est pas réalisée, c'est l'éventualité contraire

$$\text{BA } np \text{ DC}$$

qui l'est. Sur quoi II′, 5 devient applicable :

$$\text{BA } np \text{ DC} \rightarrow \text{BA } p \text{ CD}.$$

Donc, d'après la règle d'implication

$$\text{BA } p \text{ CD}.$$

Répétons l'hypothèse véritable

$$\text{AB } p \text{ CD}$$

et transformons les deux dernières propositions en vertu de II′, 1 :

$$\text{CD } p \text{ BA}, \qquad \text{CD } p \text{ AB}.$$

L'axiome II′, 2 est applicable. Il en découle

$$\text{BA } p \text{ AB}.$$

Or cette dernière conséquence est en contradiction directe avec l'axiome II′, 6.

La supposition subsidiaire de notre raisonnement conduit ainsi à une impossibilité. Elle doit être rejetée. On aura donc toujours

$$\text{AB } p \text{ CD} \rightarrow \text{BA } p \text{ DC}.$$

Une remarque et une comparaison avant de continuer.

67. LA FABLE DE LA MAISON AUX MILLE FENÊTRES. Il est clair que nous n'avons jamais douté de la validité des énoncés que nous avons mis tant de soin à établir déductivement. Les résultats étaient évidents d'avance. Telles que les notions primitives sont dans notre intelligence et telles que sont les relations que nous établissons entre elles, les énoncés présentés comme des conséquences nous sont immédiatement clairs. Dans ces conditions, dira-t-on, pourquoi prendre la peine de les déduire aussi soigneusement et pourquoi en inventer des démonstrations ? Nous l'avons dit : une question de ce genre témoigne une méconnaissance entière des buts et des intentions de la méthode axiomatique. Et pourtant, il est difficile de ne pas se la poser.

Nous croyons donc utile d'avoir recours à une comparaison dont les éléments soient pris dans un monde à la fois réel et imaginaire. Lorsqu'il nous arrivera d'y faire allusion, nous l'appellerons la comparaison de la maison aux mille fenêtres.

L'homme qui ne néglige, pour acquérir la connaissance de l'espace, aucun de ses moyens naturels d'informations peut être comparé à l'occupant d'une maison à mille fenêtres, ouvertes sur la réalité environnante. Toutes lui sont utiles et il n'y en a aucune dont il songe à se passer.

Un jour, cependant, d'importantes raisons que notre fable axiomatique n'a pas besoin d'exposer en détails, l'engagent à mettre au point un procédé réduisant dans la mesure du possible le nombre des fenêtres utilisées. Ce procédé comporte deux moments principaux : tout d'abord, l'observation directe par les fenêtres dont l'emploi reste permis, fenêtres qu'il appelle ses fenêtres axiomatiques, tandis que toutes les autres portent le nom de fenêtres interdites. Ensuite, une technique spéciale (qu'il appelle sa dialectique) et qui lui permet de reconstituer après coup, à partir des renseignements fournis par les fenêtres axiomatiques, tout ce qu'il apercevrait aussi par l'ensemble des fenêtres interdites.

Notons qu'il ne mure pas les fenêtres interdites. Elles ne sont d'ailleurs véritablement interdites que dans la mise en action de son procédé qu'il nomme une reconstruction rationnelle du monde extérieur. Bien plus, il admet même de s'en servir encore, plus ou moins fréquemment, mais uniquement pour orienter et pour contrôler le travail dialectique; il reste entendu que le procédé de rationalisation ne doit pas être compromis par la remise en usage des fenêtres interdites.

L'exécution d'un tel projet, ajoute notre histoire, ne saurait aller sans de nombreux essais. En s'y livrant, l'occupant de la maison aux mille fenêtres ne manqua pas de faire un certain nombre de découvertes. Il n'était pas sûr d'avance de trouver une solution du problème qu'il se posait : or il en découvrit plusieurs. Il remarqua que certains groupes de fenêtres pouvaient être considérés comme équivalents pour l'emploi qu'il en voulait faire, car l'observation (secondée par la dialectique) à partir de l'un de ces groupes lui fournissait tout ce qui pouvait provenir de tel autre : il ne dépendait que de lui de décider lequel de ces groupes serait conservé pour en faire une base axiomatique d'observation.

Il arrivait que certains groupes ne lui rendaient qu'une partie de la réalité environnante. Pour étendre sa zone d'action, il pouvait procéder à diverses adjonctions successives. Il pouvait arriver que l'adjonction d'une nouvelle fenêtre en rendît une autre inutile, pourtant nécessaire jusque-là, etc.

Ne nous attardons pas et passons à la moralité : tout pouvait n'être qu'un jeu sans conséquence; mais celui qui l'inventa s'en trouva récompensé. Non seulement la réalité qu'il connaissait déjà lui fut rendue intégralement : elle lui revint comme une connaissance approfondie.

68. REPRISE DE LA DÉDUCTION. Revenons maintenant à notre construction axiomatique et démontrons le théorème suivant.

Théorème 6. — *Tout point d'une droite partage celle-ci en deux domaines distincts.*

Ce théorème est certainement l'un de ceux dont nous disions plus haut qu'ils ne sont pas moins évidents que les axiomes de base.

En particulier, si nous en illustrons l'énoncé par la figure 12, sa validité ne fait plus aucun doute : c'est bien certainement l'une des propriétés de la « droite telle que nous la concevons ». Tout commentaire sur la position des deux domaines en question est superflu. Pourquoi la démonstration ne l'est-elle pas ? C'est que, dans notre construction axiomatique, l'examen de la figure précédente est une observation interdite et que la mise en œuvre de la connaissance intuitive qui s'y rapporte est un moyen illégitime.

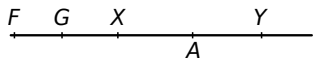


FIG. 12

Comme l'occupant de la maison aux mille fenêtres, nous ne renonçons pas à nous en servir, mais seulement de façon secondaire pour orienter l'axiomatisation vers ses buts, pour éclairer et pour contrôler la déduction.

La déduction reste cependant le moment primaire de l'entreprise rationnelle. Y renoncer ici ou là, sans autre loi que notre caprice, ce serait renoncer au principe même de la méthode.

Voici donc une démonstration qui s'efforce de mettre le côté dialectique en lumière.

Soit A un point quelconque de la droite. Montrons tout d'abord qu'il divise la droite en deux domaines distincts.

Fixons dans ce but un segment FG; il déterminera un sens sur la droite. À l'aide de ce segment et de A, les points de la droite (A excepté) se trouvent maintenant répartis en deux classes :

celle des X tels que XA *p* FG,

celle des Y tels que AY *P* FG.

Tout point de la droite tombe dans l'une ou l'autre de ces catégories (théorème 4).

Celles-ci sont d'ailleurs distinctes : si l'on suppose qu'un X est aussi un Y, on obtient immédiatement, en appliquant II′, 1 et II′, 2, XA *p* AX, ce qui est interdit par l'axiome II′, 6.

Par convention, nous dirons que ces deux classes forment deux demi-droites opposées.

Mais la détermination de celles-ci dépend-elle du choix du segment auxiliaire FG ?

Il est bien facile de voir que rien ne change si l'on remplace FG par un autre segment RS. En effet, les deux éventualités suivantes sont à considérer (théorème 4) :

1) FG *p* RS 2) FG *p* SR.

Dans le premier cas, la relation valable pour les X :

FG *p* AX

conduit en vertu de II′, 2 à

AX *p* RS.

Dans le deuxième cas, la relation valable pour les Y :

AY *p* FG

conduit, en vertu de II′, 1 et II′, 2, à

AY *p* SR.

On retrouve ainsi pour les X et les Y les mêmes conditions qu'avec le segment FG. Le partage de la droite en deux domaines est donc le fait du seul point A.

Le but de la reconstruction axiomatique est aussi de retrouver l'emploi assuré (axiomatiquement assuré !) de l'ensemble de nos notions usuelles relatives à l'ordination des points d'une droite.

Dans un prochain paragraphe, nous insisterons tout particulièrement sur ce fait. En anticipant quelque peu, nous allons rendre ici son emploi (en la définissant correctement à partir des notions de base) à une notion dont il est gênant de devoir se passer.

En d'autres termes, nous allons rendre son emploi à une fenêtre interdite, mais en montrant en même temps comment elle peut être remplacée par l'emploi judicieux des fenêtres axiomatiques.

Revenons aux quatre points F, G, X, Y pour lesquels on a, par exemple

$$XY\ p\ FG.$$

Reprenons la liberté de dire que dans ce cas X précède et que Y suit X, sur la droite, dans le sens fixé par FG. Nous pourrons dire aussi que, toujours dans ce même sens, X vient avant Y, etc. Si la relation précédente n'était pas valable, on aurait :

$$YX\ p\ FG$$

et les rôles d'X et d'Y seraient simplement échangés.

Nous pouvons nous permettre, pensons-nous, de demander au lecteur de faire lui-même le raccord avec ce qui vient d'être dit du partage de la droite par un point quelconque. Les termes « avant » et « après » ainsi justifiés, nous retrouverons une certaine facilité d'expression et les démonstrations suivantes pourront être un peu simplifiées.

Théorème 7. — *« Suivre » ou « précéder » sur la droite sont des propriétés transitives.*

En d'autres termes, si X précède Y qui précède Z, X précède aussi Z.

Les hypothèses sont donc

$$XY\ p\ FG \qquad \text{et} \qquad YZ\ p\ FG.$$

On en tire, d'après II′, 1 et II′, 2 :

$$XY\ p\ YZ.$$

L'axiome II′, 4 est maintenant applicable; il fournit :

$$XY\ p\ XZ.$$

Répétons

$$XY\ p\ FG;$$

il suffit d'invoquer encore une fois II′, 2, pour obtenir

$$XZ\ p\ FG.$$

C'est la propriété visée.

Voici maintenant un théorème relatif à la façon dont deux points divisent une droite. Son exactitude ne fait aucun doute.

Théorème 8. — *Deux points divisent une droite en trois domaines distincts.*

Soient A et B ces deux points. Par rapport à A, un point quelconque satisfait à l'une ou à l'autre des éventualités (théorème 4)

$$1)\ PA\ p\ AB \qquad 2)\ AP\ p\ AB.$$

Par rapport à B il satisfait à l'une ou à l'autre des deux éventualités

$$3)\ PB\ p\ AB \qquad 4)\ BP\ p\ AB.$$

Par rapport aux deux points A et B, les quatre éventualités suivantes sont donc à considérer, dans lesquelles P est successivement désigné par X, Y, Z, T.

$$1)\ XA\ p\ AB \qquad \text{et} \qquad XB\ p\ AB$$

En d'autres termes, X est un point qui, dans le sens fixé par AB, précède A et précède B.

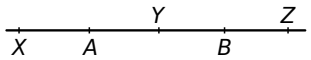


FIG. 13

En vertu de la transitivité, puisque A précède B, les X sont simplement les points qui précèdent A. Ce cas, comme les deux suivants, est illustré par la figure 13.

$$2)\ AY\ p\ AB \qquad \text{et} \qquad YB\ p\ AB$$

Les Y suivent A et précèdent B (fig. 13).

$$3)\ AZ\ p\ AB \qquad \text{et} \qquad BZ\ p\ AB$$

Les Z suivent A et B. D'après la transitivité, ils suivent tout simplement B (fig. 13).

4) Reste enfin le cas

$$TA\ p\ AB \qquad \text{et} \qquad BT\ p\ AB$$

Les T devraient précéder A et suivre B. Aucune possibilité sur la figure 13 ne peut convenir. Voici d'ailleurs la déduction de l'inexistence des T.

Répétons les hypothèses :

$$BT\ p\ AB \qquad \text{et} \qquad TA\ p\ AB.$$

Il en résulte (II′, 1 et II′, 2)

$$\text{BT } p \text{ TA}$$

et, par conséquent, (II′, 4)

$$\text{BT } p \text{ BA}.$$

Rapprochée de la première hypothèse, cette dernière relation conduit (II′,2) à

$$\text{AB } p \text{ BA},$$

ce qui est impossible (II′, 6).

La façon dont nous venons de formuler le théorème 8 peut prêter à confusion.

Nous avons démontré l'impossibilité du quatrième cas, et illustré par une figure adéquate les trois autres. Mais, répétons-le, la prise en considération de cette figure n'est pas un moyen dialectique légitime. Ce n'est qu'un moyen secondaire de contrôle. Aussi n'avons-nous pas dialectiquement démontré l'existence des classes des X, Y et Z.

Les axiomes admis jusqu'ici permettent-ils d'opérer cette déduction ? Les seuls axiomes relatifs à l'existence de points différents sont les axiomes I, 3 et I, 4. Les deux seuls points dont ils assurent la présence sur la droite AB sont A et B : nous n'avons encore aucun moyen d'affirmer de façon axiomatiquement légitime qu'il existe un seul X, ou un seul Y ou un seul Z. Il est donc nécessaire de compléter le groupe II′ par un nouvel axiome tel que le suivant :

Axiome II′, 7. — *Sur la droite AB, il existe au moins un point X tel que XA p AB (d'où II′, 4 permet de tirer XB p AB) et un point Y tel que YA p BA et YB p AB.*

Nous ne postulons pas ici l'existence d'un point Z tel que ZR *p* BA (et ZA *p* BA). L'existence d'un tel point est assurée par l'axiome II′, 7 lui-même, grâce au procédé déductif du remplacement, dont nous allons dire quelques mots.

Les lettres A, B, C,... figurant dans les axiomes représentent des points quelconques (compte tenu de la défense d'introduire des segments nuls). Elles jouent donc le rôle de variables dont le nom n'importe pas. Il est donc permis de changer à volonté les dénominations employées pourvu qu'on reste dans le cadre des conventions posées, — dans notre cas, pourvu que les points continuent à être désignés par des lettres du même type.

Rien ne s'oppose au remplacement d'une lettre par une autre, pourvu que ce remplacement s'effectue partout où la première lettre intervient, et que la seconde lettre ne figure pas déjà dans un autre emploi. Si l'on observe ces précautions, deux lettres différentes dans une première formulation ne pourront être ainsi remplacées que par deux lettres différentes.

Ce procédé est un procédé formel. Il agit directement sur les symboles. Il ne fait qu'utiliser de façon commode le fait qu'il s'agit des symboles de points quelconques.

Ainsi, dans notre cas, nous remplacerons B par A et A par B. L'axiome II′, 7 assure alors l'existence d'un point (qu'on pourra désigner par Z au lieu d'X) tel que

$$\text{ZB } p \text{ BA},$$

(sur quoi II′, 4 conduit à ZB *p* ZA et II′, 2 à ZA *p* BA).

L'axiome II′,7 a donc pour effet d'assurer que les trois domaines « intuitivement possibles » ne restent pas vides. Mais cet effet ne s'arrête pas là. Il va nous être possible de peupler ces trois intervalles d'un nombre de points aussi grand qu'il nous plaira.

69. L'ORDRE LINÉAIRE. Nous pouvons maintenant passer à l'examen d'un groupe de *n* points. Expliquons d'abord ce que doit être un ordre linéaire.

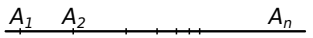


FIG. 14

n points qu'on cite l'un après, l'autre : A_1, A_2,... A_n sont ordonnés linéairement s'ils se suivent sur la droite dans l'ordre selon lequel on les « appelle » (fig. 14).

Tout groupe de *n* points donne lieu (la chose est claire d'avance) au théorème fondamental suivant.

Théorème 9. — *Tout groupe de n points est capable de deux ordinations linéaires opposées.*
Il partage la droite en n + 1 domaines distincts.

Fixons un sens par le segment FG, et soient A_1, A_2,... A_n ces *n* points, cités tout d'abord dans un ordre quelconque. Portons notre attention sur A_n; l'une des deux éventualités suivantes se présentera (théorème 6) :

1) ou bien aucun des autres points ne le précède,

2) ou bien quelques-uns des autres points le précèdent.

Dans le premier cas, l'expression usuelle « le premier » (c'est d'ailleurs une définition) conviendra pour le désigner.

Dans le second cas, nous fixerons notre attention sur l'un quelconque des A_i qui précèdent A_n, et qui sont au plus au nombre de $n - 1$. C'est maintenant pour ce point que l'une ou l'autre des éventualités précédentes devra se réaliser.

Si le premier cas ne se présente pas, c'est qu'un certain nombre des A_i le précèdent. Or, en vertu de la propriété de transitivité (théorème 7) ceux-ci sont à chercher parmi ceux qui précèdent A_i. Il y en a donc $n - 2$ au plus, et ainsi de suite.

Après un nombre fini d'essais (*n* au plus), ce procédé doit aboutir à la désignation du premier.

Une même façon de faire permettra de désigner le second (dans le sens de FG), c'est-à-dire « celui que seul le premier précède », etc.

On voit très bien que tout le jeu de l'ordination est assuré par la transitivité des relations précéder et suivre sur la droite (dans un sens déterminé).

Nous avons déjà dit qu'un exposé axiomatique où l'on se fait un devoir de ne rien omettre peut devenir fastidieux. Aussi n'insisterons-nous pas sur la fin de notre démonstration, sur le fait que les points cités dans l'ordre inverse, à partir du dernier, sont aussi ordonnés linéairement, ni sur la détermination des $n + 1$ domaines, dont le premier serait celui des X qui précèdent le premier point du groupe des A_i, etc.

Remarquons pour finir que le théorème précédent assure, sur la droite, l'existence de points en nombre indéfiniment croissant.

Les deux points de l'axiome I, 3 déterminent trois domaines distincts non vides, et contenant donc au moins un point : voilà déjà au moins 5 points sur la droite... Ceux-ci la partagent en six domaines non vides, etc.

70. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA NOTION « ENTRE ». La reconstruction axiomatique de la géométrie n'a fait encore que ses tout premiers pas. L'expérience est à peine commencée, et pourtant elle comporte déjà certains enseignements très catégoriques.

Si l'on s'était engagé dans l'entreprise avec l'idée que l'axiomatisation allait nous mettre sans délai en possession de nouvelles notions, de notions purement rationnelles qu'elle créerait de toutes pièces, cet espoir doit être dissipé. Qu'on s'en souvienne : plusieurs fois déjà nous l'avons découragé; mais il est vivace et le témoignage de l'expérience n'est pas de trop pour le réduire.

À travers nos premiers essais, c'est une fonction plus modeste qui s'exerce et qui se développe : l'axiomatisation ne fait que reprendre l'ensemble de nos notions et de nos représentations intuitives pour le réduire déductivement à une partie seulement d'entre elles, — aux notions primitives adoptées dans la base axiomatique et à toutes celles que la dialectique met en œuvre. L'édification axiomatique n'a pas le seul objet de parvenir par une voie unique à des énoncés épurés; elle a aussi pour mission d'organiser, dans la mesure du possible, l'ensemble de nos vues intuitives. Nous en avons déjà donné un exemple : la reprise des notions « avant » et « après » (sur la droite) à partir de la relation *p*.

C'est maintenant sur cette « ressaisie axiomatique » d'un domaine aussi vaste que possible de l'intuition que nous allons insister. La notion « entre », prise comme exemple, nous fournira la matière de cette utile expérience.

Des nombreuses notions d'ordre dont notre intuition se sert, « entre » est peut-être la plus importante. Nous aurions pu l'adopter dès le début comme notion primitive. Nous n'avons préféré la relation *p* que pour tenir compte des besoins de notre exposé : elle se prête plus aisément, nous semble-t-il, aux premières démarches de l'axiomatisation.

D'ailleurs, nous n'avons pas renoncé définitivement à confier à la notion « entre » le premier rôle axiomatique : ce sera l'objet d'un second essai. Mais pour l'instant, nous allons l'introduire par une définition correcte, et déduire régulièrement quelques-unes de ses propriétés.

En voici tout d'abord la définition :

Trois points différents A, B, C, peuvent être situés de telle façon que la relation suivante soit satisfaite :

$$AB\ p\ BC$$

On dit alors (par définition) que B est (est situé, est placé, se trouve) entre A et C.

Pour indiquer que cette relation est satisfaite, nous écrirons (ABC); et n(ABC) pour indiquer qu'elle ne l'est pas. Bref :

$$(ABC) \text{ équivaut à } AB\ p\ BC$$
$$n(ABC) \text{ équivaut à } AB\ np\ BC.$$

S'il est valable, le symbole (ABC) est appelé le symbole d'ordination des trois points.

À partir de cette définition, les propriétés caractéristiques (ce qualificatif se justifiera plus tard) de la relation « entre » sont faciles à déduire. Elles font l'objet des quatre théorèmes suivants.

Théorème 10. — *Si l'un des trois points est entre les deux autres, ces trois points sont différents.*

Cet énoncé se borne à rappeler l'une des conditions de validité de la définition précédente. Il est expressément posé que les symboles (ABC) ou n(ABC) ne doivent avoir de signification que si les trois points qui y figurent sont différents. D'autre part, si cette condition est satisfaite, la définition permet d'affirmer que (ABC) et n(ABC) expriment chacun la négation de l'autre : pour trois points différents, la relation « entre » est donc logiquement régulière.

Théorème 11. — *Si un point B est entre A et C, il est aussi entre C et A.*

En symboles :

$$(ABC) \rightarrow (CBA).$$

D'après la définition, (ABC) équivaut à AB *p* BC et (CBA) à CB *p* BA.

L'hypothèse est donc

AB *p* BC

L'axiome II′, 3 permet d'en déduire

BC *p* AB

et le théorème 5 d'inverser les paires; on obtient ainsi :

CB *p* BA.

C'est la conclusion attendue.

Théorème 12. — *De trois points A, B, C différents, il y en a un, et seulement un qui se trouve entre les deux autres.*

En tenant compte du théorème 10, nous affirmons donc qu'il y a seulement deux permutations des lettres ABC qui fournissent un symbole d'ordination légitime. Cet énoncé n'est qu'une traduction du théorème des trois domaines, qui figure parmi les conséquences de nos axiomes. D'après ce théorème, les seules positions possibles d'un point C par rapport à deux points A et B (A, B et C étant différents) sont les suivantes :

FIG. 15

1° CA *p* AB équivalant à (CAB)

FIG. 16

2° AC *p* CB équivalant à (ACB)

FIG. 17

3° AB *p* BC équivalant à (ABC)

L'ensemble de ces trois cas forme précisément le contenu du théorème à démontrer.

Théorème 13. — *Quatre points différents d'une droite peuvent toujours être désignés par A, B, C et D de façon que l'on ait à la fois (ABC), (BCD), (ABD) et (ACD).*

FIG. 18

Pour un tel groupe de quatre points, nous dirons que le symbole d'ordination (ABCD) est valable.

Si l'on remplace les quatre symboles qui sont supposés valables par les relations *p* équivalentes, on observe que le groupe A, B, C, D est ordonné linéairement. Le théorème 13 est donc purement et simplement le théorème fondamental 9 pour $n = 4$.

Théorème 14. — *Pour toute position de deux points différents de A et B, il existe au moins un point X, un point Y et un point Z tels que les symboles (XAB), (AYB), ou (ABZ) soient valables.*

Cet énoncé est la traduction immédiate de l'axiome II′, 7.

Nous arrêterons là la déduction des propriétés de la notion « entre ». Pour ce que nous en voulons faire, celles qui précèdent suffiront.

Second essai
La notion « entre » comme notion primitive

71. LA BASE AXIOMATIQUE. Nous avons dit déjà à plusieurs reprises que le choix des axiomes est pour une part arbitraire. La fable de la maison aux mille fenêtres y fait allusion. Pour mettre ce point hors de contestation, nous allons reprendre la question de l'ordination des points d'une droite et l'axiomatiser d'une seconde façon.

La notion « entre » vient d'être définie à partir de celle « de même sens » : nous allons maintenant retourner les rôles et faire de la première une notion primitive. Certaines des propriétés dont jouit cette notion viennent d'être « strictement déduites », nous les poserons maintenant comme axiomes. Le changement de perspective ne saurait être plus radical. Le renversement des rôles sera complet lorsque, à partir de la nouvelle notion primitive, nous aurons donné la définition explicite de l'ancienne, — et que, à partir des nouveaux axiomes de l'ordination, nous aurons retrouvé les anciens par une déduction régulière.

Introduisons donc la notion « entre » en sa nouvelle qualité de notion primitive.

Entre trois points différents A, B, C d'une droite, nous savons imaginer une relation (de position) s'exprimant par les termes suivants : le point B est (est situé, est placé, se trouve) *entre* les points A et C[1]).

Qu'on remarque que la relation ne doit être établie qu'entre trois points différents.

Pour notre commodité, nous conviendrons d'écrire symboliquement (ABC)

[1] Ce sont les expressions mêmes de la page 138. Et pourtant, il ne s'agit pas d'une simple redite. Le lecteur ne s'y trompera pas. C'est à dessein que nous reprenons les mêmes mots; nous voulons par là souligner la différence des perspectives. La même remarque est aussi valable à d'autres endroits.

pour indiquer que cette relation est satisfaite et *n*(ABC) pour indiquer qu'elle ne l'est pas.

Telle que nous la concevons, cette relation jouit d'un certain nombre de propriétés que nous ne pensons pas à mettre en doute. En voici quelques-unes :

Constatons tout d'abord que la relation « entre » est logiquement régulière. En d'autres termes, pour trois points différents, jamais la règle du tiers exclu ne sera en défaut; on aura toujours : ou bien (ABC), ou bien *n*(ABC).

Axiome II*, 1. — *Si B se trouve entre A et C, B se trouve également entre C et A.*

En symboles :

$$(ABC) \rightarrow (CBA)$$

Axiome II*, 2. — *De trois points différents, l'un seulement se trouve entre les deux autres.*

Autrement dit, l'un seulement des trois symboles

$$(ABC) \qquad (BCA) \qquad (CAB)$$

est valable.

Axiome II*, 3. — *Quatre points différents peuvent toujours être désignés par les quatre lettres A, B, C et D, de façon à avoir à la fois :*

$$(BCD) \qquad (ACD) \qquad (ABD) \qquad \text{et} \qquad (ABC).$$

Nous dirons alors que l'ordre de succession des quatre lettres A, B, C, D désigne aussi l'ordre dans lequel les quatre points se suivent sur la droite. Le symbole (ABCD) indiquera que ce cas est réalisé.

Axiome II*, 4. — *Deux points différents A et B étant donnés, on peut toujours trouver un troisième point X et un quatrième Y, de façon à avoir (AXB) et (ABY).*

Ces axiomes, nous l'avions annoncé, ne sont que la réédition des propriétés déduites ci-dessus.

72. QUELQUES DÉDUCTIONS. La démonstration de quelques théorèmes va maintenant nous montrer comment il faut s'en servir.

Théorème 15. — *Si quatre points d'une droite se suivent dans l'ordre ABCD, ils se suivent aussi dans l'ordre DCBA.*

En symboles :

$$(ABCD) \rightarrow (DCBA)$$

Quelle est explicitement l'hypothèse ? Il nous faut revenir à la convention par laquelle le symbole (ABCD) fut introduit, dans le commentaire à II*, 3. Nous y voyons que (ABCD) doit être remplacé par la réunion des quatre hypothèses suivantes :

$$(BCD) \;\&\; (ACD) \;\&\; (ABD) \;\&\; (ABC).$$

La conclusion à obtenir est elle aussi représentée par la réunion de quatre conditions; les voici :

$$(DCB) \;\&\; (DCA) \;\&\; (DBA) \;\&\; (CBA).$$

Comment passer de l'hypothèse à la conclusion ? En appliquant quatre fois l'axiome II*, 1, chacune des quatre conditions de l'hypothèse se trouvant ainsi transformée en une des quatre exigences de la conclusion. L'ordre (DCBA) est appelé l'inverse de l'ordre (ABCD).

Théorème 16. — *Si B se trouve entre A et C et si C se trouve entre B et D, les quatre points cités se suivent dans l'ordre ABCD.*

En symboles :

$$(ABC) \;\&\; (BCD) \rightarrow (ABCD).$$

Une remarque pour commencer : si le théorème est juste, en même temps que dans l'ordre indiqué, les quatre points se suivent aussi dans l'ordre inverse. Il suffit pour le voir de se baser sur le théorème précédent.

Quelles seraient les autres éventualités à prendre en considération ? Leurs symboles s'obtiennent à partir de (ABCD) par les 22 permutations restantes des quatre lettres A, B, C et D.

Considérons-en l'une ou l'autre et montrons qu'elle ne peut pas convenir.

Si l'on a (ACBD), la convention indiquée par II*, 3 fournit

$$(ACBD) \rightarrow (ACB) \;\&\; ....$$

Or l'hypothèse contient (ABC). On devrait donc avoir à la fois (ACB) et (ABC). C'est ce que l'axiome II*, 2 ne peut permettre. L'éventualité (ABCD) est donc à rejeter.

Si l'on a (BACD), d'après la convention indiquée par Il*, 3 :

$$(BADC) \rightarrow (BAC) \;\&\; ....$$

Or l'hypothèse contient (ABC). On devrait avoir à la fois (BAC) et (ABC), ce qui est en contradiction avec II*, 2. L'éventualité (BADC) est donc à rejeter, — etc.

On pourrait voir ainsi que chacune des 22 éventualités restantes conduit à une contradiction avec l'axiome II*, 2.

Les deux seules éventualités à retenir sont donc (ABCD) et (DCBA). Si l'une convient, l'autre convient également, d'après la remarque du début. Mais est-il sûr que l'une convienne ? C'est précisément ce qu'exige l'axiome II*, 3.

Un second théorème du même genre est le suivant :

Théorème 17. — *Si B est entre A et D, et si C est entre B et D, les quatre points se suivent dans l'ordre (ABCD).*

En symboles :

$$(ABD) \ \& \ (BCD) \rightarrow (ABCD).$$

La démonstration de cette proposition est semblable à celle du théorème précédent.

Pour montrer une première fois que ce second essai a la même portée que le premier, démontrons à nouveau le théorème 9, — le théorème fondamental de l'ordination sur la droite. Essayons même de retrouver le même cheminement.

Commençons donc par ressaisir la notion de demi-droite à partir de notre nouvelle base axiomatique.

Soit B un point quelconque. On peut toujours trouver deux points A et C tels qu'on ait (ABC) : il suffit de choisir un second point, A par exemple, puis d'appliquer l'axiome II*, 4.

Nous dirons (convention verbale) que A et C sont de part et d'autre de B. De tous les X tels que (XBC), nous dirons qu'ils sont du même côté de B que A, et de tous les Y tels que (ABY), qu'ils sont du même côté de A que B. La relation « être du même côté » que nous définissons ainsi, recouvre-t-elle bien la relation de position qui est une de nos données naturelles ? Celles-ci est transitive, démontrons-le :

Théorème 18. — *La relation (axiomatiquement définie) « être du même côté » est transitive.*

Autrement dit, si X et Y sont du même côté de B que A, ils sont d'un même côté de B. L'équivalent symbolique de cet énoncé est

$$(ABC) \ \& \ (XBC) \qquad \text{et} \qquad (ABC) \ \& \ (YBC) \rightarrow (XBC) \ \& \ (YBC).$$

Or, si l'on supprime un ou plusieurs termes dans une conjonction juste, elle reste juste. Il suffit ici de supprimer à gauche (ABC) deux fois pour obtenir la conclusion.

Reprenons maintenant le théorème 9.

Le chemin de la démonstration est tout tracé.

Fixons notre attention sur le point A_n. Deux éventualités peuvent se présenter :

1) ou bien tous les autres points du groupe se trouvent d'un même côté de A_n,

2) ou bien ces points se répartissent de part et d'autre de A_n.

Dans le premier cas, A_n sera dit le dernier des n points (ou le premier, si l'on préfère).

Dans l'autre cas, nous fixerons notre attention sur un second point A_i, pour lequel deux éventualités seront encore une fois à prendre en considération.

1) ou bien tous les autres points se trouvent du même côté que A_i, et dans ce cas, c'est A_i qui assumera le rôle du dernier (ou du premier);

2) ou bien les autres points se répartissent de part et d'autre de A_i.

Dans ce dernier cas, on portera son attention sur un point se trouvant de l'autre côté de A_n que A_i et ainsi de suite (cf. page 149).

Ainsi, l'ordre linéaire peut être obtenu aussi bien dans le cadre de notre second essai que dans celui du premier. Mais notre intention, qu'on s'en souvienne, ne s'arrête pas là. Nous entendons montrer que les deux systèmes axiomatiques envisagés peuvent se remplacer l'un l'autre pour tout ce qu'on peut légitimement en tirer. Dans ce but, nous allons faire passer la relation *p* au rang de notion définie, et les axiomes qui la caractérisaient au rang de propositions déduites.

73. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA RELATION *p*. Définir la relation *p*, ce sera fixer à l'aide de la notion « entre » les cas où la première doit être satisfaite et ceux où elle ne doit pas l'être. Les symboles d'ordination de trois et quatre lettres nous permettent de le faire avec précision.

Deux segments AB et CD satisfont à la relation

1) AB *p* CD

dans tous les cas où, dans le symbole d'ordination des quatre points A, B, C, D, la lettre A suit ou précède la lettre B selon que la lettre C suit ou précède la lettre D.

Par convention verbale, on dira que les deux segments ont le même sens.

Cette définition suppose que les quatre points A, B, C, D soient différents, pour qu'on puisse parler de leur symbole d'ordination. Ce sont là des conditions trop restrictives, la relation *p* devant seulement exiger, pour être régulière, que A et B d'une part, C et D d'autre part, soient différents. Pour être exact, il nous faut donc ajouter à la définition précédente l'énumération des six cas suivants :

2) AB *p* BC, valable si (ABC)
3) BC *p* AB, valable si (CBA)
4) AB *p* AC, valable si (ABC) ou (ACB)

5) BA *p* CA, valable si (CBA) ou (BCA)
6) AB *p* AB, toujours valable
7) AB *p* BA, jamais valable.

Le cas où les quatre points sont différents pourrait d'ailleurs être lui aussi précisé par l'énumération des 12 symboles d'ordination répondant à la définition :

AB *p* CD est valable si (ABCD) ou (ACBD)...
ou (BACD) ou (DBCA)...

La définition complète n'est pas très simple, on le voit.

Elle se prête cependant sans trop de peine à la déduction. Pour ce qui va suivre, il est cependant utile de remplacer l'énumération complète par une extension de la définition donnée pour le cas 1). Rien ne nous empêche de décréter qu'un symbole avec une lettre répétée, tel que (AABC), soit purement et simplement équivalent au symbole à trois lettres différentes. Avec cette convention, la définition donnée pour 1) s'étend aussi aux cas 2), 3), 4) et 5). Il serait même possible de l'étendre aux cas 6) et 7).

Montrons maintenant comment les anciens axiomes en découlent.

L'axiome I′, 1 exige que la relation *p* soit symétrique, que les deux « termes » qui y figurent soient échangeables. C'est une conséquence immédiate de la définition, — plus précisément des règles d'emploi de la conjonction « selon que » : dire que « A suit ou précède B selon que C suit ou précède D », c'est dire aussi que « C suit ou précède D selon que A suit ou précède B ».

Et quant aux cas 6) et 7), il est inutile, pensons-nous, d'y insister.

L'axiome II′, 2 exige la transitivité de la relation *p*. C'est encore une fois une simple conséquence des règles d'emploi de « selon que ». Les axiomes II′, 3 et II′ 6 équivalent aux définitions données pour les cas 6) et 7).

Remarquons que, dans ces deux cas, la notion « entre » ne saurait intervenir explicitement, puisqu'elle exige trois points différents pour s'établir et que 6) et 7) n'en mentionnent que deux. La définition donnée dans ces deux cas n'en est pas moins régulière, « jamais », et « toujours » appartenant à la dialectique.

L'axiome II′, 4 résulte de la comparaison des cas 2) et 4).

AB *p* BC signifie (ABC)
AB *p* AC signifie (ABC) ou (ACB).

Dans ces conditions, il est clair que la validité de AB *p* BC doit (dialectiquement) entraîner celle de AB *p* AC.

L'axiome II′, 5 décrète que :

AB *np* CD → AB *p* DC.

Or AB *np* CD signifie : « A précède C » équivaut à « C ne précède pas D » (le mot précéder étant relatif au symbole d'ordination (ABCD)). Mais dire que, dans ce symbole, « C ne précède pas D », c'est dire que « D précède C ». Ainsi donc, AB *np* CD signifie : « A précède C » équivaut à « D précède C ». Mais cette signification est précisément aussi celle de AB *p* DC. II′, 5 est ainsi démontré, les cas 6) et 7) exceptés. Mais on voit aisément comment ces derniers sont à traiter.

Quant à II′, 7, nous avons eu déjà l'occasion d'observer qu'il est simplement équivalent à II*, 4.

Le cycle est ainsi fermé : les rôles attribués tout d'abord aux systèmes II′ et II* peuvent être intervertis. Nous avons ainsi montré, par le fait et par l'exemple, que les notions primitives et les axiomes qui sont à la base d'un système déductif sont pour une part soumis à notre libre choix.

Cependant, le but que l'axiomatisation se propose même en se bornant à l'ordination des points sur une droite, n'a pas encore été complètement atteint. Il ne s'agit pas seulement, nous l'avons dit, de tracer une voie déductive à travers la connaissance intuitive : c'est tout le domaine de l'intuition qu'il faut recouvrir, toutes les notions qu'elle a formées qu'il faut atteindre et faire entrer dans le jeu déductif. C'est donc la liste complète des expressions courantes (telles que celles que nous avons citées plus haut) qu'il faudrait définir et traiter comme nous l'avons fait pour « entre ».

Mais notre intention n'est pas de nous arrêter à tous les détours d'une axiomatisation qui ne laisserait aucune exigence insatisfaite. Nous visons plus loin, et c'est pourquoi nous passerons sur les détails de cette extension de l'emprise axiomatique, supposant que pour ce qui concerne la droite elle ait été menée à bonne fin.

Après coup, nous nous trouvons ainsi rétablis, pour ce qui concerne le domaine de l'intuition dont il est maintenant question, dans toutes nos habitudes de langage, dans toutes nos « facultés intuitives ».

Mais il n'est pas certain d'avance qu'il en soit toujours ainsi; il n'est pas certain que la connaissance intuitive et la connaissance axiomatisée restent aussi complètement en accord lorsque le champ d'action s'élargir progressivement.

L'ORDINATION DANS LE PLAN

74. LA BASE AXIOMATIQUE : L'AXIOME DE PASCH. L'intérêt géométrique des propositions obtenues jusqu'ici ne suffirait pas, à lui seul, pour justifier le soin avec lequel nous avons traité l'axiomatisation de l'ordination sur la droite. La matière géométrique était encore d'une évidente pauvreté, mais sa simplicité même servait nos intentions,

qui étaient de faire ressortir les caractères essentiels de la méthode axiomatique, et d'attirer tout spécialement l'attention sur la dialectique de la déduction. Dans la suite, nous nous attacherons moins aux détails; il nous arrivera de bâtir avec des blocs plus gros et moins exactement taillés.

En ce moment, deux chemins s'ouvrent à nous. Tel que nous l'avons laissé, l'ordre linéaire est encore privé d'une propriété fondamentale qui devra lui être tôt ou tard conférée : la continuité. Nous pourrions donc pousser encore plus loin la reconstruction axiomatique de la droite. Mais il est aussi possible d'exposer dès ici tout le complexe des propriétés de l'ordination dans le plan qui peuvent être établies sans la notion du continu. C'est cette seconde voie que nous allons choisir.

D'un coup d'œil d'ensemble, examinons comment la situation se présente. Quelles sont les notions auxquelles l'axiomatisation va maintenant s'étendre ? Les énoncés très simples que voici en offrent quelques exemples :

un point A qui n'est pas sur une droite *d* se trouve d'un côté ou de l'autre de celle-ci;

un point A qui n'est pas sur un côté d'un angle α est soit à l'extérieur soit à l'intérieur de cet angle;

on peut décrire le pourtour de tout triangle en deux sens contraires;

dans le plan, on distingue deux orientations opposées; etc., etc.

Nous disposons d'un assez grand nombre d'expressions pour décrire la façon dont s'ordonnent, pour nous, les points et les domaines d'une étendue plane. C'est l'ensemble des notions relatives à cette vision de l'étendue qui doit être maintenant ressaisi axiomatiquement. Aurons-nous à les prendre toutes comme notions primitives ? Nous savons, par expérience, que nous avons la faculté de choisir entre elles; de décréter que telle ou telle sera notion de base et telle autre notion dérivée, — pourvu que notre choix se révèle adéquat.

Par exemple, on peut confier le rôle de notion primitive à la relation existant entre deux triangles de même orientation, ou bien à la relation existant entre une droite et deux points situés de part et d'autre de cette droite.

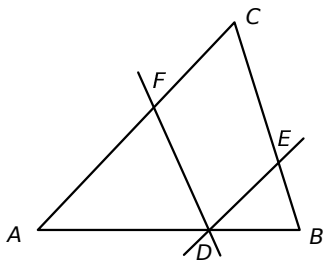


FIG. 19

Mais il est possible aussi de n'introduire aucune nouvelle notion primitive, celles dont nous disposons déjà devant suffire pour définir toutes celles dont il vient d'être question. C'est à cette façon de faire que nous donnerons la préférence.

Voici tout d'abord les définitions relatives à un triangle.

Trois points ABC non situés sur une même droite déterminent un triangle dont ils sont les sommets, et dont les segments AB, BC et CA sont les côtés.

L'axiome suivant (axiome de PASCH) va maintenant permettre à lui seul, la déduction de toute l'ordination plane (fig. 19) :

Axiome II″. — *Une droite qui coupe le côté AB d'un triangle ABC, et ne passe pas par C, coupe soit le côté BC, soit le côté AC.*

Montrons comment cet axiome doit être mis en œuvre.

75. PARTAGE DU PLAN PAR UNE DROITE.

Théorème 19. — *Toute droite d partage le plan en deux domaines sans points communs.*

Choisissons sur une droite *d* un point A quelconque (fig. 20) et soit B un point non situé sur *d* (axiome I, 4). Il passe une droite *f* par ces deux points (théorème 1). Sur *f*, choisissons un nouveau point C, répondant au symbole (BAC), (axiome 11*, 4).

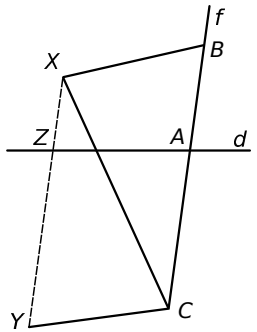


FIG. 20

De deux points tels que B et C, nous dirons qu'ils ne sont pas du même côté de *d*.

Nous définissons maintenant comme suit les points X qui sont du même côté que B : ils sont tels que le segment CX ait un point sur *d*.

Appliquons notre nouvel axiome au triangle CXB : *d* coupe CX par hypothèse; elle ne passe pas par B, elle doit donc couper l'un, et l'un seulement, des deux autres côtés; et puisqu'elle coupe BC en A, elle ne coupera pas BX. Les points X sont donc tels que le segment BX n'ait aucun point sur *d*.

Nous définirons de la même façon les points Y qui sont du même côté que C.

Si nos définitions sont bien choisies, X et Y devront être situés de part et d'autre de *d*. Notre axiome le confirme immédiatement, il suffit de l'appliquer au triangle XBY ou au triangle XCY.

Ainsi la répartition des points du plan en deux domaines, abstraction faite des points de *d*, se fait sans équivoque. Mais nous l'avons obtenu à partir de deux points particuliers B et C; dépend-elle du choix de ces deux points ? II nous faut encore montrer qu'il n'en est rien. Il suffira naturellement de montrer que la répartition reste la même si nous remplaçons B par l'un quelconque des X, que nous nommerons B′, et C par l'un quelconque, C′ des Y (fig. 21).

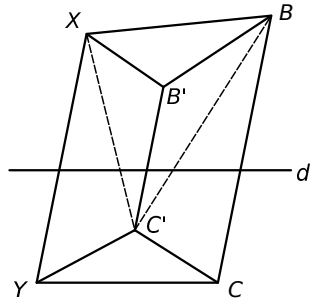


FIG. 21

Appliquons notre axiome au triangle BC′X. *d* coupe BC′ et ne coupe pas BX (comme nous venons de le voir), elle coupe donc XC′; avec B′ comme avec B, tous les X sont donc du même côté que B.

Un raisonnement tout semblable s'applique aux Y.

La répartition des points du plan en deux domaines est donc la même à partir de B′ et C′ que de B et C : elle ne dépend pas du choix particulier des deux points à partir desquels on l'effectue. Elle est donc le fait de la droite elle-même. Il nous reste uniquement la liberté de désigner les deux domaines à notre convenance.

Ce qui vient d'être démontré légitime (axiomatiquement) l'usage courant des expressions telles que

d'un côté ou de l'autre, passer d'un côté à l'autre, changer de côté, de part et d'autre, etc.,

opposées aux expressions telles que

du même côté ou d'un même côté.

Nous nommons *demi-plan* l'ensemble des points situés d'un même côté d'une droite *d*. D'après cette définition, le plan comprend, pour toute droite *d* :

1° les deux demi-plans que cette droite détermine,

2° la droite elle-même.

Nous dirons encore que la droite est le bord commun des deux demi-plans.

76. PARTAGE DU PLAN PAR DEUX DROITES. Passons à la « figure » de deux droites, *f* et *g*. Soit P un point qui ne soit situé ni sur *f* ni sur *g*, mais quant au reste, quelconque. Par rapport à chacune des droites, deux éventualités lui sont offertes : attribuons-lui l'indice 1 ou l'indice 2 selon qu'il se trouve d'un côté ou de l'autre de *f*, l'indice I ou l'indice II, selon qu'il se trouve d'un côté ou de l'autre de *g*. Les quatre combinaisons possibles sont donc P_{1I}, P_{1II}, P_{2I} et P_{2II}. Est-il certain que l'on puisse, pour toute paire de droites, indiquer des points qui les réalisent les quatre ? Comme nous allons le voir, c'est le cas seulement si *f* et *g* sont concourantes.

Théorème 20. — *Deux droites qui partagent le plan en quatre domaines sont concourantes.*

L'hypothèse est donc qu'il existe quatre points P_{1I}, P_{1II}, P_{2I} et P_{2II} répondant aux conditions de tout à l'heure. P_{1I} et P_{1II} se trouvent ainsi d'un même côté de *f* et de part et d'autre de *g* (fig. 22). Le segment qui les joint doit couper *g* en un point B_1 situé du côté 1 de *f*. De même le segment joignant les deux autres points doit couper *g* en un point B_2 du côté 2 de *f*.

Enfin, les points B_1 et B_2 se trouvant de part et d'autre de *f*, le segment qui les joint coupe *f* en un point O : c'est le point de concours annoncé.

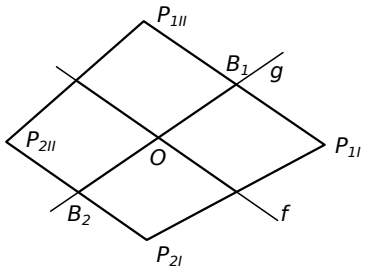


FIG. 22

S'il existe donc quatre domaines répondant aux quatre éventualités qui sont logiquement possibles, c'est que *f* et *g* se coupent. Si elles ne se coupent pas, l'une au moins de ces quatre éventualités ne trouve pas de réalisation.

La réciproque de ce théorème est aussi juste. La voici :

Théorème 21. — *Deux droites concourantes partagent le plan en quatre domaines.*

Soit O le point de concours des droites *f* et *g* (fig. 23). Choisissons deux points A_1 et A_2 sur *f*, et deux points B_1 et B_2 sur *g*, situés chaque fois de part et d'autre de O.

Les indices 1 ou 2 seront attribués à P s'il se trouve du même côté que *f* que B_1 ou B_2; les indices I ou II s'il se trouve du même côté de *g* que A_1 ou A_2. Choisissons enfin un point X sur le segment A_1B_1 (c'est-à-dire entre A_1 et B_1). Il est du même côté de *f* que B_1, puisque A_1, le point où *f* coupe la droite B_1X, se trouve à l'extérieur du segment B_1X. De même X est du même côté de *g* que A_1. Cet X peut donc être appelé P_{1I}.

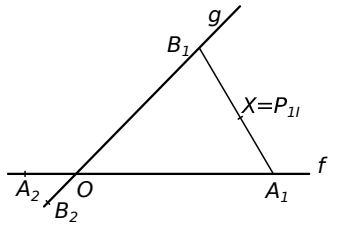


FIG. 23

On voit de la même façon qu'on peut choisir un P_{1II} sur B_1A_2, un P_{2II} sur A_2B_2 et un P_{2I} sur B_2A_1.

Les quatre domaines à distinguer sont maintenant les suivants :

1° les points X qui se trouvent du même côté de *f* et de *g* que P_{1I},

2° les points Y qui se trouvent du même côté de *f* et de *g* que P_{2I}, et ainsi de suite.

Le plan tout entier comprend ces quatre domaines et les droites *f* et *g*.

Théorème 22. — *Deux droites partagent le plan en trois domaines au moins.*

Supposons maintenant que les droites *f* et *g* n'aient aucun point commun (fig. 24). Prenons un point A sur *f* et un point B sur *g*; menons la droite *h* par ces deux points.

Sur *h*, les points A et B déterminent trois domaines distincts (théorème 8), celui des X pour lesquels on a (XAB), celui des Y pour lesquels on a (AYB) et celui des Z répondant à (ABZ). Si l'on désigne un X par P_{1I}, tout Y peut l'être par P_{2I} et tout Z par P_{2II}.

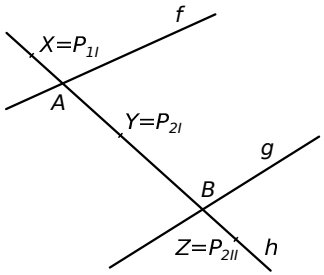


FIG. 24

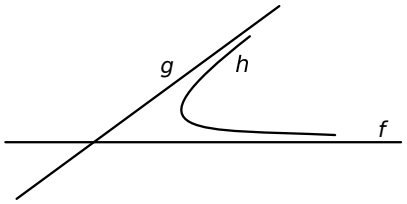


FIG. 25

Le quatrième domaine, celui des P_{1II} reste vide, sans quoi les droites *f* et *g* auraient un point de concours.

Il est commode et tout naturel de dire que le domaine des Y s'étend (ou se trouve) entre *f* et *g*.

Corollaire. — *Les points d'une droite h appartiennent au plus à trois des domaines déterminés par deux autres droites f et g.*

Si *h* ne rencontre ni *f* ni *g*, elle est tout entière dans un seul des domaines envisagés (fig. 25).

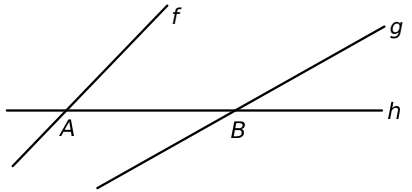


FIG. 26

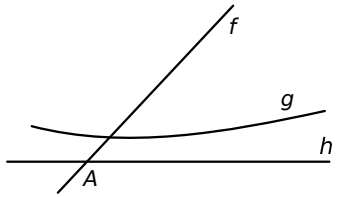


FIG. 27

Si elle rencontre *f* en A et *g* en B, elle se trouve partagée en trois domaines par A et B, domaines qui peuvent être désignés comme dans le théorème précédent — même si *f* et *g* se coupent (fig. 26).

Enfin si elle ne coupe que l'une des deux droites, ce point de concours la divise en deux domaines seulement, appartenant chacun à un seul domaine du plan (fig. 27).

Après ces théorèmes préparatoires, nous pouvons passer à l'examen de l'angle.

77. L'ANGLE. Soient *f* et *g* deux droites passant par le point O (fig. 28).

Choisissant un point A sur la première et un point B sur la seconde, nous désignons par là les deux demi-droites *f′* et *g′* qui les contiennent. La figure comprenant O et ces demi-droites est (par définition) un angle, dont

O est le sommet, *f′* et *g′* les côtés.

Soit X un point sur le segment AB. Les droites *f* et *g* partagent le plan en quatre domaines : celui qui comprend X est appelé *l'intérieur* de l'angle. O et les demi-droites *f′* et *g′* en forment le *bord* et tous les autres points *l'extérieur*.

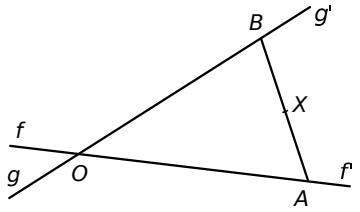


FIG. 28

Sans indiquer toutes les conventions verbales correspondantes, nous utiliserons aussi quelques autres expressions telles que « point intérieur », « point à l'extérieur », etc., dont le sens ne donne lieu à aucune équivoque.

Théorème 23. — *Tout segment joignant un point extérieur à un point intérieur coupe le bord de l'angle en un seul point.*

Reprenons les notations utilisées ci-dessus. Tout point intérieur peut être désigné par P_{1I}; et tout point extérieur par P_{1II}, P_{2I} ou P_{2II}, exception faite des points extérieurs situés sur *f* ou *g* (fig. 29).

Supposons, par exemple, qu'on ait joint P_{1I} et P_{2I}. Ces points (les indices le montrent) sont de part et d'autre de *f*. Le segment coupe donc *f* en un point F situé entre P_{1I} et P_{2I}. Le théorème se borne là prétendre que cet F est sur *f′*, et non sur la demi-droite opposée ou en O.

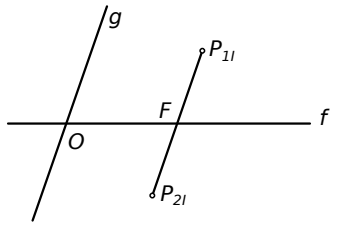


FIG. 29

Si F tombait en O, le segment P_{1I} P_{2I} couperait aussi *g*, ce qui n'est pas, vu les indices.

Sur la demi-droite opposée à *f*, F se trouverait dans le domaine II de *g*; il en serait de même de P_{2I}, ce qui n'est pas. F est donc sur *f*.

On traite de la même façon le cas où l'on joint P_{1I} et P_{1II}.

Reste le cas où les points à joindre sont P_{1I} et P_{2II}. Dans ce cas, le segment de jonction rencontre aussi bien *f* que *g*, disons en F et G (fig. 30).

L'énoncé prétend que si F et G ne tombent pas tous deux en O (ce qui n'est pas exclu), l'une des deux éventualités suivantes devra se présenter :

ou bien F est sur *f′*, et G sur la demi-droite opposée à *g′*;

ou bien G est sur *g′*, et F sur la demi-droite opposée à *f′*.

En d'autres termes, deux éventualités sont à exclure :

Celle où F serait sur *f′* et G sur *g′* et celle où F serait sur la demi-droite opposée à *f′* et G sur la demi-droite opposée à *g′*. Dans ces cas, d'après le corollaire précédent, la droite de jonction ne saurait passer du domaine (1,I) au domaine (2,II).

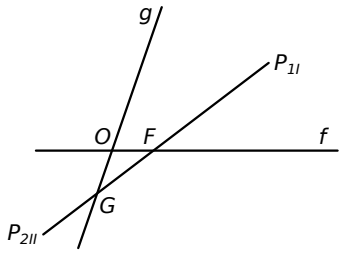


FIG. 30

L'énoncé de notre théorème peut être complété de la façon suivante :

le segment joignant deux points intérieurs est tout entier à l'intérieur,

deux points extérieurs peuvent être joints par un segment, ou par une suite de segments (par une ligne brisée) *tous situés à l'extérieur.*

Pour ne pas trop allonger, nous renonçons à transcrire la déduction de ces compléments, déduction qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté.

78. PARTAGE DU PLAN PAR TROIS DROITES. Les théorèmes prochains traiteront de la façon dont trois droites partagent le plan.

Par rapport à chacune des trois droites *f*, *g* et *h*, deux éventualités sont offertes à un point quelconque, — pourvu cependant qu'il ne soit sur aucune d'elles. Comme plus haut, nous conviendrons de dire qu'il peut se situer par rapport à *f* du côté 1 ou du côté 2, par rapport à *g*, du côté I ou du côté II, par rapport à *h* enfin, du côté α ou du côté β.

Les combinaisons de ces éventualités engendrent huit cas logiquement possibles :

$$(1,I,\alpha),\ (2,I,\alpha)\ldots\ (2,II,\beta)$$

Ces huit possibilités trouvent-elles toujours des points du plan correspondants pour les réaliser ?

Théorème 24. — *Trois droites non concourantes deux à deux partagent le plan en quatre domaines.*

f et *g*, à elles seules, nous l'avons vu (fig. 24), partagent le plan au moins en trois domaines, correspondant aux combinaisons (1,I), (2,I) et (2,II). Trois éventualités sont donc offertes à *h* : elle peut être située (tout entière) dans l'un ou l'autre de ces trois domaines. Le premier et le troisième de ces trois cas sont d'ailleurs en tous points semblables.

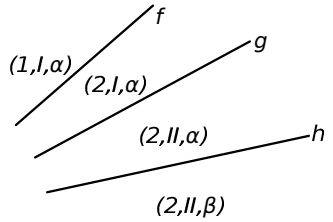


FIG. 31

Supposons donc que *h* tombe dans le domaine (2,II). Les droites *f* et *g* sont alors d'un même côté (du coté α, par exemple) de *h* (fig. 31). Les deux premiers domaines de tout à l'heure s'écriront maintenant (1,I,α) et (2,I,α). Le troisième engendre deux domaines (2,II,α) et (2,II,β).

Supposons ensuite que *h* tombe dans le domaine (2,I), c'est- à-dire entre *f* et *g*. Deux éventualités sont à nouveau à prendre en considération.

Dans la première, *h* laisse *f* et *g* du même côté (fig. 32). Dans la seconde, *f* et *g* sont de part et d'autre de *h* (fig. 33). Les deux figures ci-contre illustrent ces deux éventualités (fenêtres interdites, d'ailleurs).

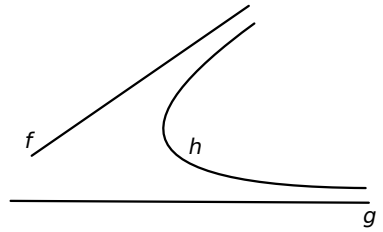


FIG. 32

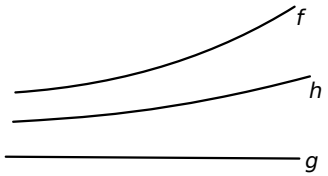


FIG. 33

Il vaut la peine de remarquer que nous n'avons pas encore la faculté d'écarter l'éventualité relative à la figure 32; ce point, d'ailleurs, ne pourra être éclairci que plus tard.

Pour ne pas rebuter le lecteur, nous passerons sur le reste de la démonstration qui n'amènerait que des redites.

Théorème 25. — *Trois droites dont deux sont concourantes partagent le plan en cinq domaines.*

Partons de deux droites concourantes *f* et *g*, et des quatre domaines qu'elles déterminent (théorème 21). La troisième *h*, nous le supposons, ne coupe ni l'une ni l'autre. Elle ne pourrait passer de l'un des quatre domaines dans un autre sans couper au moins l'une des deux premières : elle est donc tout entière dans l'un des quatre domaines qu'elle partage en deux domaines.

Remarquons que la figure 25 nous inciterait à écarter cette éventualité, mais que nous n'en avons pas encore la possibilité logique. Ce point aussi ne s'éclaircira que plus tard.

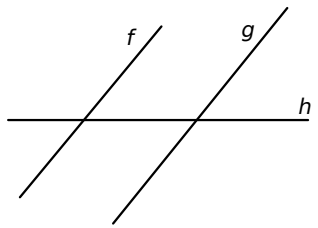


FIG. 34

Théorème 26. — *Trois droites dont deux (seulement) ne sont pas concourantes, partagent le plan en six domaines.*

Partons de deux droites non concourantes *f* et *g*. Elles partagent le plan en trois domaines (théorème 22). La troisième, *h*, les coupe l'une et l'autre. Elle pénètre donc dans les trois domaines et les partage chacun en deux domaines (fig. 34).

Théorème 27. — *Trois droites deux à deux concourantes partagent le plan en sept domaines.*

Partons encore une fois des deux droites (supposées concourantes en O) *f* et *g*. La troisième va couper deux des quatre demi-droites issues de O. Nous avons déjà vu (corollaire du théorème 22) qu'elle pénètre dans trois des quatre domaines déterminés par *f* et *g*, et qu'elle laisse le quatrième tout d'un même côté. Celui-ci reste entier, tandis que chacun des trois autres est partagé en deux domaines.

Même dans le cas le plus favorable, jamais les huit possibilités logiques énumérées plus haut ne peuvent être toutes réalisées. Voici d'ailleurs comment les sept possibilités du théorème se présentent.

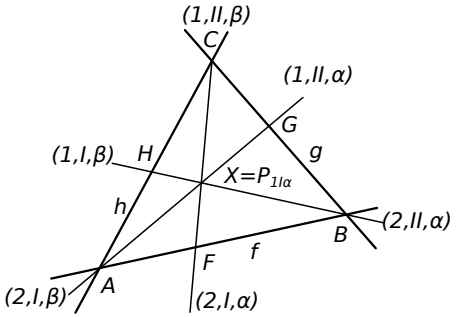


FIG. 35

Soit ABC le triangle des trois points où les droites *f*, *g* et *h* se coupent deux à deux (fig. 35).

Choisissons, un Point F entre A et B et un point X entre C et F. Rien ne s'oppose à ce que nous placions $P_{1I\alpha}$ en X. Si maintenant nous prolongeons la droite CF au delà de F, nous passons de l'autre côté de *f* et tombons dans le domaine correspondant aux indices (2,I,α). Et si nous la prolongeons au delà de C, nous tombons dans le domaine (1,II,β).

Nous pouvons en faire de même pour les droites AX et BX qui, d'après II″, coupent *g* en G et *h* en H; nous obtenons ainsi des points répondant aux huit éventualités énumérées, exception faite d'une seule : l'éventualité (2,II,β).

79. LE TRIANGLE. Revenons maintenant au triangle ABC et supposons que les sept domaines déterminés par *f*, *g* et *h* gardent les mêmes désignations que plus haut : le domaine correspondant aux indices (1,I,α) est par définition l'intérieur du triangle. Les côtés (sommets compris) en forment le bord et tous les autres points l'extérieur.

Voici maintenant le théorème fondamental relatif au triangle :

Théorème 28. — *Tout segment joignant un point intérieur d'un triangle à un point extérieur coupe une fois le bord.*

Pour s'en assurer, il suffit d'examiner l'une après l'autre toutes les possibilités. Soit, par exemple, $P_{2I\alpha}$ un point extérieur (fig. 36). Les indices montrent que le segment $P_{1I\alpha}\,P_{2I\alpha}$ doit couper *f* en un point que nous appellerons F. L'énoncé prétend simplement que F se trouve entre A et B. Or, le segment

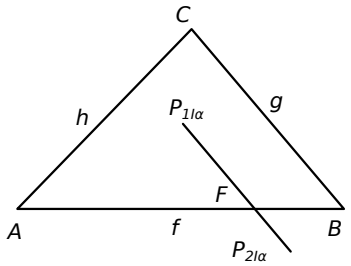


FIG. 36

$P_{1I\alpha}\,P_{2I\alpha}$ se trouve tout entier dans l'angle de sommet C et de côtés CA et CB prolongés. F s'y trouve donc aussi.

Tous les autres cas peuvent se traiter de façon semblable, ou par des raisonnements analogues à ceux que nous avons déjà faits à propos de l'angle.

Cet énoncé peut être complété comme suit :

Le segment entre deux points intérieurs est tout entier à l'intérieur du triangle.

Deux points extérieurs peuvent toujours être joints par un segment ou par une suite de segments entièrement situés à l'extérieur.

Nous aurons encore besoin des deux propriétés suivantes sur lesquelles nous éprouverons à nouveau l'axiome de PASCH.

Théorème 29. — *Toute droite joignant un point intérieur à un sommet C coupe le côté opposé AB.*

Soit E un point à l'intérieur du triangle ABC (fig. 37). Choisissons un point D entre A et B et joignons DE par la droite *d*. Cette droite, d'après l'axiome de PASCH, doit encore couper l'un des deux autres côtés, à moins qu'elle ne passe par C, auquel cas nous n'aurions plus rien à démontrer.

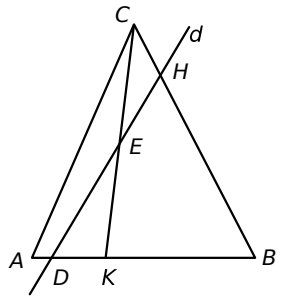


FIG. 37

Supposons que le point d'intersection H soit entre C et B.

E et D se trouvant du même côté de la droite CB, H n'est pas entre D et E.

D'autre part, E et H se trouvant du même côté de AB, D n'est pas entre E et H. Donc E se trouve entre D et H.

Menons maintenant la droite CE et appliquons l'axiome de PASCH au triangle DBH : la droite CE doit encore couper l'un des autres côtés. Ce n'est pas HB, puisque H est entre C et B; c'est donc DB, en K.

K situé entre D et B est aussi entre A et B.

Théorème 30. — *Toute demi-droite issue d'un point intérieur d'un triangle en coupe le bord en un point.*

Soit encore E ce point, et *d* la demi-droite (fig. 38). Joignons C et E; ce segment prolongé coupe AB en K, d'après le théorème précédent.

d se trouve soit du même côté de CK que B soit du même côté que A.

Supposons que le premier cas soit réalisé. Appliquons alors l'axiome de PASCH au triangle CKB, avec la transversale *d*. Celle-ci doit couper encore CB ou KB. C'est ce qu'il fallait démontrer.

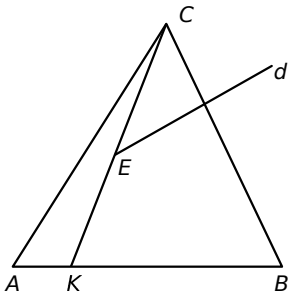


FIG. 38

80. EXTENSION DE L'IDÉE D'ORDRE LINÉAIRE. Nous allons maintenant nous efforcer de reprendre axiomatiquement possession d'une notion très importante, celle de l'orientation dans un plan. Dans ce but, nous essayerons de définir l'ordre circulaire et d'en énoncer les propriétés caractéristiques. Revenons tout d'abord à l'ordre linéaire :

La notion d'ordre linéaire n'a jusqu'ici concerné que des groupes de points en ligne droite, mais elle peut être tout naturellement étendue à d'autres cas.

Soit O l'origine commune de deux demi-droites, *d* et *d′*, prises sur des droites différentes (fig. 39). Sur l'une d'elles, nous savons établir un ordre linéaire aboutissant en O et sur l'autre un ordre linéaire commençant en O. Aucun des axiomes, ni aucune des conventions dont nous disposons déjà ne nous permet de les raccorder. La chose est cependant facile à faire : il suffit de poser, par définition, que O se trouve entre deux points quelconques pris l'un sur *d* et l'autre sur *d′*.

À l'aide de cette unique convention supplémentaire, tous les symboles d'ordination valables sur une droite trouvent aussi leur interprétation sur la ligne brisée *d* O *d′*.

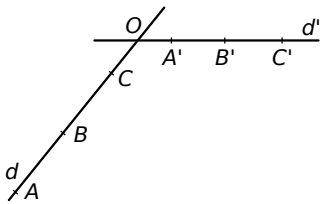


FIG. 39

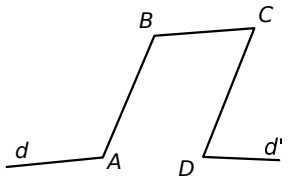


FIG. 40

On pourrait aussi raccorder *d* et *d′* par une suite de segments AB, BC, CD,... (fig. 40). Si la ligne brisée formée par les deux demi-droites et par ces segments ne se coupe pas elle-même, il suffit d'introduire des conventions supplémentaires pour chacun des points de raccord.

Dépassant le sens envisagé jusqu'ici, nous dirons que les points de la ligne brisée se trouvent aussi linéairement ordonnés.

Cet exemple est de nature à nous faire comprendre dans quelles conditions on pourra dire que deux séries d'éléments sont ordonnées de la même façon.

1° Il faut tout d'abord que dans chaque série, les éléments soient soumis à un principe d'ordination sans équivoque. (Ce principe pourrait être une relation de position à réaliser, une succession dans le temps à observer, etc.)

2° Il faut que les deux séries puissent être mises en correspondance, de façon qu'à chaque élément de l'une corresponde un élément déterminé de l'autre et réciproquement.

3° Il faut enfin que cette mise en correspondance « projette » l'ordination de chacune d'elle sur l'autre, de telle sorte que tout énoncé valable pour l'une trouve immédiatement une interprétation valable pour l'autre.

En d'autres termes, la mise en œuvre du principe d'ordination doit pouvoir être décrite pour les deux séries à la fois par les mêmes combinaisons verbales et les mêmes symboles.

Du point de vue axiomatique, deux ordinations peuvent être considérées comme identiques si elles sont dominées par deux systèmes d'axiomes identiques dans leur formulation ou par deux systèmes d'axiomes équivalents.

De ce point de vue, comparons la succession de *n* points pris sur un segment AF et de *n* points pris sur une ligne brisée ABCDEF (fig. 41).

Sur la ligne brisée, acceptons le principe d'ordination dont il vient d'être question : l'ordre des extrémités et des points de raccord se trouvant défini par l'ordre de succession des segments qui forment la ligne brisée; l'ordre des autres points s'obtenant en les intercalant « entre les précédents » selon les règles de l'ordination linéaire.

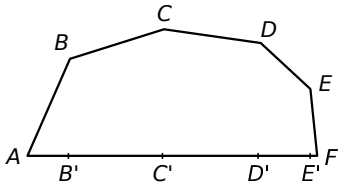


FIG. 41

Mais l'ordination 1inéaire sur le segment unique AF peut être décrite en termes identiques aux précédents : on peut tout d'abord indiquer l'ordre de succession d'un nombre égal de segments, et intercaler ensuite les autres points. La description des deux principes d'ordination est strictement la même, les deux interprétations étant, relevons-le, différentes. Il est donc légitime de dire que les points de toute ligne brisée peuvent être ordonnés comme ceux d'un segment rectiligne.

La signification du procédé d'identification que nous exposons apparaît encore plus nettement si l'on met en correspondance des éléments de nature différente.

Soit O le sommet d'un angle α et AB un segment allant d'un côté de cet angle à l'autre (fig. 42). D'après le théorème 29, toute demi-droite *f* issue de O et contenue dans α coupe AB en un point F. Il y a donc entre ces demi-

droites et les points du segment AB une correspondance biunivoque sans exception. Avons-nous un principe d'ordination pour les premières ? Nous pouvons adopter la convention suivante qui s'accorde fort bien avec l'emploi intuitif du mot entre :

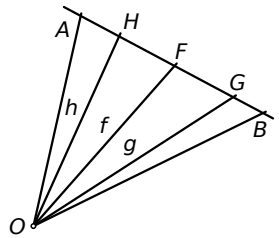


FIG. 42

une demi-droite f est dite située entre les demi-droites g et h lorsqu'elle est toute contenue à l'intérieur de l'angle formé par ces dernières.

Pour indiquer qu'il en est ainsi, nous écrivons le symbole (*g f h*).

Considérons maintenant les points F, G et H où les demi-droites en question coupent le segment AB; d'après le théorème 29, ils donnent lieu au symbole (G F H).

Nous voyons ainsi que tout symbole d'ordination valable sur AB peut être immédiatement considéré — en remplaçant les majuscules par des minuscules ! — comme un symbole d'ordination valable dans l'angle α.

C'est pourquoi il est tout indiqué de dire que *n demi-droites issues d'un point et situées dans un angle sont ordonnables comme n points d'un segment.*

81. L'ORDRE CIRCULAIRE OU CYCLIQUE. Examinons maintenant une ligne *brisée fermée*, $A_1 A_2$,... $A_n A_1$, formée de *n* segments successifs n'ayant entre eux d'autres points communs que leurs points de raccordement. Une ligne de ce genre, — le pourtour d'un triangle, par exemple, — sera dite *polygonale*.

Disposons-nous, sur une telle ligne, d'un principe d'ordination ? Nous n'en avons encore introduit aucun *axiomatiquement*. Il ne peut donc s'agir pour l'instant que d'un nouvel appel à notre information intuitive. En d'autres termes, la représentation que nous nous faisons d'un contour fermé n'est-elle pas liée à quelque notion gouvernant l'ordre de succession des points de ce contour ? La réponse est naturellement affirmative : nous savons imaginer un certain sens de circulation, — en même temps d'ailleurs, que le sens inverse, — qui peut tenir lieu de principe d'ordination. C'est précisément cette notion qui doit prendre place maintenant dans notre système. En quelle qualité l'accepterons-nous ? Comme nouvelle notion primitive ou comme notion dérivée ?

a) Essai d'axiomatisation de l'ordre circulaire. — Même si nous avions finalement à nous décider pour la dernière éventualité, il n'est pas inutile d'examiner comment cette notion peut être axiomatisée pour elle-même. Nous allons le faire rapidement.

Choisissons comme notion primitive celle de l'égalité d'orientation de deux groupes de 3 points.

Entre deux groupes de 3 points, A, B, C et A′, B′, C′, nous savons concevoir une relation qui s'exprime par les mots :

A, B, C se suivent sur la ligne polygonale dans le même sens de circulation que A′, B′, C′. Nous l'appellerons la relation *q* et nous indiquerons qu'elle est réalisée en écrivant

$$\text{ABC } q \text{ A′B′C′}.$$

Telle que nous la concevons, cette relation donne lieu à l'observation préalable que voici :

Pourvu que chacun des groupes entrant dans la relation q soit formé de trois points différents, cette relation est logiquement régulière.

Autrement dit, dans les conditions fixées, on aura toujours soit

$$\text{ABC } q \text{ A′B′C′}$$

soit

$$\text{ABC } nq \text{ A′B′C′}.$$

Viennent maintenant les trois axiomes de l'équivalence à propos desquels les remarques faites lors de l'axiomatisation de la relation *p* gardent toute leur valeur.

Axiome 1. — $\text{ABC } q \text{ A′B′C′} \rightarrow \text{A′B′C′ } q \text{ ABC}$.

Axiome 2. — $\text{ABC } q \text{ A′B′C′ \& ABC } q \text{ A″B″C″} \rightarrow \text{A′B′C′ } q \text{ A″B″C″}$.

Axiome 3. — $\text{ABC } q \text{ ABC}$.

Comme nous avons eu l'occasion de de remarquer à propos de la relation *p*, les trois axiomes de l'équivalence confèrent au signe *q* les mêmes règles d'emploi qu'au signe de l'égalité.

L'énoncé suivant n'a pas d'analogue dans le système II′. Il concerne précisément la différence essentielle existant entre un ordre linéaire et un ordre circulaire : des éléments ordonnés circulairement conservent leur sens d'ordination si l'on permute cycliquement (au sens combinatoire) leur ordre de succession, contrairement à ce qui se produit pour un groupe d'éléments ordonnés linéairement. Voici cet énoncé :

Axiome 4. — $\text{ABC } q \text{ BCA \& ABC } q \text{ CAB}$,

ou, en tenant compte de la remarque précédente relative à l'emploi du symbole *q*,

$$\text{ABC } q \text{ BCA } q \text{ CAB}.$$

L'axiome suivant est comparable à II′, 4 ou à II*, 4; il met en relation quatre éléments successifs :

Axiome 5. — ABC *q* ADB → ABC *q* ADC *q* DBC.

Voici enfin les énoncés relatifs à la négation de *q* :

Axiome 6. — ABC *nq* BAC.

Axiome 7. — ABC *nq* A′B′C′ → ABC *q* B′A′C′.

Ce système d'axiomes est très analogue au système II′. Il peut servir de base à l'axiomatisation autonome de l'ordre circulaire.

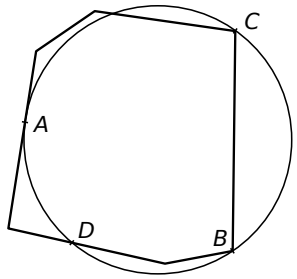


FIG. 43

Théorème 31. — *Trois points ABC déterminent, sur une ligne polygonale, trois domaines distincts* (fig. 43).

Nous dirons que deux points D et D′ appartiennent au même domaine si les relations d'orientation des groupes où intervient D avec le groupe ABC sont conservées lorsqu'on remplace D par D′. En raison des axiomes 4 et 7, il suffit que ce soit le cas pour les groupes ADB, BDC, CDA. Il nous reste à examiner les huit cas obtenus en combinant

ADB *q* ou *nq* ABC, BDC *q* ou *nq* ABC, CDA *q* ou *nq* ABC.

Cinq de ces cas offrent une contradiction visible avec nos axiomes. D'après ceux-ci :

1° La relation *q* doit avoir lieu pour l'un des groupes au moins.

Car, si elle n'avait lieu pour aucun, on aurait, en vertu des axiomes 7 et 2,

ADB *q* BDC *q* CDA.

Or, d'après l'axiome 5, ADB *q* ACD entraîne ADB *q* CDB, qui contredit ADB *q* BDC en vertu de l'axiome 6.

2° La relation *q* ne peut avoir lieu que pour un des groupes.

En effet, en appliquant successivement les axiomes 5 et 7, on voit que ADB *q* ABC entraîne DBC *q* ABC et CAD *q* ABC, etc., ou sous une autre forme :

ADB *q* ABC → BDC *nq* ABC & CDA *nq* ABC
BDC *q* ABC → ADB *nq* ABC & CDA *nq* ABC
CDA *q* ABC → ADB *nq* ABC & BDC *nq* ABC.

De ces remarques, il résulte que les autres cas ne peuvent pas se présenter. Les dernières relations montrent d'autre part qu'un point ne peut satisfaire qu'à

l'une des éventualités. Si les trois cas sont possibles, nous avons bien trois domaines différents.

Il est clair que nos axiomes ne nous empêchent pas de concevoir l'existence d'un point D satisfaisant, par exemple, à la relation ADB *q* ABC. Mais ils ne nous permettent pas non plus d'en prouver l'existence. Dans une axiomatisation autonome de l'ordre circulaire, cette existence devrait être postulée dans un dernier axiome :

Axiome 8. — *Par rapport à trois points A, B, C, il existe au moins un point D tel que ADB q ABC.*

L'existence de points D tels que BDC *q* ABC ou CDA *q* ABC peut être déduite de cet axiome.

Nous arrêterons ici les considérations axiomatiques relatives à la relation *q*, renonçant à nous engager dans la déduction de ses propriétés. Nous laisserons également de côté la question d'une surabondance éventuelle du système envisagé. En fait, la relation *q* et l'ordre circulaire sont définissables.

b) Définition de l'ordre circulaire. — Ouvrir une ligne polygonale fermée, ce sera en supprimer un segment, extrémités comprises. Ouvrir le triangle ABC, ce sera, par exemple, supprimer sur AB, le segment FG tout entier (fig. 44).

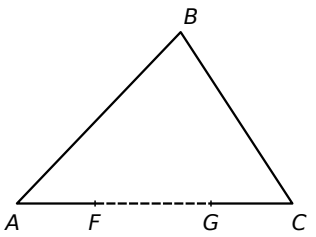


FIG. 44

Supposons que *n* points d'une ligne polygonale fermée soient appelés dans un certain ordre (ordre de succession dans le temps); on dira que, dans cet ordre, ils se suivent circulairement sur la ligne polygonale (qu'ils y sont ordonnés circulairement) s'il est possible d'ouvrir cette dernière de telle façon que, sur la ligne ouverte, ils soient ordonnés linéairement.

D'après cette définition, les trois sommets d'un triangle, appelés dans un ordre quelconque, se suivent toujours circulairement sur le bord de ce triangle.

Et voici la définition de la relation

ABC *q* A′B′C′

Considérons en même temps que les groupes ABC et A′B′C′ leurs permutations cycliques, BCA, CAB d'une part; B′C′A′, C′A′B′ d'autre part. Par définition la relation précédente revient à l'existence de la relation *p*, sur la ligne ouverte, entre l'une des trois permutations de ABC et l'une ou l'autre des permutations de A′B′C′.

Relativement à l'ordre circulaire, le but que la déduction se propose est finalement de saisir axiomatiquement la notion de « sens de circulation ». Voici

comment on peut y parvenir :

1° On démontre que *n* points d'une ligne polygonale peuvent toujours être ordonnés circulairement de deux façons différentes. Les ordres correspondants sont dits inverses l'un de l'autre.

2° Pour un groupe, le choix entre un ordre circulaire et l'ordre inverse dépend uniquement du choix de l'ordre de trois des *n* points.

Soient A, B, C ces points : les trois permutations ABC, BCA et CAB fixent le même ordre; les trois autres, l'ordre inverse.

3° On décide de la façon suivante si *deux groupes* différents sont ordonnés dans le même sens ou non : on les complète l'un et l'autre par un même groupe de trois points, qui, du fait d'appartenir à la fois aux deux groupes, se trouve orienté deux fois. S'il l'est les deux fois de la même façon, les deux groupes proposés le sont aussi.

4° En raison de 3°, tous les groupes de points se trouvent répartis en deux classes : l'une d'elles fixe, encore une fois par convention, un sens de circulation sur la ligne polygonale et l'autre le sens inverse.

82. L'ORDINATION DES FAISCEAUX ET L'ORIENTATION DU PLAN.

Bien que nous n'ayons pas encore fait le tour de nos connaissances relatives aux seules propriétés de l'ordination, notre exposé s'attarde et nous courons le risque de perdre de vue le but que nous nous sommes proposé. Ce but (nous ne nous lasserons pas de le rappeler) dépasse l'axiomatisation dans laquelle nous sommes engagés pour l'instant. Pour l'atteindre, il n'est pas nécessaire d'indiquer toutes les voies que la reconstruction axiomatique du plan peut prendre.

Si nous nous attardons à faire apparaître divers aspects de cette reconstruction, ce n'est en rien par souci encyclopédique. Il s'agit uniquement, comme on démontre le fonctionnement d'un mécanisme, de donner un exemple authentique de la façon dont l'axiomatisation s'empare d'un secteur assez étendu de notre intuition. Et pour que l'exemple soit authentique, pour que la méthode axiomatique y soit représentée avec ses caractères véritables, il nous faut maintenir avec une certaine rigueur les exigences faute desquelles cette technique mentale perd sa légitimité méthodique.

Quelles sont maintenant les notions capitales, soumises au groupe d'axiomes que nous analysons, qui restent encore en dehors de notre rayon d'action ? Ce sont avant tout celle du « sens de rotation » autour d'un point, celle du « même sens de circulation sur deux contours différents » ou du « même sens de rotation autour de deux points différents », et enfin celle de la « répartition du plan en domaines distincts ». D'ici à la fin de ce numéro, nous prendrons d'ailleurs quelques libertés axiomatiques afin d'accélérer l'exposition.

a) Le sens de rotation. — Nous nous proposons de définir un sens de rotation autour d'un point O quelconque. Avec O comme origine, supposons menées un certain nombre de demi-droites, *a*, *b*, *c*,... *l* (fig. 45). Il est toujours possible (axiomatiquement) de choisir trois points P, Q, R, tels que le triangle qu'ils forment contiennent le Point O. Le pourtour de ce triangle est coupé par chacune des demi-droites en un seul point. Soient A, B, C,... L, les points d'intersection ainsi obtenus. Nous venons de voir comment on peut les ordonner circulairement dans l'un ou l'autre des sens de circulation que nous savons définir sur la ligne fermée ABCA.

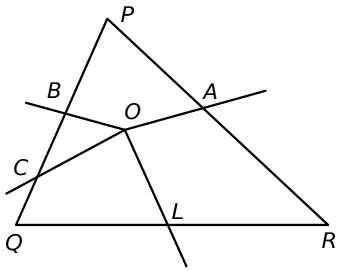


FIG. 45

Rien ne s'oppose à ce que, — par définition, — l'on reporte sur le faisceau des demi-droites de O, par l'intermédiaire de la correspondance de chacune d'elles à son point d'intersection, tout ce qui vient d'être dit de l'ordre circulaire et des deux sens de circulation. D'un seul coup, on définit ainsi les règles valables pour l'ordination d'un faisceau quelconque et deux « sens de rotation » inverses l'un de l'autre.

Cependant, pour que cette définition ne manque pas son but, il faut qu'elle se révèle indépendante du choix particulier du triangle PQR. À quelles conditions la chose est-elle possible ? Il suffit de pouvoir définir de triangle à triangle une « égalité de sens de circulation » qui satisfasse aux « axiomes de l'équivalence ». Quand dira-t-on que deux triangles sont parcourus dans le même sens ? Projetons-en les six sommets à partir de O; les six demi-droites que nous nommerons *p*, *q*, *r* et *p′*, *q′* *r′*, peuvent être circulairement ordonnées, dans un sens ou dans le sens inverse. Le choix entre ces deux possibilités peut être fait en fixant l'ordre de succession soit des trois éléments *p*, *q*, *r*, soit des trois éléments *p′*, *q′*, *r′*, — c'est-à-dire en choisissant le sens de circulation soit sur l'un des triangles, soit sur l'autre. Seront naturellement égaux les sens de circulation sur l'un et sur l'autre triangle qui correspondent au même sens d'ordination du groupe total des six demi-droites.

Les axiomes de l'équivalence sont-ils satisfaits ? Pour s'en apercevoir, il suffit de comparer deux à deux, dans l'ordination du faisceau, trois groupes différents de demi-droites.

b) L'orientation du plan. — Orienter un plan, c'est mettre en rapport les uns avec les autres les sens de rotation qui viennent d'être définis pour chaque point en particulier, de façon à pouvoir parler du même sens de rotation (ou du sens inverse de rotation) pour deux points différents quelconques.

La chose est maintenant facile à réaliser. Soient A et B ces deux points (fig. 46). Les axiomes permettent toujours d'indiquer trois points P, Q, R tels

que le triangle qu'ils forment contienne à la fois A et B. Les sens de rotation autour de ces points seront « égaux » par définition, s'ils proviennent du même sens de circulation sur le pourtour du triangle.

Cette égalité satisfait, elle aussi, aux « axiomes de l'équivalence ».

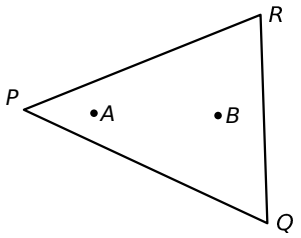


FIG. 46

c) Circulation et domaines. — Notre édification axiomatique resterait incomplète sur un point important si nous ne disions pas un mot encore de la division du plan par une ligne polygonale.

Définissons dans ce but, une opération applicable dans toute série d'éléments ordonnée linéairement ou circulairement : *la progression*.

Elle consiste à passer d'un élément à l'élément suivant (progression positive), ou à l'élément précédent (progression négative). (L'expression « passer d'un élément à un autre » ne comporte pas encore l'idée d'un mouvement allant de l'un à l'autre. Elle peut être réalisée par le simple fait de remplacer sur notre feuille le signe d'un élément par le signe de l'autre.)

Nous appellerons « circulation » dans la série une succession d'un nombre quelconque de progressions successives. Une circulation nous fait passer d'un point initial A à un point final B : nous dirons que le segment AB est son amplitude.

Dans une série linéairement ordonnée, deux cas sont possibles :

1) le point final coïncide avec le point initial; nous dirons que l'amplitude est nulle;

2) le point final est différent du point initial : l'amplitude pourra être dite positive ou négative, selon que B suit ou précède A.

Dans une série circulairement ordonnée, ces distinctions doivent encore être précisées :

1) Le point final A coïncide avec le point initial.

La circulation nous aura peut-être fait exécuter n_+ progressions positives, n_- progressions négatives à partir de A : nous dirons que son amplitude vaut $n_+ - n_-$ tours complets.

2) Le point final ne coïncide pas avec le point initial.

Il est facile d'imaginer comment la circulation peut être décomposée en une circulation dont l'amplitude vaut un certain nombre de tours, et une circulation dont l'amplitude est une ligne brisée entre le point initial et le point final.

Montrons sur l'exemple du triangle comment les distinctions précédentes permettent de caractériser les points extérieurs.

Imaginons qu'une circulation d'un tour sur le bord de ce triangle soit projetée à partir d'un point O quelconque (fig. 47). Le rayon projetant exécute lui-même une certaine circulation autour de O.

Si O est intérieur au triangle (selon la définition que nous avons déjà donnée), on peut en déduire que cette circulation vaut elle-même un tour complet.

Elle est au contraire nulle si O est un point extérieur.

(Elle n'est pas exactement définie, si O est sur le pourtour.)

Supposons maintenant le triangle remplacé par une ligne polygonale fermée (qui ne se recoupe pas), sur laquelle nous imaginons effectuée une circulation d'un tour complet. Comme pour le triangle, celle-ci peut être projetée à partir d'un point O quelconque.

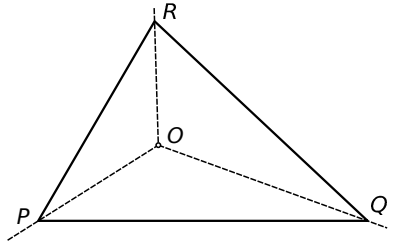


FIG. 47

Les deux cas imaginés précédemment se retrouveront pour les points qui n'appartiennent pas à la ligne elle-même. Nous prendrons comme définition des points extérieurs et des points intérieurs les propriétés dont il vient d'être question pour le triangle. On peut alors démontrer (ce que nous ne ferons pas) le résultat fondamental suivant :

Toute ligne polygonale qui se referme sans se recouper partage le plan en deux domaines distincts, l'un comprenant les points extérieurs, l'autre les points intérieurs, etc.

83. REMARQUES SUR LA DIALECTIQUE DE LA DÉDUCTION.

La fable de la maison aux mille fenêtres nous a permis de souligner que toute axiomatisation comporte deux moments essentiels :

1° le choix des fenêtres axiomatiques, c'est-à-dire le choix et la formulation de la base axiomatique;

2° la mise en œuvre des procédés internes, grâce auxquels on réussit à réduire les mille fenêtres aux seules fenêtres axiomatiques, c'est-à-dire l'exercice de la dialectique de la déduction sans lequel les axiomes resteraient sans conséquences.

En règle générale, dans ce qui précède, nous avons sévèrement contrôlé l'intervention des axiomes. Mais nous n'avons pas songé à analyser à fond, dans tous leurs détails, les moyens de la déduction. La dialectique que nous avons pratiquée est celle du raisonnement mathématique usuel.

Soulignons-le : nous n'avons pas fait l'énumération complète des procédés dont celui-ci dispose. Cette analyse appartient à une autre discipline, à la Logique déductive. Elle exige une réflexion qui viendrait prolonger, dans un cadre plus général, celle que nous poursuivons en géométrie.

Mais comment la dialectique de la déduction peut-elle nous être donnée de

façon assez claire et assez précise pour que jamais nous ne nous y trompions ? Nous en prenons possession comme d'une technique pratiquée. Et c'est précisément pourquoi l'édification axiomatique de la géométrie ne saurait être authentiquement expliquée sans une pratique suffisamment étendue de la dialectique.

Notre connaissance de la dialectique de la déduction n'est donc pas entièrement explicitée, nous n'avons cependant pas manqué d'en signaler, au passage, certains éléments essentiels : elle comprend les règles habituelles de la logique de l'objet, de la logique des classes, de la logique des jugements vrais ou faux, elle présuppose la logique de nos comportements habituels; elle fait appel à notre connaissance des nombres entiers (à ce qu'on peut appeler la dialectique des entiers), à notre faculté d'utiliser les symboles littéraux, etc.

En un mot, elle pose comme légitime la mise en œuvre de toute une « doctrine préalable des vérités élémentaires ».

Elle fera appel, nous le verrons, à des moyens encore plus forts, en s'adjoignant une part au moins de la logique des n et des ε (qui est à la base du calcul infinitésimal[1]).

LA CONGRUENCE SUR LA DROITE

84. GÉNÉRALITÉS. Nous avons maintenant à faire entrer dans notre système tout le complexe d'idées gravitant autour de la notion de « corps égaux par la forme et différents par la position ».

Nous allons commencer, comme pour le complexe de l'ordination, par la géométrie à une dimension, par la géométrie sur la droite. Ici encore, nous disposons naturellement d'assez nombreuses notions, les unes intuitives, les autres acquises par le maniement des instruments de mesure, telles que celles de la distance entre deux points, de l'égalité ou de l'inégalité de deux segments, de la mesure et du déplacement d'une longueur invariable, etc. C'est tout ce complexe de notions et les propriétés essentielles qui s'y rapportent que nous avons à saisir axiomatiquement à ce stade de notre construction rationnelle. Nous savons déjà par expérience que nous disposons d'une certaine liberté dans le choix des notions primitives. Ici encore diverses éventualités nous sont offertes. Les « solutions » auxquelles elles conduisent présentent, selon les cas, des caractères tout à fait différents.

[1] L'analyse de la dialectique sera reprise dans un prochain fascicule de Science Dialectique (voir l'axiomatisation de la mesure).

Premier essai
L'« égalité des segments » comme notion primitive

85. LA BASE AXIOMATIQUE. À l'idée que nous nous faisons de deux segments de droite AB et CD, se rattache la notion de leur égalité ou de leur inégalité. Nous sommes capables d'établir entre eux une relation, la relation de congruence, présentant les propriétés suivantes :

Elle est, tout d'abord, logiquement régulière sans exception.

Cela signifie que, quels que soient les quatre points A, B, C, D de la droite considérés, ou bien la relation est satisfaite et les deux segments sont dits égaux ou congruents ou bien la relation est en défaut et les segments sont dits inégaux. Le symbole de l'inégalité sera $AB \neq CD$.

Axiomes III′, 1-3. — *La relation d'égalité des segments satisfait aux « axiomes d'équivalence ».*

Nous ne répéterons pas, à cette occasion, les remarques auxquelles ces trois axiomes donnent lieu.

L'axiome suivant exprime le fait que l'égalité dont il est ici question renonce à tenir compte du sens des segments :

Axiome III′, 4. — *L'égalité AB = BA est valable pour tout segment AB.*

Pour rendre l'addition des segments possible, il faut un axiome adéquat; le voici :

Axiome III′, 5. — *Si B est entre A et C et B′ entre A′ et C′ et si AB = A′B′ et BC = B′C′, alors AC = A′C′.*

Nous dirons que le segment AC est la somme des segments AB et BC et A′C′ la somme des segments A′B′ et B′C′. L'axiome III′, 5 signifie donc que deux sommes formées de segments respectivement égaux sont égales.

Les sommes indiquées sont à effectuer sur une seule droite. Pour plus de clarté, la figure 48 suppose les segments portés sur des droites différentes. Il en sera de même plus loin. Nos définitions et nos axiomes devront d'ailleurs être généralisés dans ce sens.

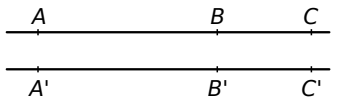


FIG. 48

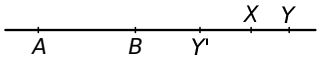


FIG. 49

Enfin, il faut pouvoir librement comparer des segments ayant des positions quelconques. C'est à quoi répond le dernier axiome du groupe, l'axiome III′, 6 dit « du report ».

Axiome III′, 6. — *Tout segment AB peut être reporté univoquement dans les deux sens à partir d'un point quelconque X.*

Cela veut dire qu'on peut trouver deux points Y et Y′, — et seulement deux, — situés de part et d'autre de X (fig. 49) et tels que

$$XY = AB \ \& \ XY' = AB.$$

Dès ici, nous considérons le recours aux propriétés de l'ordination sur la droite et dans le plan comme assuré. C'est pourquoi nous n'indiquerons plus explicitement les axiomes et les théorèmes correspondants sur lesquels le raisonnement pourra s'appuyer par la suite. Par contre, nous indiquerons l'intervention des axiomes du groupe III′.

86. DÉFINITIONS ET DÉDUCTIONS. Il s'agit maintenant de se rendre compte de la portée des axiomes qui viennent d'être adoptés (en tenant compte naturellement des axiomes acceptés précédemment et de leurs conséquences). Nous allons voir qu'ils dominent la notion de congruence sur la droite et le groupe des notions attenantes.

a) Le calcul avec les segments. — Reprenons l'idée de la somme de deux segments pour lui donner une plus grande liberté. À partir d'une origine quelconque O, et dans un *sens choisi à volonté*, portons, — l'axiome III′, 6 nous en confère la liberté, — successivement deux segments OE et EF, tels que

$$OE = AB \text{ et } EF = CD.$$

Nous conviendrons de dire que OF est aussi la somme des segments AB et CD et d'écrire

$$OF = AB + CD.$$

Rien ne nous empêche de donner une telle définition. Mais, pour qu'elle convienne, pour qu'elle ne nous conduise pas à des contradictions, il faut qu'elle soit indépendante du point O qu'elle fait intervenir dans la construction de la somme. En d'autres termes, il faut que les sommes qu'on aurait ainsi définies à l'aide de deux points différents, O et O′, soient égales entre elles. En voici la démonstration. Effectuons (III′, 6) deux fois les reports exigés par la définition, une fois à partir de O, une seconde fois à partir de O′ (fig. 50).

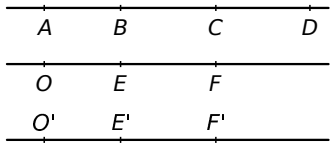


FIG. 50

En vertu de III′, 2, les segments OE et O′E′ sont égaux entre eux, puisque tous deux égaux à AB; de même EF est égal à E′F′; on peut dès lors appliquer III′, 5, qui exige précisément l'égalité des sommes OF et O′F′.

b) Propriétés de l'addition. — Théorème 32. — *L'addition des segments qui vient d'être définie possède les propriétés essentielles de l'addition numérique :* en particulier, elle est commutative et associative.

La propriété de commutativité s'exprime par l'égalité suivante (à démontrer), où *a* et *b* représentent deux segments quelconques :

$$a + b = b + a$$

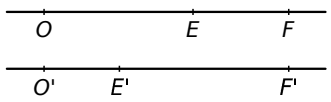


FIG. 51

Réalisons à l'aide de l'axiome du report, l'un et l'autre membre de cette égalité. Reportons à partir d'un point O quelconque et dans un sens choisi à volonté (fig. 51)

$$OE = a \text{ et } EF = b$$

D'après la définition de la somme :

$$OF = a + b$$

Reportons de même O′E′ = *b* et E′F′ = *a* alors

$$O'F' = b + a.$$

La commutativité se trouvera donc établie par l'égalité (à démontrer)

$$OF = O'F'.$$

L'axiome III′, 2, permet de remplacer, dans une égalité l'un ou l'autre des deux membres par un segment égal.

Or, d'après III′, 4,

$$O'F' = F'O'$$

Il suffira donc de démontrer :

$$OF = F'O'.$$

Mais, encore une fois d'après III′, 4,

$$F'E' = E'F' \ (= a) \text{ et } E'O' = O'E' \ (= b).$$

D'après la définition de l'addition :

$$F'O' = F'E' + E'O'.$$

Il suffit d'appliquer maintenant III′, 5 aux sommes

$$OF = OE + EF \text{ et } F'O' = F'E' + E'O'$$

ce qui nous amène précisément à l'égalité

$$OF = F'O'.$$

La propriété d'associativité s'exprime par l'égalité

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Pour la démontrer, il suffit de bien décrire comment les axiomes permettent de réaliser les deux sommes indiquées.

c) Multiplication d'un segment par un nombre entier ou fractionnaire. — Il est à peine nécessaire d'indiquer comment, à partir de l'addition, on définit un segment double, triple, etc., d'un segment donné.

Voici, d'autre part, ce que doit être la moitié, le tiers, le quart, etc., d'un segment proposé, quelconque.

Soit AB ce dernier segment. Par $\frac{1}{n}$ AB, où n désigne un entier, on entend un segment OX d'origine et de sens quelconques, tel que

$$n\ OX = AB.$$

On démontrera facilement des énoncés tels que

$$AB = CD \rightarrow \frac{1}{n} AB = \frac{1}{n} CD$$

ou

$$\frac{m}{n} (AB + CD) = \frac{m}{n} AB + \frac{m}{n} CD.$$

Mais — il faut y penser ! — les axiomes admis jusqu'ici n'assurent pas *l'existence* des fractions de segments.

Ainsi, par exemple, il ne nous est pas encore possible d'établir axiomatiquement qu'*il existe* un segment égal à la moitié d'un segment choisi à volonté.

Pour illustrer la mise en œuvre des axiomes du groupe III′, démontrons encore le théorème suivant :

Théorème 33. — *Aucun segment ne peut être à l'intérieur d'un autre segment qui lui serait égal.*

La preuve se fera par la réduction à une contradiction. Supposons donc, contrairement à l'énoncé, que le segment CD contenu dans l'intervalle AB, soit égal à ce segment AB (fig. 52). D'après la définition de l'addition :

$$AB = AC + CD + DB$$

Mais l'addition est commutative. Donc

$$AB = CD + AC + DB$$

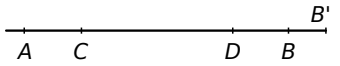


FIG. 52

Construisons le membre de droite, en appliquant l'axiome du report à partir de A, de A vers B. Nous commencerons par reporter un segment égal à CD, puis successivement et dans le même sens, un segment égal à AC et un segment égal à DB.

Or, le report d'un segment dans un sens déterminé ne peut se faire (d'après III′, 6) que d'une seule façon. CD reporté nous amènera de A en B (puisque CD = AB). En reportant encore les deux autres segments, nous passerons sûrement au delà de B, en B′ par exemple.

Nous aurons ainsi (comme application de III′, 5) reporté AB de A en B′. Or ceci est en contradiction formelle avec l'axiome du report — en contradiction avec l'unicité du report dans un sens détermine.

Les axiomes interdisent donc — par leurs conséquences — l'hypothèse contraire à l'énoncé,

etc., etc.

87. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES NOTIONS « PLUS GRAND » ET « PLUS PETIT ».

Les explications qui précèdent suffisent certainement pour montrer comment la déduction peut se dérouler à partir des propriétés axiomatiques de l'égalité des segments.

Notre programme de reconstruction doit maintenant se tourner vers les notions définissables. Examinons les relations usuelles « plus grand » et « plus petit ».

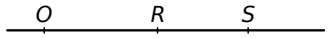


FIG. 53

Soient AB et A′B′ deux segments quelconques. À partir d'un point O quelconque, portons-les tous deux dans le même sens (fig. 53).

$$OR = AB \text{ et } OS = A'B'.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1) R et S coïncident. Dans ce cas, c'est que (d'après III′, 5)

$$AB = A'B'.$$

2) R vient entre O et S. Dans ce cas,

$$OS = OR + RS.$$

Donc

$$A'B' = AB + RS.$$

Nous dirons que le segment A′B′ est plus grand que le segment AB, ou que ce dernier est plus petit que A′B′, et nous écrirons

$$A'B' > AB \text{ ou } AB < A'B'.$$

3) S vient entre O et R.

Les définitions données sous 2) restent valables, mais les rôles de AB et de A′B′ se trouvent échangés :

$$A'B' < AB \text{ ou } AB > A'B'.$$

Ces définitions font intervenir un point O arbitraire. Pour pouvoir en faire l'usage qu'on veut, il faut naturellement montrer qu'elles sont indépendantes de ce point. Nous supposerons la chose faite.

Examinons maintenant si la relation « > » possède les propriétés qu'on en attend.

Théorème 34. — $AB > A'B' \rightarrow n\,AB > n\,A'B'$.

L'inégalité $AB > A'B'$ signifie

$$A'B' + CD = AB,$$

d'où l'on tire (n° 86, c)

$$n\,(A'B' + CD) = n\,AB.$$

Les propriétés de l'addition nous donnent

$$n\,(A'B' + CD) = n\,A'B' + n\,CD = n\,AB.$$

Cette dernière égalité contient précisément la propriété à démontrer.

Théorème 35. — Si $AB > A'B'$ et $A'B' > A''B''$, alors $AB > A''B''$.

Pour démontrer la transitivité de la relation « > », partons des relations

$$AB = A'B' + CD \qquad A'B' = A''B'' + EF;$$

on en tire, en vertu des propriétés de l'égalité et de la somme,

$$AB = A''B'' + CD + EF,$$

c'est-à-dire

$$AB > A''B''.$$

Théorème 36. — *Si les points A, B, C, D, se suivent dans l'ordre ABCD, alors*

$$AD > BC.$$

D'après la définition donnée ci-dessus, nous avons

$$AD > BD \text{ et } BD > BC.$$

En appliquant le théorème 35, nous obtenons

$$AD > BC.$$

88. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU « DÉPLACEMENT SUR LA DROITE ».

Nous voulons enfin montrer comment on peut définir la notion de déplacement sur une droite et déduire ses propriétés principales. Ceci est la plus importante des applications.

Soit OA un segment donné, d'ailleurs quelconque. Reportons-le à partir d'un point X quelconque, dans le même sens pour tous les X : le sens de O vers A, et soit XX′ = OA le segment ainsi obtenu (fig. 54).

FIG. 54

Nous induisons ainsi une transformation XX′ de la droite sur elle-même; par définition, cette transformation est un *déplacement* de la droite en elle-même. De cette façon, à tout segment dirigé, nous faisons correspondre un déplacement déterminé.

Supposons qu'on ait construit les correspondants X′ et Y′ des deux extrémités X et Y d'un segment XY, lui-même quelconque. X′Y′ sera le segment déplacé, XY le segment originel.

Théorème 37. — *Tout segment déplacé est égal au segment originel.*

Pour démontrer cette proposition, distinguons deux cas suivant que XY et X′Y′ empiètent l'un sur l'autre ou non.

FIG. 55

1) XY = XX′ + X′Y (fig. 55)
X′Y′ = X′Y + YY

et comme XX′ = YY′ = OA, le calcul des segments permet d'en tirer XY = X′Y′.

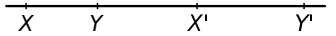


FIG. 56

2) XY + YX′ = XX′ (fig. 56)
YX′ + X′Y′ = YY′.

On en tire également XY = X′Y′.

D'après la définition (et à cause de l'unicité du report), il y a exactement un déplacement de la droite sur elle-même qui amène un point O (choisi une fois pour toutes) sur un point A (choisi selon le déplacement à obtenir).

1° Si A coïncide avec O, tout X′ coïncide avec son X et reste par conséquent en place. On obtient ainsi le déplacement nul.

2° Pour effectuer l'un après l'autre deux déplacements (correspondants aux segments OA et OB), il faut tout d'abord reporter XX′ = OA, puis X′X″ = OB

(fig. 57). D'après les propriétés précédemment obtenues, on reporte ainsi un segment XX″ = OA + OB. Le résultat est donc encore un déplacement.

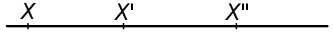


FIG. 57

3° Si B est en A′, symétrique de A par rapport à O, le second déplacement correspondant à OA annule le premier : ces deux déplacements sont inverses l'un de l'autre.

4° Les déplacements envisagés sont associatifs. Cela se marque dans l'associativité de l'addition[1].

Ces quatre propriétés caractérisent un groupe. Donc :

Théorème 38. — *Les déplacements de la droite sur elle-même forment un groupe.*

Il est aussi facile de définir la symétrie sur une droite et de déduire ses propriétés. L'on aurait ainsi axiomatisé sur la droite les plus importantes des notions dépendant du groupe d'axiomes III′.

Second essai
Le « déplacement sur la droite » comme notion primitive

89. LA BASE AXIOMATIQUE. Plusieurs fois déjà nous avons fait observer que l'on jouit d'une certaine liberté dans le choix des notions primitives et dans la formulation des axiomes correspondants. Les expériences que nous avons déjà faites à ce sujet ne laissent subsister aucun doute, et pourraient suffire s'il ne s'agissait que d'établir cette liberté.

Mais les divers essais qu'on peut faire ne présentent pas seulement un intérêt quant à la méthode axiomatique en général : chacun d'eux met spécialement en lumière un aspect de l'édifice géométrique, et certains d'entre eux présentent de ce fait un intérêt mathématique tout spécial.

C'est pourquoi, comme une fois déjà, nous reprendrons les choses en sens inverse : prenant la notion de déplacement comme notion primitive, nous en déduirons celle de l'égalité des segments.

Puisque la notion de déplacement doit être prise comme notion primitive, nous n'avons pas à la définir : une notion primitive, — faut-il le rappeler, — ne se définit pas; on se borne à expliquer comment elle s'introduit.

On imagine qu'un déplacement fait correspondre à tout segment AB un segment A′B′ en général différent du premier, et l'on dit que AB est la position

[1] D'ailleurs effectuer une suite de transformations est toujours une opération associative.

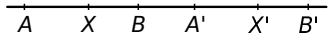


FIG. 58

initiale d'un segment dont A′B′ est la position finale (fig. 58). On dit aussi que AB est le segment non déplacé, A′B′ le segment déplacé.

On peut aller plus loin et imaginer que la droite tout entière (ou telle portion de la droite que l'on voudra) accompagne le segment dans son déplacement. À tout point X correspond alors un point X′, le premier X étant nommé la position initiale ou originelle d'un point dont X′ est la position finale.

Voici maintenant un choix d'axiomes adéquats.

Axiome III*, 1. — *Un déplacement respecte l'ordre des points de la droite.*

Cela veut dire que l'ordre dans lequel les points et les segments déplacés se suivent doit être le même que pour les points et les segments non déplacés.

Axiome III*, 2. — *Soient A et B deux points quelconques : il existe au moins un déplacement qui amène A en B.*

Axiome III*, 3. — *Lorsque, dans un déplacement, un point reste en place, tout autre point reste aussi en place.* (Le déplacement est alors dit déplacement nul, identité ou repos.)

Axiome III*, 4. — *Les déplacements forment un groupe abélien de transformations.*

Cela veut dire que :

1° l'identité est un déplacement, ce que nous savons déjà,

2° la succession (qu'on appelle aussi le produit) de deux déplacements est encore un déplacement,

3° l'inverse d'un déplacement est un déplacement,

4° le produit de deux déplacements est commutatif.

Remarques. — IcI n'y a pas besoin de supposer l'associativité du produit car elle est d'avance assurée pour toute succession de transformations. L'axiome III*, 3 n'est pas superflu comme le montre l'exemple du groupe des agrandissements proportionnels sur la droite où cet axiome est mis en défaut. L'axiome III*, 2 n'est pas superflu non plus, comme le montre l'exemple du groupe des puissances entières d'un déplacement fixe, pour lequel III*, 2 n'est pas valable.

90. DÉFINITIONS ET DÉDUCTIONS. Théorème 39. — *Il y a exactement un déplacement amenant un point A en un point B.*

Nous savons qu'il existe au moins un déplacement de cette sorte (axiome III*, 2). Montrons qu'il n'en existe qu'un. À cet effet, supposons qu'il existe au moins deux déplacements amenant A en B : le premier, D_1, amenant un point C en D_1, le second, D_2, amenant le point C en D_2. Appelons D_2^{-1} l'inverse

de D_2 et effectuons successivement D_2^{-1} et D_1. Le déplacement ainsi obtenu laisse le point B fixe et amène D_2 sur D_1. Or, ceci est en contradiction avec l'axiome III*, 3.

91. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'« ÉGALITÉ DES SEGMENTS ». Nous avions défini les déplacements à partir de l'égalité des segments; nous allons maintenant définir l'égalité des segments en partant des déplacements.

Répartissons les segments en classes :

À chaque déplacement, nous ferons correspondre tous les segments AB tels que ce déplacement amène A en B ou B en A.

D'après le théorème précédent, chaque segment détermine un déplacement ou son inverse. Il lui correspond donc aussi une classe bien déterminée de segments, dont il fait lui-même partie. Nous dirons alors que *deux segments sont égaux, s'ils appartiennent à la même classe*.

Pour que cette définition puisse être utile, qu'elle puisse se rattacher à ce que nous avons fait jusqu'à maintenant, il faut que les axiomes primitivement adoptés sur l'égalité des segments deviennent des propositions démontrables à l'aide des axiomes du déplacement.

Venons-en donc à la déduction des propriétés de l'égalité :

1° AB = AB.

C'est une tautologie, car le déplacement qui amène A en B, amène A en B.

2° Si AB = A′B′, alors A′B′ = AB.

En effet, si AB appartient à la même classe que A′B′, alors A′B′ appartient à la même classe que AB.

3° Si AB = A′B′ et AB = A″B″, alors A′B′ = A″B″.

Si AB appartient à la même classe que A′B′ et que A″B″, alors A′B′ et A″B″ appartiennent à la même classe.

4° AB = BA.

Le déplacement qui amène A en B et celui qui amène B en A définissent la même classe.

Avant d'établir les autres propriétés de l'égalité, démontrons le théorème suivant :

Théorème 40. — *À tout segment correspondent deux déplacements, le premier qui amène A en B, le second qui amène B en A. Ce dernier amène A en un point B′ qui n'est pas du même côté de A que B.*

En effet, le segment AB devient, si l'on effectue le second déplacement, B′A. Si B′ était du même côté de A que B, alors B′A n'aurait pas la même orientation que AB en contradiction avec l'axiome III*, 1.

Reprenons maintenant notre énumération :

5° Étant donnés un point R et un segment AB, il est possible de trouver deux points, P et S, de part et d'autre de R, tels que PR = SR.

Pour trouver ces points, il suffit d'appliquer au point R les déplacements qui amènent A en B ou B en A.

6° Si AB = A′B′ et BC = B′C′ et que ABC autant que A′B′C′ se suivent dans cet ordre, alors AC = A′C′.

Soient D_1 et D_2 les déplacements qui amènent A en B et B en C. D_1 amène soit A′ en B′, soit B′ en A′; D_2 amène soit B′ en C′, soit C′ en B′. Il semble y avoir quatre cas possibles :

1)	2)	3)	4)
$D_1 : A' \to B'$	$D_1 : A' \to B'$	$D_1 : B' \to A'$	$D_1 : B' \to A'$
$D_2 : B' \to C'$	$D_2 : C' \to B'$	$D_2 : B' \to C'$	$D_2 : C' \to B'$

Mais il est facile de voir, à l'aide de ce qui a déjà été dit de l'ordination, que les cas 2) et 3) ne peuvent pas intervenir. Les deux autres possibilités assurent précisément les conditions du report univoque dans l'un et l'autre sens.

LA CONGRUENCE DANS LE PLAN

92. GÉNÉRALITÉS. À cet instant de notre axiomatisation, deux voies s'ouvrent à nouveau à notre analyse, comme ce fut le cas déjà avant l'introduction de l'axiome de PASCH. Remarquons en effet que la notion de longueur mesurée reste encore en dehors de notre construction rationnelle. Le fait semble assez inexplicable à première vue, car dans notre information préaxiomatique, la notion de longueur mesurée est certainement liée à celle de l'égalité de deux segments, et à celle du déplacement d'un segment. Or ces deux dernières notions ont déjà pris place dans notre édification axiomatique. Le moment n'est-il pas venu d'y englober aussi la notion de mesure ?

C'est précisément l'une des deux voies auxquelles nous venons de faire allusion. En d'autres termes, nous pourrions continuer à axiomatiser la géométrie sur la droite sans songer encore à étendre au plan l'analyse des notions qui viennent d'être traitées. Il se révélerait alors que l'idée de la mesure est inséparablement liée à celle de l'ordre continu sur la droite, et qu'elle ne peut être rejointe sans une nouvelle extension de notre base axiomatique.

L'autre voie comporte l'étude immédiate de la congruence et du groupe des

idées attenantes (en particulier des déplacements) dans le plan, — pour n'introduire l'idée de la mesure d'un segment ou de la mesure d'un angle que plus tard.

Les deux façons de faire ont leurs avantages et leurs désagréments. Il se présente que l'introduction de la continuité marque un moment décisif de l'axiomatisation, et que celle-ci prend une évolution fort différente, selon que la continuité y est admise plus tôt ou plus tard. En règle générale, plus l'introduction de la continuité se trouve retardée et plus l'analyse des notions peut être détaillée et nuancée.

C'est la raison pour laquelle nous donnerons la préférence à la seconde façon de faire.

93. LA BASE AXIOMATIQUE. Ce qui guide le choix des notions primitives et des axiomes, c'est souvent la ligne générale qu'on a, d'avance, décidé de suivre. Ce sont parfois aussi des considérations esthétiques dont il faut se garder de sous-estimer la valeur et l'importance, des considérations relevant naturellement de l'esthétique spéciale des mathématiques.

Par exemple, on peut chercher à satisfaire à un souci de symétrie (ce qui est précisément un souci d'ordre esthétique) en ce qui concerne l'égalité des segments et l'égalité des angles. La liste de nos axiomes peut alors être complétée de la façon suivante :

1° Rappelons que l'égalité des segments sur une droite est dominée par les axiomes du groupe III′.

2° On étend par décret axiomatique la validité de ces axiomes à des segments situés sur des droites différentes.

3° On adopte comme nouvelle notion primitive celle de l'égalité des angles de même sommet. On formule un système d'axiomes analogue au système III′.

4° On étend par décret axiomatique la validité de ces axiomes à des angles qui n'ont pas le même sommet.

5° On relie enfin l'égalité des segments et celle des angles par un axiome convenable.

Ce programme est très simple. En voici le détail :

Nous ne répétons pas les axiomes sur l'égalité des segments. Voici comment ceux qui concernent les angles peuvent être formulés.

Axiome III″, 1-3. — *La relation d'égalité des angles satisfait aux « axiomes d'équivalence » :*

1. *Tout angle est égal à lui-même,* c'est-à-dire

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (a,b)$$

2. *La relation d'égalité de deux angles est symétrique,* c'est-à-dire :

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (c,d) \text{ équivaut à } \sphericalangle (c,d) = \sphericalangle (a,b)$$

3. *Si, pour trois angles* $\sphericalangle (a,b)$, $\sphericalangle (c,d)$, $\sphericalangle (e,f)$, *on a*

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (c,d) \text{ et } \sphericalangle (e,f) = \sphericalangle (c,d),$$

on a nécessairement aussi

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (e,f).$$

Axiome III″, 4. — *On a pour tout angle :*

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (b,a).$$

Cet axiome signifie que l'orientation d'un angle ne joue aucun rôle dans l'égalité envisagée.

Axiome III″, 5. — *Si quatre angles,* $\sphericalangle (a,b)$ *et* $\sphericalangle (b,c)$ *d'une part et* $\sphericalangle (a',b')$ *et* $\sphericalangle (c',d')$ *d'autre part* (les droites a, b, c comme les droites a', b', c' se suivant dans cet ordre), *sont tels qu'ont ait*

$$\sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (a',b') \text{ et } \sphericalangle (b,c) = \sphericalangle (b',c'),$$

on a nécessairement aussi

$$\sphericalangle (a,c) = \sphericalangle (a',c').$$

Cet axiome doit conduire à la définition d'une addition des angles.

Axiome III″, 6. — *Un angle quelconque* $\sphericalangle (a,b)$ *peut être reporté à partir de tout rayon x, d'une seule façon dans les deux sens.*

Cela veut dire que l'on peut toujours trouver deux rayons y et y' tels que les angles $\sphericalangle (y',x)$ et $\sphericalangle (x,y)$ aient la même orientation et tels que

$$\sphericalangle (y',x) = \sphericalangle (a,b) = \sphericalangle (x,y).$$

À l'aide de ces axiomes et de façon en tout point semblable à ce qui précède pour les segments, on peut définir, pour les angles, l'addition, la soustraction, la multiplication par des nombres rationnels (sans pouvoir, il est vrai, démontrer l'existence des fractions d'un angle $\sphericalangle (a,b)$ quelconque), la rotation des angles et des rayons autour d'un sommet, etc.

Le troisième pas consiste, comme nous l'avons dit, à étendre la validité de ces axiomes à des angles n'ayant pas le même sommet.

Ceci fait, nous n'avons encore aucun moyen (axiomatique) de relier l'égalité des segments à celle des angles. C'est pourquoi il est encore nécessaire d'admettre (au moins) un axiome concernant l'égalité de deux figures formées

à la fois d'angles et de segments. Il est donc tout indiqué de choisir pour finir un axiome concernant l'égalité de deux triangles. Les axiomes qui peuvent convenir ici sont plus ou moins équivalents à un cas d'égalité de deux triangles. On peut, par exemple, choisir tout simplement la partie suivante du premier cas d'égalité :

Axiome III‴. — *Lorsque, dans deux triangles ABC et A′B′C′, on a les égalités*

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ et } \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B',$$

on a nécessairement aussi

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$$

Le groupe des axiomes de l'égalité est alors complet; il est même surabondant !

Les axiomes de ce groupe semblent avoir été choisis de façon assez naturelle. L'intervention symétrique de l'égalité des segments et de l'égalité des angles frappe agréablement. Cependant, si on l'analyse de plus près, on y remarque certains défauts, — défauts difficiles d'ailleurs à éviter sans en engendrer d'autres.

La construction axiomatique, avons-nous dit, a ses exigences esthétiques spéciales. L'une de ces exigences, c'est que tous les axiomes formulés soient véritablement nécessaires. En d'autres termes, c'est qu'aucun axiome ne puisse être supprimé de la liste des axiomes pour passer dans la liste des théorèmes (démontrés seulement sur la base des axiomes restants). En d'autres termes encore, on exige que les axiomes choisis soient *indépendants les uns des autres*, de façon plus précise, que chacun soit indépendant du groupe de tous les autres.

Dans notre cas, l'exigence de l'indépendance et l'exigence de la symétrie sont antagonistes.

Ainsi, par exemple, il se révèle qu'après l'introduction de l'axiome III‴, l'unicité du report pour les segments est démontrable à partir de l'unicité du report pour les angles, et que, par conséquent, l'axiome III″, 6 pourrait être supprimé.

94. Conséquences des axiomes de la congruence.

Nous n'avons pas l'intention d'entrer dans la démonstration de toutes les propriétés de géométrie élémentaire qui peuvent maintenant être établies. Nous donnerons la liste de ces propriétés ci-dessous, nous bornant ici à illustrer la mise en œuvre de l'axiome de jonction en démontrant la partie du premier cas d'égalité des triangles qui n'est pas postulée dans III‴, puis le troisième cas d'égalité.

Théorème 41. — *Si deux triangles ABC et A′B′C′ sont tels que*

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ et } \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C',$$

on a aussi

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C',\ \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' \text{ et } BC = B'C' \text{ (fig. 59).}$$

L'égalité des angles ABC et A′B′C′ résulte de l'axiome III‴.

Il en est de même de l'égalité des angles ACB et A′C′B′, par permutation des rôles de B et C. Il ne reste à démontrer que l'égalité des côtes BC et B′C′.

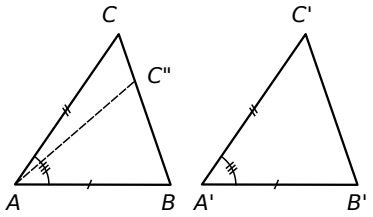


FIG. 59

Supposons que cette dernière égalité n'ait pas lieu et admettons, par exemple, que B′C′ soit plus petit que BC. Reportons B′C′ sur BC de B en C″. C″ vient entre B et C; les angles BAC″ et BAC ont donc même orientation. Menons AC″ et considérons les triangles ABC″ et A′B′C′. Ils satisfont par les côtés BA et B′A′, BC″ et B′C′ et les angles ABC″ et A′B′C′ aux conditions de l'axiome III‴. L'angle BAC″ devrait donc être égal à l'angle BAC. Nous aurions ainsi reporté B′A′C′ sur BAC et BAC″ de deux façons différentes dans le même sens, ce que l'axiome du report des angles interdit. Notre hypothèse est fausse, il faut que B′C′ soit égal à BC.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité, nous avons besoin d'un théorème d'une importance fondamentale dans sa simplicité, celui de l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle.

Théorème 42. — *Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.*

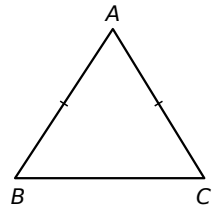


FIG. 60

La démonstration consiste en une simple application de l'axiome III‴.

Soit ABC un triangle, tel que AB = AC (fig. 60). Considérons à la fois les deux triangles ABC et ACB; ils satisfont aux conditions de l'axiome III‴, puisque

$$AB = AC,\ AC = AB \text{ et } \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB.$$

Par conséquent

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB.$$

Voici maintenant l'énoncé et la démonstration du troisième cas d'égalité.

Théorème 43. — *Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, leurs angles sont égaux deux à deux.*

Il nous suffit de prouver que $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'B'C'$.

Reportons donc l'angle B′A′C′ à partir de AB dans le sens opposé à celui de BAC, puis construisons AC″ = A′C′ (fig. 61). Les deux triangles ABC″ et A′B′C′ satisfont aux conditions du premier cas d'égalité. En effet, AB = A′B′ par hypothèse, AC″ = A′C′ par construction et

$$\sphericalangle \text{BAC}'' = \sphericalangle \text{B}'\text{A}'\text{C}'$$

par construction. Il en résulte en particulier l'égalité BC″ = B′C′ = BC.

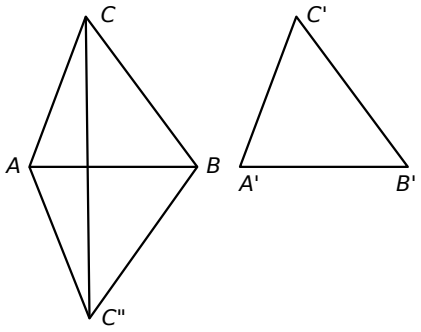


FIG. 61

Les triangles ACC″ et BCC″ sont donc isocèles; en leur appliquant le théorème 42 et en faisant usage de l'axiome III″, 5, on obtient l'égalité $\sphericalangle$ ACB = $\sphericalangle$ AC″B. Par comparaison avec l'égalité déjà obtenue $\sphericalangle$ AC″B = $\sphericalangle$ A′C′B′ et en faisant intervenir l'axiome III″, 3, on parvient au résultat cherché $\sphericalangle$ ACB = $\sphericalangle$ A′C′B′.

Indiquons encore sommairement les propriétés qui découlent de ce dernier groupe d'axiomes. Ce sont les propriétés des perpendiculaires, le second cas d'égalité des triangles, la définition des déplacements dans le plan (sans l'usage des parallèles) ainsi que la définition des symétries et l'égalité des figures symétriques.

L'ORDRE CONTINU

95. ANALYSE DE LA MESURE. Après avoir adopté les axiomes de l'égalité des segments sur la droite, nous avons pu fixer axiomatiquement dans quelles conditions un segment est le double ou la moitié, le triple ou le tiers d'un autre segment, etc. Mais, nous n'avons pas encore pu lui attribuer une mesure numériquement déterminée. Nous allons maintenant nous en occuper.

Comme nous revenons ainsi à la géométrie sur la droite, nous ferons abstraction des axiomes concernant la congruence dans le plan, et de leurs conséquences.

Voici donc le problème que nous avons à traiter :

Un segment quelconque, a, nous est proposé; nous avons à le mesurer à l'aide d'un autre segment e.

Imitons axiomatiquement les procédés de la géométrie expérimentale. Supposons qu'on ait à mesurer le segment AB et reportons le segment *e* — le segment-unité — à partir de A et du côté de B, une fois, deux fois, etc., tant que nous n'aurons pas atteint ou dépassé B.

Une première question se pose : Est-il sûr que, de cette façon, B sera une fois atteint ou dépassé ? Est-ce là un résultat déjà déduit ? Non. Est-ce là un axiome déjà adopté ? Non, encore une fois !

a) Postulat d'ARCHIMÈDE. — Nous aurons donc soit à le démontrer, soit à le porter dans la liste des axiomes. Sous le nom de postulat d'ARCHIMÈDE (ou d'EUDOXE) on l'énonce habituellement ainsi :

Soient e et a deux segments quelconques, tels que a > e; il existe un entier[1] *N pour lequel Ne > a.*

En d'autres termes, en reportant le segment quelconque *e* bout à bout un nombre de fois suffisant, on peut toujours obtenir un segment plus grand que tout segment donné à l'avance.

Sans décider encore si nous allons faire un axiome ou non de cet énoncé, mettons-le au nombre des énoncés valables.

Deux cas sont alors possibles :

1) pour un certain entier *n*, on aura exactement $ne = a$.

Par définition, le nombre *n* est alors la mesure du segment *a*.

2) pour un certain *n* on aura

$$ne < a < (n + 1)e$$

En reportant *n* fois l'unité, on s'arrête en A_1 avant B; en la reportant $n + 1$ fois on passe en B_1 au delà de B (fig. 62). Dans ce cas, le nombre *n*, qui mesure le segment AA_1, fournit une première approximation. Le problème se trouve ramené à la mesure du segment « restant » A_1B.

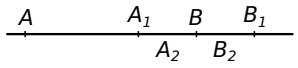


FIG. 62

Ce segment étant d'ailleurs plus petit que l'unité *e*, celle-ci ne peut plus nous être d'aucune utilité. Pour pouvoir se poursuivre, le procédé de mesure doit faire usage d'une première sous-unité, e_1. Dans le système décimal, on choisit $e_1 = \frac{1}{10}\, e$. Mais si nos axiomes nous permettent d'opérer avec les sous-multiples d'un segment « comme s'ils existaient », ils n'en assurent cependant pas encore l'existence. Aussi nous bornerons-nous pour l'instant à choisir arbitrairement e_1.

Le postulat d'ARCHIMÈDE, appliqué à *e* et e_1, exige l'existence d'un entier N_1, tel que

[1] Un premier entier.

$$N_1e_1 \leq e < (N_1 + 1)e_1$$

Appliqué au segment restant et à e_1, ce même postulat exige l'existence d'un second entier $n_1 \leq N_1$, tel que

$$n_1e_1 \leq A_1B < (n_1 + 1)e_1$$

Deux cas peuvent se présenter :

1) n_1e_1 est exactement égal à A_1B.

Dans ce cas, le segment proposé vaut :

$$AB = ne + n_1e_1.$$

Les deux nombres n et n_1 en fournissent (avec les unités choisies) la mesure exacte.

2) $n_1e_1 < A_1B$

Cela veut dire qu'en reportant notre sous-unité e_1 n_1 fois de suite, on s'arrête avant B, en A_2 par exemple; et qu'en la reportant une fois de plus, on passe au delà de B, en B_2, par exemple.

Le segment $AA_2 = ne + n_1e_1$ fournit une seconde approximation et le problème est ramené à la mesure du segment restant A_2B. Celui-ci étant plus petit que e_1, il nous faut pour pouvoir continuer, faire choix d'une seconde sous-unité e_2.

Le postulat d'ARCHIMÈDE, appliqué à e_1 et e_2, fournira un N_2 tel que

$$N_2e_2 \leq e_1 < (N_2 + 1)e_2$$

Appliqué au segment restant et à e_2, il exigera l'existence d'un

$$n_2 \leq N_2 \text{ tel que } n_2e_2 \leq A_2B < (n_2 + 1)e_2$$

et ainsi de suite.

Deux cas peuvent maintenant se présenter :

1) le procédé aboutit après un nombre fini d'opérations;

2) le procédé doit être indéfiniment répété.

Le premier cas n'a pas besoin d'autres explications.

Le second demande, au contraire, à être encore examiné avec attention.

Il nous conduit à un procédé d'approximations successives indéfiniment prolongé. Est-il sûr que ce procédé « converge » ?

b) Suite de segments tendant vers zéro. — Cela dépend tout d'abord de la possibilité de choisir une suite indéfiniment prolongée de sous-unités successives, e_1, e_2,... e_n,... Pour que le système de ces dernières puisse servir à la mesure de tous les segments, il faut qu'il possède les deux propriétés caractéristiques suivantes :

1° une e_i quelconque est plus grande que la suivante;

2° il n'existe aucun segment plus petit à la fois que toutes les e_i.

Nous dirons qu'un système de segments satisfaisant à ces deux propriétés caractéristiques *tend en décroissant vers un segment nul* (ou vers zéro).

Par quel procédé systématique engendrerons-nous une série de segments de ce genre ?

Supposons la chose faite (nous y reviendrons plus tard). Le segment à mesurer se trouve alors décomposé à l'aide du système des unités selon la formule

$$AB = ne + n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + ...$$

Arithmétiquement, notre procédé de mesure revient donc à la détermination progressive d'une suite d'entiers

$$n, n_1, n_2, n_3, ...$$

(tels d'ailleurs que $n_i \leq N_i$).

Il sera commode de l'appeler la suite mesurante du segment proposé.

Dans le cas où l'on choisit les unités en rapport avec un système de numération, avec le système décimal, par exemple, la suite mesurante peut être immédiatement interprétée; elle équivaut au développement en fraction décimale illimitée d'un certain nombre rationnel ou irrationnel : ce nombre est précisément la mesure du segment. C'est là un point sur lequel nous aurons également à revenir.

Géométriquement, c'est la question inverse qui se pose : la suite mesurante permet-elle de remonter au segment mesuré ? En reportant à partir de A successivement (fig. 63)

$$AA_1 = ne;\ A_1A_2 = n_1e_1;\ A_2A_3 = n_2e_2;\ \text{etc.},$$

il est clair que l'on retrouve la suite linéairement ordonnée des A_i. De plus, les segments restants satisfont, par construction, aux inégalités

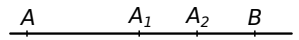


FIG. 63

$$A_1B < e \qquad A_2B < e_1 \qquad ..... \qquad A_iB < e_{i-1}$$

Comme le système des e_i, ils forment donc (la déduction stricte en est des plus faciles) une suite tendant vers un segment nul.

Mais cela suffit-il pour assurer axiomatiquement le passage de la suite infinie des A_i au point B ?

C'est à ce propos que se pose la troisième des questions qui dominent le problème de la mesure : les axiomes adoptés jusqu'ici nous autorisent-ils à prétendre que, dans certaines conditions, une suite infinie de points « converge » vers un point déterminé ? Rien d'analogue n'a été jusqu'ici admis, ni déduit.

C'est pourquoi, sans décider encore du rôle que nous lui attribuerons, en le considérant jusqu'à nouvel avis comme un énoncé en suspens, nous allons formuler un postulat qui se rapporte à cette question, et que nous appellerons le *postulat du point limite*.

c) Postulat du point limite. — *Une suite de points A_i dénombrable, linéairement ordonnée et bornée « converge » vers un « point-limite » L possédant les deux propriétés caractéristiques suivantes :*

1° *dans l'ordre suivant lequel les A_i se suivent, L vient après tout A_i;*

2° *il n'existe pas d'autre point L′, ayant la propriété 1°, qui vienne avant L* (fig. 64).

Ajoutons qu'une suite de points est dénombrable, si les points qui la forment sont numérotables de 1 à l'infini, et qu'elle est bornée si elle admet une borne, c'est-à-dire un point qu'elle ne dépasse pas.

FIG. 64

Comment ce postulat va-t-il intervenir dans notre discussion ? Soulignons tout d'abord l'analogie entre les « segments restants » du procédé de la mesure et les segments A_iL situés entre les points de la suite et le point limite.

Les segments A_iL vont naturellement en décroissant. De plus, ils tendent vers zéro, car s'il existait un segment ε tel que $\varepsilon < A_iL$, pour tout i, nous le reporterions de L en B′, du côté de A, et B′ jouerait alors le rôle du point L′ interdit par la seconde partie du postulat.

Dans les mêmes conditions — c'est-à-dire si le postulat est valable — la réciproque de la propriété précédente est aussi valable : s'il n'existe pas de segment ε tel que $\varepsilon < A_iL$ pour tout i, c'est que L est le point limite des A_i.

Car si le point limite de la suite linéairement ordonnée des A_i dont le postulat exige l'existence était en L′, différent de L, le segment L′L pourrait être pris comme segment ε.

Le rôle du postulat du point limite est ainsi clairement établi : il permet d'affirmer que l'extrémité B du segment mesuré se retrouve, à partir des segments correspondants aux mesures successives, comme point limite des extrémités A_i de ces segments. — Nous dirons, plus brièvement, que les segments AA_i tendent vers AB.

En supposant toujours le postulat du point limite valable, et par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on peut aussi établir les énoncés suivants dont nous aurons à nous servir :

si les segments e_i tendent vers un segment nul, il en est de même des segments $e'_i = 10\ e_i$;

si les segments AA_i tendent vers le segment AL, les segments $AA'_i = 10\ AA_i$ tendent vers le segment AL′ = 10 AL, etc.

d) Suite mesurante maximale. — Notre analyse préliminaire n'est pas encore complètement terminée. Nous n'avons pas démontré que toute suite

$$n,\ n_1,\ n_2,\ n_3,...$$

(satisfaisant naturellement aux conditions $n_i \leq N_i$) peut jouer le rôle de suite mesurante. On doit donc se demander s'il existe toujours un segment admettant la décomposition

$$ne + n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + ...$$

C'est encore le postulat du point limite qui va nous fournir la réponse. Considérons, en faisant abstraction du premier terme, le développement

$$N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3 + ...$$

qu'on peut appeler le « développement maximal » relatif aux e_i dont la première composante est nulle.

Reportons $AA_1 = N_1e_1$, $A_1A_2 = N_2e_2$ et ainsi de suite.

Les points A_i forment une suite linéairement ordonnée, pour laquelle le postulat du point limite ne permet d'admettre que les deux éventualités suivantes (fig. 65) :

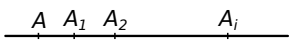


FIG. 65

1° Cette « suite maximale » n'est pas bornée. Dans ce cas, elle ne détermine aucun segment dont elle soit la suite mesurante. Nous indiquerons un choix d'unités pour lequel ce cas se réalise.

2° La suite maximale admet une borne. Il est d'ailleurs suffisant, à cause des inégalités

$$N_ie_i \leq e_{i-1}$$

d'admettre que la suite

$$e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,...,\ \sum_1^n e_i,...$$

est elle-même bornée.

Dans ce cas, le postulat du point limite lui assigne un point M tel que le segment AM admette précisément la suite maximale comme suite mesurante.

Il est alors visible que ce même point M est aussi une borne pour toutes les suites A_i correspondant à des « suites mesurantes » admissibles ($n_i \leq N_i$).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une correspondance parfaite, biunivoque, entre segments et suites mesurantes, est donc que cette correspondance ait lieu une fois, pour la suite maximale.

Notre analyse préliminaire est maintenant terminée. Il ne reste plus qu'à reprendre l'un après l'autre, les points qui ont été laissés en suspens, le postulat d'ARCHIMÈDE, le choix d'une suite de segments tendant vers zéro, le postulat du point limite.

96. DÉMONSTRATION DU POSTULAT D'ARCHIMÈDE. Commençons par le postulat du point limite. Nous trancherons ici la question de la façon la plus radicale, en élevant ce postulat au rang d'axiome. Le reste sera régulièrement déduit.

Axiome IV. — *Une suite de points A_i, dénombrable, linéairement ordonnée et bornée, converge vers un point limite L possédant les deux propriétés caractéristiques suivantes :*

1° dans l'ordre suivant lequel les A_i se suivent, L vient après tout A_i;

2° il n'existe pas d'autre point L′ ayant la propriété 1°, qui vienne avant L.

Une remarque s'impose toutefois concernant la place que cet axiome devrait naturellement occuper au sein de notre système. Tandis que l'axiome du report, et par conséquent aussi l'axiome d'ARCHIMÈDE portent en premier lieu sur la notion de l'égalité des segments, cette notion est absente du postulat du point limite. Ce dernier est, au contraire, un énoncé qui ne concerne que l'ordination des points sur une droite, — non plus, il est vrai, l'ordination d'un nombre fini de points, mais celle des groupes infiniment nombreux. Sa place naturelle est donc immédiatement après II′, 7, comme dernier axiome du groupe II′.

Les raisons qui nous ont fait différer son admission ont été indiquées : à lui seul, cet axiome constitue le groupe IV, le groupe dominant avec le groupe III, spécialement avec l'axiome du report III′, 6, l'idée de *l'ordre continu*.

Cette remarque faite, nous pourrons passer au postulat d'ARCHIMÈDE dont nous répétons l'énoncé, mais cette fois comme théorème à démontrer.

Théorème 44. — *Pour deux segments a et b quelconques, il existe un entier n tel que*

$$nb > a.$$

La démonstration se fait par réduction à une contradiction : admettons, contrairement à ce qu'affirme l'énoncé, qu'en reportant le segment *b* successivement en AA_1, en A_1A_2, en A_2A_3, et ainsi de suite indéfiniment, on n'arrive jamais à dépasser l'extrémité B du segment *a*.

Dans ce cas, les points A, A_1, A_2,... formeraient une suite à laquelle l'axiome du point-limite serait applicable : soit donc L le point vers lequel elle convergerait.

Si à partir de L, nous reportions *b* dans le sens opposé, de L en M, le segment LM contiendrait certainement un A_i, et en même temps aussi tous les suivants, sans quoi M jouerait précisément le rôle, interdit par l'axiome IV, du point L′.

Ainsi donc, le segment LM égal à *b* contiendrait (entre autres) un segment A_iA_{i+1} lui aussi égal à *b*.

Mais ce résultat est en contradiction directe avec un théorème précédemment démontré (théorème 33).

L'hypothèse contraire à l'énoncé du postulat d'ARCHIMÈDE se heurte à une contradiction : le postulat lui-même est ainsi déductivment établi.

97. CONSTRUCTION D'UNE SUITE DE SEGMENTS TENDANT VERS ZÉRO. Passons à la seconde des questions en suspens : comment obtenir systématiquement une suite d'unités e_i des divers ordres ?

Voici un procédé extrêmement simple : partons d'une unité principale e = EF quelconque (fig. 66).

Pour obtenir e_1, partageons e en deux parties, par le point E_1, de façon à ce que

$$EE_1 > E_1F,$$

ce qui est bien facile à réaliser.

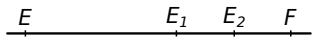


FIG. 66

Posons alors

$$E_1F = e_1$$

Opérons de la même façon sur E_1F, en le partageant en E_2 de façon que

$$E_1E_2 > E_2F$$

et posons

$$E_2F = e_2,$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Cette construction entraîne les inégalités :

$$2\,e_1 < e,$$
$$4\,e_2 < 2\,e_1 < e,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour un *i* quelconque :

$$2^i\,e_i < e$$

Chaque unité est plus grande — plus que deux fois plus grande — que l'unité du rang suivant.

Démontrons qu'elles tendent vers zéro. La réduction à une contradiction est, en ces matières, le procédé normal de démonstration.

Supposons donc, contrairement à ce qu'il faut établir, qu'il existe un segment ε satisfaisant à toutes les inégalités

$$\varepsilon < e_i,$$

donc

$$2^i\,\varepsilon < 2^i\,e_1 < e.$$

Le postulat d'ARCHIMÈDE, appliqué aux deux segments *e* et ε, exige l'existence d'un *n* tel que :

$$n\,\varepsilon > e$$

Mais cet n est certainement inférieur à une certaine puissance de 2, — à 2^a par exemple. Donc

$$2^a \varepsilon > e.$$

Or cette dernière inégalité est en contradiction avec la précédente :

$$2^i \varepsilon < e,$$

valable pour tout i, donc aussi pour $i = a$.

La contradiction est ainsi mise en évidence.

D'autre part, si l'on cherche à réaliser la suite mesurante maximale

$$O, N_1, N_2, ...$$

à partir de E, le point F est une borne pour la suite des extrémités des segments

$$N_1e_1, N_2e_2, N_3e_3, ...$$

reportés successivement.

98. LE CONTINU. Il nous reste à traiter la question de la mesure dans un système de numération déterminé, par exemple dans le système décimal. Pour cela, nous aurons à considérer les sous-multiples d'une unité fixée. Or, rappelons-le, les axiomes de l'égalité ne nous ont pas permis d'assurer l'existence de la $k^{\text{ième}}$ partie d'un segment donné. Nous sommes maintenant, à l'aide du postulat du point limite, en mesure de combler cette lacune.

Soit EF un segment donné. Pour construire le segment $E^*F^* = \frac{1}{k}$ EF, nous choisissons un système d'unités quelconque $e_1, e_2, ... e_n, ...$ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut. On voit immédiatement que le système d'unités $e'_i = ke_i$ satisfait également à ces conditions. Soit alors

$$EF = n_1e'_1 + n_2e'_2 + ...,$$

le développement de EF dans ce dernier système. Le développement

$$E^*F^* = n_1e_1 + n_2e_2 + ...$$

définit aussi un segment. L'égalité $k E^*F^* = EF$ découle immédiatement des résultats énoncés sous 95 *c)*.

Dans le cas où l'on prend pour système d'unités e_1, $e_2 = \frac{1}{10}e_1$, $e_3 = \frac{1}{100}e_1$, ... la suite des nombres n_i du développement

$$EF = n_1e_1 + n_2e_2 + ...$$

fournit un développement décimal illimité : c'est un nombre rationnel ou irrationnel qui est par définition la mesure du segment EF avec e_1 comme unité.

L'ensemble des développements décimaux, c'est-à-dire des nombres rationnels et irrationnels, constitue le continu des nombres. Ce qui précède suffit à faire voir que dès qu'on a choisi une unité de mesure, on établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des points d'une droite et le continu des nombres.

Nous avons affirmé plus haut qu'il pouvait se faire que la suite maximale ne détermine aucun segment. Voici un exemple : on prend pour système d'unités e_1, $e_2 = \frac{1}{2}e_1$, $e_3 = \frac{1}{3}e_1$, ... La suite maximale e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, ... ne détermine aucun segment.

Comme dans le cas des autres groupes d'axiomes, il est possible de fonder la continuité sur des postulats autres que celui du point limite. Par exemple, les deux postulats suivants sont complètement équivalents à celui que nous avons pris pour base :

Postulat de DEDEKIND. — Si un segment OM est divisé par deux classes de points, de telle sorte que si O appartient à la première classe et M à la seconde, chaque point de OM appartienne à une des deux classes et qu'un point quelconque de la première se trouve à l'intérieur du segment formé par O avec chacun des points de la seconde classe, alors il existe un point X tel que tous les points situés à l'intérieur du segment OX appartiennent à la première classe, tandis que tous les points situés à l'intérieur du segment XM appartiennent à la seconde classe.

Postulat de WEIERSTRASS. — Si un segment AB contient une suite illimitée de points successifs M_1, M_2, ..., il existe un point L tel que dans tout voisinage de L se trouve au moins un point de la suite.

Il n'est pas difficile de démontrer ces deux énoncés à partir de l'axiome IV, ou inversement de démontrer celui-ci à partir de l'un ou l'autre de ces énoncés. Nous ne nous arrêterons pas à ces démonstrations.

On peut enfin se servir, avec CANTOR, du postulat d'ARCHIMÈDE joint au suivant :

Postulat des intervalles emboîtés. — Une suite d'intervalles emboîtés les uns dans les autres, et tels qu'il s'en puisse toujours indiquer un, et les suivants, qui soient contenus dans un intervalle arbitrairement choisi, converge vers un point déterminé.

Il est aisé de voir que le postulat des intervalles emboîtés découle de notre axiome IV, et qu'inversement celui-ci découle des deux postulats cités. On se demandera peut-être si le postulat des intervalles emboîtés ne suffit pas à lui

seul, ce qui reviendrait à dire que le postulat d'ARCHIMÈDE en est une conséquence. Il est possible de démontrer que tel n'est pas le cas. Mais cette démonstration est d'un type très différent de celui des démonstrations rencontrées jusqu'ici et le moment n'est pas encore venu de nous en occuper[1].

LE PARALLÉLISME

99. LE POSTULAT D'EUCLIDE. Bien que les axiomes adoptés jusqu'ici permettent déjà de déduire les propriétés fondamentales des déplacements, de l'orthogonalité et des symétries, il manque encore un axiome essentiel à la construction de la géométrie élémentaire : celui des parallèles.

Indiquons tout d'abord comment le célèbre « postulat des parallèles » se présente :

Sur la base des axiomes déjà acceptés on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 45. — *Si une transversale f de deux droites a et b forme avec celles-ci, et d'un même côté, des angles supplémentaires, a et b ne se coupent pas* (fig. 67).

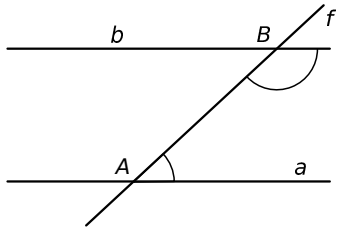


FIG. 67

La démonstration se fait par la réduction à une contradiction.

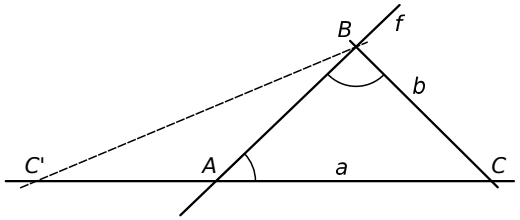


FIG. 68

Supposons, contrairement à ce qu'il faut démontrer, que les droites *a* et *b* se coupent en un point C (fig. 68) : nous allons alors faire voir qu'elles devraient encore se couper en un second point C′. Portons sur *a* AC′ = BC, C et C′ étant de part et d'autre de A, et comparons les triangles BCA et AC′B. On a

$$AC' = BC,\ AB = BA \text{ et } \sphericalangle\, C'AB = \sphericalangle\, CBA.$$

[1] Voir par exemple : F. GONSETH, *Les fondements des mathématiques*. Paris, Blanchard, 1926, p. 37 ss.

Ce sont les conditions du premier cas d'égalité. Ces triangles sont donc égaux (théorème 41). Par conséquent

$$\sphericalangle\, C'BA = \sphericalangle\, BAC.$$

Or, par hypothèse, CAB et ABC sont supplémentaires. Cela veut donc dire que BC′ est sur le prolongement de CB. La chose est naturellement impossible, car les droites *a* et *b* auraient alors deux points communs (C et C′) sans coïncider.

Ce théorème montre que, par tout point B extérieur à une droite *a*, on peut mener au moins une droite *b* qui ne coupe pas *a*. La construction saute aux yeux.

Mais il ne montre pas qu'il n'existe qu'une droite de ce genre. Il ne montre pas, par exemple, que si le point A varie, B restant fixe, la construction mène toujours à la même droite *b*.

EUCLIDE pose précisément comme V^{e} postulat que toute droite *b* faisant avec *f*, et du même côté, deux angles dont la somme est inférieure à 180° coupe nécessairement *a*.

Ce postulat est donc équivalent à la réciproque du théorème précédent, réciproque qui s'énonce de la façon suivante et qu'il faut considérer comme valable sans l'avoir démontrée :

Si deux droites qui ne se coupent pas ont une transversale commune, les angles qu'elles forment avec celle-ci (intérieurement et du même côté) *sont supplémentaires.*

On peut aussi formuler la chose de la façon suivante :

Appelons parallèles deux droites qui ne se coupent pas. Il existe donc au moins une parallèle à toute droite *a*, par tout point B non situé sur *a*. En revanche, nous sommes dans l'obligation d'adopter le postulat suivant (ou tout autre qui lui serait équivalent) :

Axiome V. — *Par tout point B, non situé sur une droite a quelconque, il passe au plus une parallèle à a.*

100. L'INDÉPENDANCE DU POSTULAT DES PARALLÈLES. La base axiomatique de la géométrie élémentaire est maintenant complète. Dès ici, d'ailleurs, notre étude perdrait son aspect axiomatique, pour prendre l'aspect traditionnel d'un Manuel de géométrie.

L'axiome des parallèles une fois introduit, rien n'est plus facile que de déboucher sur la suite des théorèmes classiques, sur les angles alternes-externes, ou correspondants, sur la somme des angles d'un triangle, sur le lieu des points équidistants d'une droite, etc., etc., sur les théorèmes aboutissant au théorème de PYTHAGORE, et à la mesure de la longueur de la circonférence et de l'aire du cercle.

Dès ici, l'édification de la géométrie élémentaire n'apporterait plus rien que des redites, quant au but que nous nous sommes assigné dans ce chapitre. Aussi voulons-nous suspendre ici notre analyse, la question devant être reprise sous un nouvel angle à propos des géométries non euclidiennes, auxquelles nulle allusion n'a encore été faite.

Les deux questions suivantes feront rebondir l'intérêt :

1° Le postulat des parallèles est-il vraiment indispensable ? Ne pourrait-on pas le remplacer par quelque autre énoncé équivalent, qui lui serait peut-être préférable ?

2° Et surtout est-il certain que jamais on ne pourra le remplacer par un énoncé équivalent qui, lui, serait démontrable à partir des axiomes précédemment adoptés ?

Quant à la première question, voici quelques indications qui devront être reprises et complétées plus tard.

Certes ! L'axiome des parallèles peut être remplacé de mille façons par un énoncé équivalent. Plusieurs ont été déjà proposés et essayés. En voici quelques exemples :

Le lieu des points équidistants d'une droite est une droite.

Il existe au moins deux triangles semblables.

Il existe au moins un triangle dont la somme des angles vaut deux droits.

Il ne peut exister trois droites telles que la troisième soit entre les deux premières et les laisse du même côté (voir la remarque relative à la figure 32, p. 167).

De ces exemples, les uns présentent un intérêt historique, d'autres un intérêt géométrique. Mais la seconde question les domine tous ! Si la réponse qu'elle comporte est affirmative, s'il s'avère que tous sont également démontrables, tous se retrouvent égaux devant un choix que telle ou telle circonstance particulière pourra motiver.

Or, cette réponse n'est pas douteuse : elle est affirmative. Faut-il s'en étonner ? « Pourquoi donc, dira-t-on ? » « Pourquoi s'étonnerait-on d'avoir un axiome de plus à adopter : il nous a fallu déjà tant en recevoir ! » — En effet, pourquoi le postulat des parallèles ne serait-il pas un axiome, au même titre que tant d'autres ? Mais là n'est pas la chose importante, ce dont on peut s'étonner c'est qu'on ait inventé une méthode pour démontrer l'indémontrabilité des énoncés en question. C'est là un fait tout nouveau, auquel rien ne nous a jusqu'ici préparés. Ses conséquences seront considérables; elles ouvriront sur le problème qui nous occupe des perspectives, elles aussi, toutes nouvelles.

Mais avant de nous y porter, nous avons à tirer les conclusions de l'expérience que nous venons de faire, car l'axiomatisation de la géométrie élémentaire ne doit avoir que la signification d'une expérience, d'une expérience réussie et apportant son témoignage dans le cadre d'une entreprise qui la dépasse.

Conclusion

101. SIGNIFICATION ET PORTÉE DE L'EXPÉRIENCE AXIOMATIQUE.

Pour l'avoir pratiquée consciencieusement, en allant jusqu'au bout de notre expérience axiomatique, nous savons maintenant comment la pensée rationnelle se saisit de son objet et en organise la connaissance. Avions-nous l'espoir de la voir gagner son autonomie complète, de la voir se fonder dans une vérité en soi, et dans une nécessité absolue, inconditionnelle ? Cet espoir ne s'est pas réalisé. Certes, en s'axiomatisant, la pensée géométrique a affirmé son caractère théorique. La discipline à laquelle elle s'astreint lui assure une indépendance relative envers les sources intuitives et expérimentales de son information. Plus le jeu axiomatique est strict, et plus l'apport de ces sources se trouve surveillé et délimité. Si les axiomes s'éclairaient d'eux-mêmes, par une évidence propre et inaltérable, si la dialectique instituait une nécessité interne et inconditionnelle, l'intention théorique trouverait dans la méthode axiomatique le moyen même de son émancipation totale. L'autonomie du rationnel serait un fait accompli.

Mais la convenance des axiomes reste suspendue à notre vision intuitive de l'espace, que l'expérience quotidienne renouvelle; mais la dialectique est toute mélangée (dans une mesure que nous n'avons pas même su complètement apprécier) d'éléments intuitifs relatifs à l'espace, au temps, au nombre, à l'objet, etc. En un mot, par la pratique axiomatique, la pensée rationnelle se spécifie : elle s'épure, elle se réalise mieux dans le sens d'une autonomie voulue et recherchée; mais l'idéal d'une autonomie parfaite, achevée, reste hors d'atteinte[1] !

Pour tout résumer en un mot :

En axiomatisant la géométrie, nous n'avons fait qu'une expérience de spécification; par le fait, sur le vif, nous avons exposé comment l'un des aspects de la pensée géométrique peut être conçu de façon plus nette, plus incisive; mais il nous a fallu, pour en arriver là, une technique idoine de spécification, dans le cas particulier la méthode axiomatique.

Faite dans le secteur géométrique, cette expérience a une portée générale, ses conséquences s'étendent à la théorie de la connaissance, à la méthode de la connaissance tout entière.

Mais la marche à la spécification a son revers. Regardons, par exemple, l'idée de la mesure dans le continu, à laquelle nous avons été conduits. Du point de vue théorique, c'est une pure merveille. Mais convient-elle également

[1] L'histoire du Ve postulat, qui est aussi l'histoire de la crise de l'évidence géométrique, mettra un autre aspect de la même question dans une vive lumière.

à la description des « réalités physiques » qu'on se proposerait de mesurer ? Chacun sait qu'il n'en est rien. Dans la mesure même où notre analyse s'achève dans sa perspective théorique, la réalité du monde atomique lui devient étrangère.

Un antagonisme surgit ainsi entre deux moments essentiels du progrès de la connaissance : celui de la spécification et celui de la fermeture de la synthèse dialectique qui s'était réalisée à la fin du chapitre précédent, au niveau de l'information naturelle. N'est-ce là qu'un léger accident ?

Au contraire. Pour retrouver les conditions d'une synthèse dialectique renouvelée, pour que l'idée dominante d'une nouvelle dialectisation s'impose presque d'elle-même il faut, — nous le disions déjà dans l'Introduction de cet ouvrage, — il faut appeler à l'existence et faire intervenir une série de notions telles que celles de schéma, de modèle, d'horizon de réalité. Ce sont les instruments d'un nouveau stade de la connaissance... Le chapitre IV leur sera consacré.

CHAPITRE IV

LA SYNTHÈSE DIALECTIQUE DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE*

Introduction

102. REPRISE DU PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE.

Au second chapitre, les trois aspects de la géométrie se sont noués en une première synthèse dialectique sous une première idée dominante : celle de leur équivalence de vérité. Ainsi noués au niveau de la connaissance naturelle et d'une connaissance « instrumentée » qui en est le prolongement homogène, ils se sont ensuite à nouveau dénoués, sous le choc d'une expérience qui dépasse nettement notre information naturelle : la première synthèse des trois aspects que la géométrie élémentaire réalise, n'est pas conforme à la structure atomique du monde du physicien.

La géométrie élémentaire doit-elle, de ce fait, passer au rang de fausse science ? Personne ne l'admettra : elle reste pour nous le modèle d'une science bien faite. Mais il nous faut bien avouer qu'un problème nouveau s'est posé, qu'il s'est même imposé.

À quoi servirait-il de feindre d'ignorer que les vues atomiques ont rudement touché notre vision naturelle des choses et que nous ne savons plus guère comment réaliser l'intention fondamentale de la géométrie, qui est et qui doit rester de faire la synthèse de ces trois aspects. Certes, l'idée dominante qui préside à la synthèse élémentaire n'est pas complètement ébranlée, mais elle a perdu sa validité absolue, inconditionnelle. Jusqu'à quel point reste-t-elle valable ? Pouvons-nous en décider, pouvons-nous le comprendre avant d'avoir opéré une nouvelle synthèse, sous une nouvelle idée dominante, qui fasse une place tout à fait légitime à une validité ainsi affaiblie ?

Imaginer ou découvrir le principe d'une synthèse renouvelée, voilà le problème que nous ne saurions écarter, si nous songeons sérieusement à maintenir la géométrie dans la qualité de science-modèle.

* Pour la mise au point des chapitres III et IV, nous avons bénéficié d'appuis et de conseils très précieux. Nous tenons à remercier ici tout spécialement MM. A. PREISSMANN, actuellement adjoint mathématique à l'Institut d'hydraulique de l'E.P.F. et P. GAUCHAT, professeur de mathématiques à Neuchâtel.

Nous n'y parviendrons pas sans un nouvel effort d'analyse, disions-nous. Il nous faudra mieux délimiter encore, mieux spécifier la signification des trois mots-clefs : expérimental, intuitif et rationnel. Il nous faudra examiner de plus près le rôle qu'ils jouent et comment il leur est conféré. C'est précisément à soumettre l'aspect rationnel ou déductif à cet examen critique que le chapitre III, sur *l'édification axiomatique*, s'est appliqué. Rappelons-en sommairement les résultats :

Pour mériter mieux le nom de géométrie rationnelle, la géométrie doit s'édifier axiomatiquement. Le qualificatif « rationnel » prend alors, pour la géométrie, son sens le plus aigu, sa signification la plus claire. Il atteint sa spécificité la plus dense.

La géométrie adopte alors la forme d'un système déductif dans lequel deux catégories d'éléments peuvent et doivent être admis sans définition ni démonstration :

les notions primitives et les axiomes, d'une part,

les nécessités et les évidences de la dialectique déductive, d'autre part.

Pour saisir vraiment comment une axiomatisation se fait, il ne suffit pas de la regarder « du dehors ». La dialectique de la déduction n'est pas explicitée d'avance. Est-elle explicitable ? Au point où nous en sommes, cette question dépasse tous les moyens à notre disposition. Aussi ne saurait-on comprendre sans une certaine pratique, sans une certaine initiation à une technique intellectuelle d'un genre tout spécial, comment la dialectique procède pour éviter tout appel aux « évidences interdites ».

Cette construction axiomatique vient de nous occuper assez longuement. Elle nous aurait pris encore plus de temps si nous ne nous étions pas contentés d'une esquisse sur bien des points. Elle a cependant mis suffisamment en lumière les circonstances qui confèrent à la géométrie rationnelle son autonomie relative vis-à-vis des autres formes de la connaissance géométrique. En voici, encore une fois, les traits principaux :

a) Les notions primitives et les axiomes une fois admis, il devient superflu, et par conséquent contraire à la méthode, de faire appel à l'intuition, à l'évidence géométrique aussi bien qu'à toute espèce de vérification.

b) Les évidences qui jouent encore un rôle, au cours de la déduction, sont uniquement des évidences de la dialectique. Ce sont des évidences arithmétiques, telles que 2 + 3 = 5, des évidences logiques relatives à des groupes d'objets, à des suites de nombres, à des classes d'éléments, etc. On pourrait les appeler des évidences élémentaires.

L'autonomie du rationnel ainsi constituée n'a rien d'absolu, puisqu'elle n'existe que du moment où les notions primitives ont été imaginées et les axiomes formulés, et où l'on a appris à manier valablement et adéquatement la

dialectique de la déduction. Notre étude n'en justifie pas moins l'importante constatation que voici :

L'idée d'une construction rationnelle autonome de la géométrie trouve sa réalisation spécifique (la réalisation qui permet seule de la considérer comme existante et qui fixe les caractères de cette existence) dans la méthode axiomatique.

Cette constatation règle un point de méthode d'importance capitale, mais elle n'apporte pas le dernier mot sur la question de l'espace. La construction du rationnel géométrique telle qu'elle vient d'être présentée n'est pas une réduction du géométrique au rationnel. Tout recours à l'intuition est, il est vrai, mis à l'interdit dans le déroulement de la déduction, mais l'interdit ne s'étend ni à la base axiomatique ni à la dialectique. Il est vrai que les résultats de la déduction sont à tenir pour valables indépendamment de toute réalisation matérielle, mais il est également vrai que le sens du mot « géométrie » se perdrait en l'absence de toute confrontation expérimentale.

Ainsi, l'autonomie du rationnel n'est pas totale. Elle va moins profond et moins loin qu'on a tendance à l'imaginer. La technique axiomatique ne dissocie pas entièrement les composantes de la connaissance géométrique. Il y a certains points où celles-ci ne se dénouent pas. L'axiomatisation limite les domaines d'influence, circonscrit les régions d'interaction et d'interdépendance. Elle n'élimine pas la question des rapports à concevoir entre les diverses composantes de la connaissance spatiale, elle l'écarte pendant l'exercice de la déduction. Mais, si la question se trouve ainsi repoussée jusqu'au seuil de l'axiomatisation, elle n'en reste pas moins posée. Le lieu où elle se pose ne s'en trouve que plus exactement désigné. Nous la retrouvons entière à l'origine et à l'issue du processus axiomatique. À l'origine, au moment où, sans définition ni démonstration, nous recueillons, nous choisissons et nous acceptons les éléments faute desquels l'appareil axiomatique resterait sans contenu. À l'issue, au moment où il se vérifie (où nous vérifions !) qu'en prenant le chemin du rationnel, nous ne tournons pas le dos aux fins naturelles de toute géométrie qui sont, ainsi qu'il est dit au début de certain manuel de Géométrie élémentaire[1], « d'étendre et de préciser la connaissance que tout homme possède de l'espace en général et plus spécialement de la forme et de la grandeur des corps, de leurs positions et de leurs déplacements ».

C'est la question qui attend tout naturellement celui qui, s'étant soumis à la discipline de l'axiomatisation et s'en étant assimilé la méthode, prend quelque recul et se met à réfléchir sur la portée de l'expérience intellectuelle qu'il vient de faire.

[1] F. GONSETH et S. GAGNEBIN, *Éléments de Géométrie : I. Géométrie plane.* Payot, Lausanne, 1942.

103. NÉCESSITÉ ET FAIBLESSE DE L'AXIOMATISATION. Envisageons, par exemple, la base d'un système axiomatique : les notions primitives qu'elle comprend sont-elles de bon aloi et les axiomes qu'elle contient sont-ils de bonne facture ? La méthode nous enjoint de les poser valables et justes sans définition ni démonstration : n'est-ce pas là une injonction arbitraire ? Si elle ne l'est pas, comment la justifier ?

Nous le savons : un énoncé (un énoncé justifié bien entendu) ne porte pas en soi sa qualité d'axiome ou de théorème, comme un caractère propre, qui lui reviendrait d'avance et lui resterait pour toute éternité. Pour une part, nous en avons fait l'expérience, la base axiomatique dépend de notre décision. Suffit-il que nous les ayons choisis pour que la vérité vienne habiter les énoncés que nous posons en axiomes ? Sinon, d'où leur validité leur vient-elle ?

Il est une réponse que nous ne saurions accepter : celle qui consisterait en la nécessité méthodologique d'une base de départ. À qui dirait : on n'édifie rien de stable sans fondement, il nous faudrait répondre qu'un fondement choisi au hasard, établi sans discernement, n'est pas nécessairement un fondement qui convienne, qui possède automatiquement et dans tous les cas les qualités requises de stabilité. Il ne suffit pas d'avoir reconnu qu'un édifice exige un fondement pour être dispensé du souci de bien le fonder.

Et de même, il ne suffit pas d'avoir compris qu'il faille une base axiomatique pour que la construction axiomatique puisse commencer. Cette raison-là ne justifie pas le choix de tel ou tel axiome, de tel ou tel groupe d'axiomes. Elle ne tient pas compte de l'aménagement général du dispositif axiomatique.

La validité d'une base axiomatique a ses raisons dont on n'a rien su dire lorsqu'on s'est contenté de répéter que, de toute évidence, une base axiomatique est nécessaire.

Jusqu'ici nous avons traité la géométrie axiomatiquement dans un sentiment de complète sécurité. Ce sentiment peut-il être trompeur ? S'il peut l'être, encore une fois, quelles en sont les raisons ?

À tous les détours, sous les aspects les plus divers, toujours la même question ressurgit, l'incommode question à laquelle on tentait d'échapper par le recours à un rationnel automatique. Pour avoir été différée, elle ne s'est pas affaiblie, elle ne s'est pas émoussée : elle est restée entière.

Mais, bien entendu, elle ne se pose qu'à ceux qui veulent bien la recevoir. On peut aussi, si on veut, prendre une tout autre attitude. On peut réduire la signification de l'axiomatisation à celle d'une pure et simple expérience réussie. Rien n'oblige celui qui s'y refuse à s'occuper des raisons de cette réussite. On ne peut lui contester la possibilité, la liberté de ne porter aucun intérêt aux fondements et à la méthode de la connaissance exacte. Cette attitude est-elle fautive ? Ne pourrait-on faire voir qu'elle est en désaccord avec une expérience qui la dépasse ? Celui qui accepte le résultat d'une expérience réussie ne le fait

certainement pas pour l'agrément de recueillir ce seul témoignage. Il le fait dans une certaine intention qui ne s'arrête pas à cette expérience-là, isolée de toute autre préoccupation. Ne pourrait-il arriver que cette intention se mette en contradiction avec elle-même en s'arrêtant et en se limitant étroitement ? Une autre expérience, dépassant et englobant la précédente, ne pourrait-elle démontrer, en réussissant à son tour, qu'une intention se dément parfois elle-même en prétendant ainsi s'assurer ?

Pour nous, l'axiomatisation de la géométrie ne forme qu'un moment de notre entreprise. Et nous ne faisons que reprendre nos intentions du début en rendant leur libre cours aux questions que l'axiomatisation a suspendues, mais auxquelles elle n'a pu donner de réponse définitive. Comment se fait-il que les notions primitives conviennent au rôle que nous leur attribuons, bien qu'aucune d'elles ne nous soit offerte « telle quelle » par la réalité physique — aussi peu celle de l'égalité, par exemple, que celle de point ou de droite ?

De quel droit pose-t-on qu'un axiome est valable, bien que la réalité ne nous présente aucun modèle concret où il soit parfaitement réalisé ?

La situation dans laquelle nous nous trouvons, la situation que nous avons nous-mêmes créée, n'a rien d'enviable. Nous avons sapé les points d'appui qui nous étaient « naturellement » offerts. Par notre analyse, nous nous sommes enlevés à nous-mêmes aussi bien les moyens techniques de la réalisation concrète par des modèles matériels adéquats que les moyens abstraits et purement rationnels de la définition exacte et de la déduction.

Tous les moyens de répondre aux questions capitales que nous venons de retrouver se dérobent. Nous avons perdu, semble-t-il, jusqu'à la trace de toute possibilité d'explication et de justification. Saurons-nous la retrouver ?

Notre but est bien désigné : refaire la synthèse des trois aspects de la connaissance spatiale au niveau même de l'expérience qui fait tomber la synthèse élémentaire au rang d'une simple solution d'approche. Mais les moyens à mettre en œuvre dans ce but — nous nous en apercevons maintenant — ne nous sont pas donnés naturellement. Ils sont encore à mettre au point et à mettre en place.

Pour retrouver la trace dont nous parlions il y a un instant, nous allons à nouveau rassembler tous les éléments de la connaissance spatiale qui sont en notre possession. Mais pour que la discussion puisse franchir le seuil sur lequel nous sommes maintenant arrêtés, nous aurons besoin d'un certain nombre d'idées nouvelles, besoin aussi d'apprendre à les insérer dans nos façons de parler.

Ces idées et ces façons de dire (cette dialectique) formeront les éléments d'une nouvelle méthode de la connaissance géométrique (et, à travers celle-ci, de la connaissance scientifique).

Elles vont être maintenant proposées (du moins en partie) à l'aide d'une

analogie et par l'intermédiaire d'une nouvelle fable, la « fable de la boule dans la forêt ».

Le schéma

104. LA FABLE DE LA BOULE DANS LA FORÊT. Transportons-nous, en imagination, dans une clairière, au milieu d'une forêt irrégulièrement plantée d'arbres nombreux et plus ou moins serrés. Une grande boule s'y trouve et l'on nous a donné la tâche — admettons-le — de la rouler jusqu'à la lisière. Comment allons-nous nous y prendre ?

Nous n'avons pas cédé (pourquoi ne pas l'admettre aussi ?) à notre premier mouvement qui eût été de pousser la boule devant nous, sans délai, au premier jugé. Nous nous sommes au contraire décidés à préparer systématiquement la solution, en établissant une carte, d'ailleurs assez grossière, de la région.

Sur une feuille à dessin, un premier point B représentera la boule. Trois arbres seront ensuite choisis, au bord de la clairière, formant (très grossièrement !) un triangle libre d'arbres, mais à l'intérieur duquel la boule est placée. Les ayant numérotés de 1 à 3, nous porterons sur notre carte en élaboration trois points numérotés de façon correspondante et formant un triangle contenant le point B. Au voisinage du « segment de droite » limité par les arbres 1 et 3, choisissons un arbre n° 4, tel que le triangle 1, 3, 4 n'ait, lui non plus, aucun arbre à son intérieur. Opérons de la même façon à partir des segments 2, 3 et 2, 1 et ainsi de suite. De proche en proche, nous finirons par trianguler ainsi la forêt tout entière.

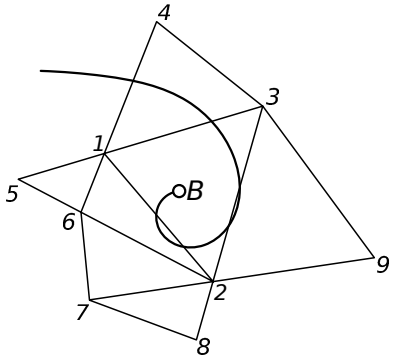


FIG. 69

La carte ainsi dressée n'est cependant pas encore prête à nous servir. Pour tout arbre X, nous déterminerons les arbres Y^1, Y^2, Y^3,... dont la distance à X est inférieure au diamètre de la boule. Sur la carte, nous joindrons le point qui correspond à l'arbre X par un trait rouge à tout point représentant un des Y. Ces traits, est-il nécessaire de le dire, signifieront que la boule ne peut pas franchir l'espace correspondant.

Cela fait, nous quitterons la forêt en emportant notre carte et nous entrerons à l'auberge voisine.

Il est clair que tout est maintenant préparé pour passer à la solution « théorique » de notre problème. La carte, étendue sur la table de l'auberge, va nous en fournir tous les éléments.

Nous couperons, par exemple, notre feuille à dessin le long de toutes les lignes rouges. Si nous en détachons ainsi un fragment contenant le point B mais ne comprenant aucun segment de la lisière, nous saurons que le problème est insoluble. Au cas contraire, ce ne sera qu'un jeu de patience de tracer au crayon une ligne partant de B et sortant de la figure triangulée sans avoir à traverser aucun trait rouge. Une telle ligne est l'image d'un chemin possible : elle fournit la solution (une solution) théorique du problème.

Pour en tirer la solution effective, il nous faudra naturellement reprendre le chemin de la forêt. Grâce à la numérotation correspondante des arbres et des points de la carte, il sera (en principe) facile de traduire la solution « théorique » en un déplacement réel de la boule qui l'amène comme nous avions à le faire, de la clairière à la lisière.

La fable est terminée[1], il reste à en tirer la moralité. Pour pouvoir le faire, il nous faut examiner quelle est la nature du rapport qui existe entre la carte et la forêt.

Une première constatation s'impose; elle est assez paradoxale et mérite qu'on y réfléchisse sérieusement : c'est que la carte est loin d'être une image fidèle de la forêt, et que pourtant elle nous rend avec une pleine efficacité les services que nous en attendons.

Il y a, de la carte à la forêt, des différences énormes. Tout arbre, par exemple, est représenté par un point, que ce soit un hêtre ou un sapin, un frêle bouleau ou un chêne noueux. La représentation cartographique ne conserve rien de la réalité sylvestre, si ce n'est une certaine structure d'ordination.

Voici, pour prendre un autre exemple, une ligne continue formée de traits rouges tracés bout à bout sur la carte. Quel effort d'imagination ne faut-il pas pour retrouver la réalité qui lui a donné naissance : un rideau d'arbres plus ou moins espacés, assez serrés tout de même pour tracer une barrière que la boule ne pourra pas franchir, etc.

À qui viendrait-il à l'esprit de prétendre qu'une représentation de ce genre fournit une image exacte et fidèle ? Et pourtant elle révèle à qui sait l'interpréter une analogie frappante entre la réalité de la forêt et son image. Certes, la correspondance qui les unit fait étrangement abstraction des apparences; elle supprime des différences qu'on aurait pu croire essentielles, elle simplifie à outrance, et pourtant elle réussit à ne rien oublier de ce qui a une signification pour notre problème.

C'est d'ailleurs en cela que sa valeur consiste.

[1] La fable de la boule a paru pour la première fois, en version plus simple, dans le degré supérieur de : GONSETH et MARTI, *Planimétrie.* Zurich, Orell-Füssli.

Une correspondance de ce genre est dite « symbolique ». Les « objets naturels » y sont représentés, presque sans égard à leur forme ou à leur constitution, par des signes choisis plus ou moins librement (ou par d'autres objets), leurs *symboles*. Dans notre carte, les arbres ont des points pour symboles. Le symbole de la boule est un point spécialement désigné. Celui du chemin réel que la boule pourra prendre est un trait au crayon.

L'ensemble de la carte, enfin, est ce qu'on appelle un *schéma*.

Tout à l'heure, nous insistions à plaisir sur les différences frappantes qui peuvent exister entre un schéma et la « réalité-qu'il-schématise ». Mais pour en donner une juste idée, il faut insister aussi sur l'aspect complémentaire où, par delà leurs différences, c'est leur analogie qui nous apparaît. Leur concordante peut porter si loin que certains raisonnements faits sur le schéma se traduisent immédiatement en résultats valables pour la chose schématisée. C'est ainsi que le tracé d'une solution théorique sur notre carte équivaut, en fin de compte, à la découverte d'un « vrai » cheminement de la boule.

L'idée de schéma et les idées apparentées de correspondance schématique, d'image schématisée, d'abstraction schématisante, etc. vont jouer un rôle décisif à cette étape de notre étude. Aussi voulons-nous reprendre l'une après l'autre les propriétés caractéristiques du schéma, pour lesquelles l'exemple de la carte fournit, pour l'instant, une illustration suffisante.

105. LA CORRESPONDANCE SCHÉMATIQUE. *a)* Certains signes ou symboles du schéma correspondent à certains objets extérieurs au schéma, objets que le schéma a précisément pour mission de représenter. Dans certains cas, ces symboles sont eux-mêmes des objets concrets, plus simplement ou plus facilement maniables que les objets « extérieurs ».

Nous appellerons *signification extérieure* du schéma la réalité qu'il a pour fonction de saisir, en la schématisant.

b) Certaines relations qui existent par avance entre les symboles ou qu'on y porte plus ou moins conventionnellement répondent à certaines relations à désigner, à distinguer, ou à imaginer, entre les objets extérieurs.

Ainsi la relation « d'être reliés par un trait rouge », valable pour certaines paires de points de notre carte, a pour signification extérieure la relation « d'être éloignés de moins qu'un diamètre de la boule » valable pour certaines paires d'arbres de la forêt.

c) Certaines opérations (raisonnements ou manipulations) exécutables sur le schéma en tenant compte uniquement de sa nature propre ou des propriétés qu'on lui a conventionnellement conférées (et par conséquent sans avoir à se référer aux significations extérieures) sont en correspondance directe avec certaines opérations exécutables dans la réalité visée par la schématisation, de façon que les unes puissent être prises pour les autres, comme le symbole peut être pris pour le symbolisé.

Les trois points *a)*, *b)* et *c)* sont relatifs au côté positif, au côté efficace de la concordance schématique. Le troisième est d'une importance toute spéciale. Il peut même arriver que la concordance dont il y est question porte beaucoup plus loin qu'on ne l'avait tout d'abord prévu.

Il faut cependant se garder de n'apercevoir le schéma que sous cet angle favorable. Rien ne nous assure que toute opération, tout raisonnement, toute connaissance dont le schéma peut être l'objet doive inévitablement trouver une interprétation valable, doive posséder une signification extérieure. Un raisonnement fait sur le schéma n'engage le schématisé que si chacune des démarches qu'il comporte peut être adéquatement transposée.

Supposons, par exemple, qu'un trait XY de notre carte soit visiblement plus court qu'un trait rouge X′Y′. Ce fait ne permet pas de conclure que le premier des deux traits est rouge aussi, car il n'est pas du tout certain qu'en confectionnant notre carte nous ayons respecté les rapports des distances des arbres entre eux. Le procédé indiqué dans la fable ne l'exige pas.

En revanche, le raisonnement que voici est légitime : si T est situé à l'intérieur d'un triangle XYY′, dont les deux côtés XY et XY′ sont des segments rouges, le segment XT est rouge lui aussi.

En résumé, et en principe, la portée d'un raisonnement ou d'une manipulation auxquels le schéma se prête n'est pas illimitée. Il ne faut pas espérer que le schéma puisse rester valable pour tout nouvel usage qu'on en voudrait faire. Il peut arriver qu'il reste valable dans telles ou telles circonstances qui n'avaient pas été prévues au moment où il fut établi, mais l'éventualité contraire est elle aussi possible.

d) Un quatrième caractère du schéma est d'être, en principe, révisable.

Une fois la carte terminée, tout retour à la forêt est superflu, si ce n'est pour passer à la réalisation de la solution. Il serait tout particulièrement ridicule de revenir à la boule pour la pousser en tous sens à travers les arbres, en se fiant à un heureux hasard. Une telle conduite reviendrait à changer d'intention sans motif et annulerait tous les résultats acquis jusque-là. Cette conduite incohérente prendra tout à l'heure figure d'erreur de méthode.

Mais si nos intentions variaient, si la carte devait, après coup, servir encore à d'autres fins, si elle devait nous permettre d'accomplir encore d'autres tâches, un retour à la forêt pourrait devenir légitime et même nécessaire. Il se pourrait que pour ces nouvelles tâches, notre carte fût encore incomplète. Peut-être n'y avons-nous pas encore porté, à l'aide des symboles convenables, certaines indications indispensables. Si la forêt contenait des érables à sucre, par exemple, et que nous eussions à en tenir compte, nous ne pourrions nous dispenser d'aller

les reconnaître pour affecter les points qui leur correspondent d'un signe adéquat. Notre schéma se trouverait alors révisé et complété.

Ce dernier exemple est cependant un peu trop simple. Cette trop grande simplicité est de nature à nous suggérer une conception erronée, une conception assez naïvement réaliste, des rapports du schéma à sa signification extérieure, conception dont il nous faudra nous garder. Aussi va-t-il falloir pousser notre analyse encore d'un bon pas plus loin.

106. La signification extérieure du schéma. L'horizon de connaissance.

Il nous faut donc réfléchir encore une fois à la façon dont le schéma s'insère dans sa signification extérieure.

Faut-il supposer que, pour établir un schéma, il faille connaître d'avance à fond les choses dont il fournira la représentation ? Le schéma simplifie, disions-nous. Faut-il penser que cette simplification ne consiste qu'à choisir certains traits pour les retenir ou d'autres traits pour les supprimer, dans une réalité toute donnée, dont il ne tiendrait qu'à nous de distinguer tous les détails ? Voulons-nous dire que la connaissance inscrite dans le schéma n'est que fragmentaire et tronquée ? Les explications qui précèdent n'excluent pas encore une pareille interprétation. Mais celle-ci nous engagerait précisément sur la fausse voie.

Reprenons notre exemple :

Il est clair, nous l'avons déjà dit, que ce qui est inscrit dans la carte relativement à sa signification extérieure ne représente qu'une connaissance très sommaire. Bien entendu, c'est volontairement et en pleine connaissance de cause (et non par ignorance) que nous avons omis certains détails et fait abstraction de certaines différences — que, par exemple, nous n'avons pas fait la moindre mention de l'existence de quelques sapins-candélabres d'une surprenante beauté. La confection de notre carte s'accommode d'une certaine négligence; elle n'exige pas qu'on prenne garde à une multitude de circonstances accessoires ou secondaires.

Mais il est d'autres oublis, et ceci est le point sur lequel nous insistons maintenant, qui relèvent de notre pure et simple ignorance. Celle-ci est responsable, pour une bonne part, de nos omissions les plus opportunes. Ce point mérite d'être expliqué.

Voici un arbre : d'un certain point de vue, en ne faisant jouer que des apparences en somme assez grossièrement définies, nous pouvons affirmer sans crainte de nous tromper que voilà un arbre, nous savons « ce que c'est qu'un arbre ». Mais d'un autre point de vue, d'un point de vue plus exigeant, il est tout aussi vrai que nous sommes infiniment loin « de savoir vraiment ce que c'est qu'un arbre ». La connaissance sur laquelle se fonde la première de ces

deux affirmations à la fois analogues et contradictoires, est faite avant tout d'éléments rudimentaires et superficiels. Des abîmes d'ignorance s'étendent encore entre elle et la connaissance approfondie de tous les mystères physiques, chimiques, biologiques et autres dont un arbre est fait.

En un mot, l'affirmation « je sais ce que c'est qu'un arbre » est l'expression, n'est que l'expression d'une connaissance pratiquement sûre et principiellement inexacte.

Cette constatation dérange peut-être en nous quelques idées préconçues. Peut-être la trouvons-nous inquiétante et paradoxale. Mais à quoi servirait-il de l'écarter ? Le mieux est, au contraire, d'en prendre note, comme d'un renseignement d'une importance assez capitale. Si l'on y réfléchit quelque peu, on s'aperçoit qu'il en est de même pour de larges secteurs de notre information et l'on en vient à se demander si l'on n'a pas mis là le doigt sur un caractère inévitable de toute connaissance humaine.

Nous nous garderons de nous laisser entraîner prématurément à des conclusions d'ordre général. Ce qui vient d'être dit exige cependant que nous révisions sans tarder le qualificatif « paradoxal » dont nous venons de nous servir. Il n'est paradoxal qu'à toute première vue, il est au contraire normal qu'une connaissance soit à la fois sûre en pratique et inexacte en principe, qu'elle soit à la fois efficace et inachevée. C'est un fait qui ne doit ni nous déconcerter ni nous arrêter. Nous n'avons pas à nous étonner que la connaissance usuelle ne soit pas frappée d'impuissance en face de ce que nous venons d'appeler une connaissance approfondie. Dans son cadre, la connaissance usuelle ne se trouve pas dévalorisée par la confrontation avec une connaissance qui la dépasse, même de façon transcendante. Son efficacité n'est pas compromise par la révélation de la marge d'erreur qui l'entoure, car cette efficacité ne se fonde pas sur une inexistante faculté de nos sens de ne pas être soumis à l'erreur, — ou de notre esprit de ne pas être sujet à la faute. En saisissant combien notre connaissance est sommaire et inachevée, nous ne nous créons aucune obligation de la rejeter comme inadéquate, nous apprenons simplement à mieux évaluer l'efficacité de notre connaissance.

Un homme en saurait-il mille fois plus que nous sur les mystères de l'arbre, qu'il n'établirait pas une carte bien différente de la nôtre si nos intentions étaient aussi les siennes. Il l'établirait au niveau de la connaissance usuelle. Car c'est à ce niveau qu'elle prend sa valeur et sa signification. Pour ce que nous voulons en faire, il est indifférent que notre connaissance s'arrête là ou qu'elle puisse être poussée plus loin.

Et d'ailleurs rien ne nous assure qu'une connaissance approfondie ne soit pas un jour à son tour dépassée et déclassée au profit d'une connaissance encore plus approfondie.

En résumé, le résultat de la discussion précédente peut être formulé comme suit :

Si les intentions auxquelles un schéma répond restent inchangées, et s'il s'est avéré adéquat, il conserve son efficacité indépendamment des progrès ultérieurs de la connaissance. La connaissance qui s'y incorpore est à la fois fragmentaire, stable et suffisante.

Ainsi, il n'est pas du tout nécessaire que la signification extérieure soit une réalité donnée d'avance « telle qu'elle est », dans ses caractères essentiels et définitifs. (Rien, d'ailleurs, n'autorise à penser qu'une réalité soit jamais donnée de cette façon-là.)

Et pourtant il nous faut accepter comme authentique la façon dont elle nous est proposée, par l'intermédiaire d'une représentation encore engagée dans la gangue d'une certaine indétermination.

Nous venons d'employer le qualificatif « authentique », à propos de la connaissance schématique; nous l'avons fait très intentionnellement. Nous voulons encore en préciser la portée.

Jusqu'à un certain point, un schéma est assimilable à un portrait. On ne s'étonnera pas d'entendre dire de certains peintres qu'il font de l'authentique, bien que recréant une réalité conforme à leur « manière ». Cette comparaison fait incliner déjà la signification du mot « authentique » dans le sens que nous entendons. Elle ne va cependant pas encore assez loin. Qui dit portrait dit aussi modèle. Antérieurement à la réalité qu'il a su authentiquement rendre dans son tableau, le peintre a rencontré la réalité de son modèle; celle-ci est primaire par rapport à la réalité inscrite dans le portrait. Modèle et portrait sont ici dans un rapport qui rappelle celui (que nous disions trop simple) d'une réalité prédonnée et de son schéma. Pour nous rapprocher de la situation que nous avons en vue; il faudrait imaginer que le portrait est le moyen même de la connaissance de la personne, que c'est par le portrait que la réalité de celle-ci nous est donnée, que c'est par l'exécution du portrait que cette réalité se constitue pour nous, qu'il n'y a pas, en un mot, de réalité qui nous soit donnée antérieurement au portrait, ou tout au plus de façon plus vague et plus indéterminée.

C'est dans cette situation que le schéma revêt son rôle le plus significatif : il n'est alors ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure; il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. La constitution du schéma est le moyen par lequel la réalité qu'il saisit prend pour nous sa structure. Schéma et signification extérieure ne sont alors séparables que par le jeu de deux intentions opposées : celle de nous affirmer en face des choses et celle d'affirmer les choses en face de nous.

(C'est aussi dans cette acception que l'idée de schéma prendra pour nous toute son importance, lorsque nous nous en servirons pour rapprocher à nouveau les trois aspects de la géométrie.)

Dans le rôle que nous venons d'exposer, le schéma fixe et explicite ce qu'on pourrait appeler un état, un palier ou un niveau de la connaissance de sa

signification extérieure. La convenance du schéma est alors le seul gage qu'on possède de l'authenticité de la connaissance qu'il exprime.

En résumé, il n'y a, tout d'abord, aucune contradiction à dire que la connaissance de telle ou telle réalité peut être à là fois primitive et provisoire : provisoire parce qu'elle sera peut-être révisée, et primitive parce qu'elle ne l'a pas encore été. Il n'y en a pas non plus à ajouter qu'elle peut être à la fois sommaire et suffisante : sommaire parce qu'elle n'épuise pas son objet et suffisante parce qu'elle convient, telle qu'elle est, aux fins qu'on s'est fixées.

La rencontre de ces quatre qualificatifs : provisoire et pourtant primitif, sommaire et pourtant suffisant, appliquée à un certain niveau de connaissance ne devrait rien avoir de surprenant, car elle ne fait que décrire la façon dont un schéma s'insère, en général, dans sa signification extérieure. L'exemple de la carte suffit d'ailleurs pour le faire comprendre. Il y a là un simple fait à constater, un fait bien visible, qui ne saurait être contesté ! Pourquoi éprouvons-nous cependant un instant de surprise en les voyant s'appliquer les quatre à la fois ? C'est que la connaissance usuelle est de prime abord engagée dans un préjugé réaliste dont on n'imagine pas que la limite soit si facile à franchir.

La réflexion sur la fonction du schéma ne fait que confirmer cette dernière observation : le rapport d'un schéma à sa signification extérieure doit souvent être pensé tout autrement que le rapport d'une image simplificatrice à un modèle préexistant.

Le moment est venu d'introduire quelques locutions nouvelles :

Par la discussion précédente, par l'emploi des expressions « état, niveau et palier », de la connaissance, et par la rencontre des quatre qualificatifs dont il vient d'être question, nous avons préparé, suggéré et plus ou moins délimité une nouvelle notion, celle d'*horizon de connaissance*.

Pour décrire la façon dont est donnée la signification extérieure d'un schéma, nous pourrons dire maintenant que celle-ci doit être conçue non comme une réalité en soi, mais comme un horizon de réalité, que la connaissance que nous en possédons n'est pas une saisie définitive, mais un horizon de connaissance.

Avons-nous ainsi caractérisé le rapport de la carte à la forêt et plus généralement d'un schéma à sa signification extérieure ? Pas encore entièrement. Reprenons, avec l'aide des locutions qui viennent d'être introduites, les questions que nous examinions il y a un instant. Faut-il penser que le schéma ne représente qu'une version simplifiée d'un horizon de réalité donné d'avance ? Que l'abstraction schématisante ne prend place que dans un horizon de réalité déjà constitué, déjà construit ?

Il peut arriver qu'il en soit ainsi. C'est en particulier le cas de la carte de notre fable. Mais l'idée de schéma dont nous aurons à nous servir ne comporte pas nécessairement cette exigence restrictive. Rien, nous l'avons reconnu, ne

nous autorise à poser en règle qu'un schéma et l'horizon de sa signification extérieure ne puissent jamais s'édifier simultanément dans une interdépendance réciproque. Si nous voulons tenir compte objectivement des démarches dont l'esprit humain est capable, la prudence conseille d'admettre le contraire — et les confirmations ne nous manqueront pas.

La règle (et c'est en même temps le cas qui mérite l'attention) c'est que *la constitution et l'interprétation d'un schéma (ou, si l'on préfère, sa conception et sa mise en œuvre) sont les moyens mêmes par lesquels un horizon de connaissance se définit.*

107. L'AUTONOMIE DU SCHÉMA. TECHNIQUE ET DIALECTIQUE. Tant que la carte se trouve en préparation, il est clair que ce sont les « réalités » de la forêt dont nous avons à tenir compte en premier lieu. Mais cette dépendance s'affaiblit à mesure que le travail avance. La carte une fois terminée, une fois qu'elle contient « tout ce dont on aura besoin par la suite », qu'elle est complète relativement à ce que nous en voulons faire, cette dépendance peut disparaître.

C'est pour bien le souligner que notre apologue nous fait entrer à l'auberge et nous y attabler. Mieux encore que sur le terrain, notre problème peut y trouver maintenant sa solution, uniquement sur la foi du schéma que nous avons apporté.

Ce problème change d'ailleurs de nature. Il va maintenant s'énoncer en termes propres au schéma, c'est-à-dire en termes ne concernant strictement que la feuille de papier étendue sur la table, devant nous, et les signes qui s'y trouvent tracés. Le voici sous sa nouvelle forme :

Est-il possible de tracer une ligne partant de B et aboutissant au bord de notre figure, telle que jamais elle ne passe par aucun des points numérotés et ne coupe aucun des traits marqués en rouge ?

Cette nouvelle forme du problème est relative, maintenant, à la *structure propre* du schéma, c'est-à-dire à sa « façon d'être », en tant qu'objet autonome — bien entendu dans les limites de la connaissance que nous pouvons en avoir. Le fait que la carte peut être regardée comme une image schématique de la forêt n'y joue aucun rôle. Il se trouve entièrement éliminé. Le schéma et sa fonction se sont disjoints. Le schéma s'étant détaché de sa signification extérieure a revêtu son autonomie. Après cette disjonction, la signification du schéma peut être momentanément oubliée. Peu importe alors que les points y symbolisent des arbres et que les lignes rouges soient interprétables comme une défense de passer. Ce qui seul compte encore, c'est la figure que ces points et ces lignes forment sur notre feuille, dans la réalité qui leur est propre (c'est-à-dire dans ce que nous savons en saisir). On ne pensera plus à demander pourquoi les points sont numérotés et pourquoi tels traits sont marqués en rouge, tandis que d'autres ne le sont pas. Ces questions avaient un sens au moment de la construction de la carte, ils en reprendront un au moment de s'en servir. Ce sont maintenant des faits purement empiriques, des faits à constater et à admettre sans justification particulière. Leur justification était dans le rôle qu'ils jouaient en tant que symboles (et non en tant qu'objets autonomes); de cela précisément nous n'avons plus à nous soucier pour l'instant.

En un mot, c'est sur le schéma pris dans son autonomie que la solution « théorique » de notre problème est à découvrir.

En parlant de la structure propre du schéma et de la réalité de celui-ci en tant qu'objet autonome, nous n'avons pas manqué d'ajouter une réserve quant à la qualité de cette réalité. La raison en est claire : c'est que toutes les questions posées et discutées à propos de la réalité de la signification extérieure se posent à nouveau à propos de la réalité propre du schéma.

Pas plus que les choses de la réalité extérieure, les objets du schéma ne nous sont donnés comme des réalités dernières. Il est même dans la nature des symboles de pouvoir admettre des propriétés conventionnelles, des propriétés qu'ils ne possèdent pas nécessairement comme objets naturels, mais qu'ils ont la faculté de pouvoir revêtir. Ces propriétés sont à compter au nombre des propriétés autonomes du schéma. Cette dernière circonstance ne se présentait pas encore dans notre précédente discussion. Elle nous éloigne encore davantage de la conception d'une réalité en soi : le schéma incorpore, lui aussi, un horizon de réalité et c'est dans cet horizon que la solution « théorique » est à construire.

Ainsi se trouve éclairci un des aspects de la correspondance schématique, celui de la « qualité de réalité » du schéma et de sa signification extérieure. Le résultat, sur ce point, est le même pour les deux : leur « façon d'être » n'est pas du type de la réalité en soi, mais du type de l'horizon de réalité.

Un autre point doit maintenant retenir notre attention, celui de la découverte de la solution théorique. Comment la carte la contient-elle, et de quels moyens disposons-nous pour la mettre en évidence ?

Pour nous offrir la possibilité d'une solution « théorique », il ne suffit pas que le schéma et sa signification extérieure aient été mis en concordance schématique; il faut encore que le schéma, dans son propre horizon de réalité, se prête à certaines opérations, raisonnements ou manipulations sur les éléments à l'aide desquels la solution se construira.

Pour l'expliquer sans trop de détours, il nous manque encore une idée et le mot correspondant. Qu'allons-nous entendre par une *technique* ? Ce sera, pour nous, le concours d'un certain ensemble de procédés, réunis en vue d'une certaine activité et informés par la connaissance d'un certain horizon de réalité. Cette connaissance s'exprime parfois par des règles et des prescriptions plus ou moins strictes. Une technique n'est cependant pas nécessairement un ensemble fermé de procédés bien définis, bien arrêtés. Une technique est donc aussi un

« être historique », et l'état dans lequel elle se trouve à un moment déterminé pourrait être appelé une *forme d'activité*.

C'est la forme sous laquelle un certain horizon de connaissance, la conception d'un certain horizon de réalité se prête à la réalisation d'intentions plus ou moins constantes, de fins plus ou moins exactement définies.

Une technique n'est pas uniquement manuelle, mécanique ou industrielle. Les éléments intellectuels n'en sont jamais complètement exclus. On peut même imaginer certains cas où ils prédominent et parler d'une technique mentale. De ce point de vue, toute discipline systématique présente un aspect technique et admet ses techniciens.

Une technique verbale ou mentale dont le caractère dominant est normatif, méthodologique ou normalisateur, est une dialectique.

Cette définition s'applique naturellement à la dialectique de la déduction géométrique dont il a été si souvent question au chapitre précédent. Jusqu'à plus ample information, il nous faut même la considérer comme un modèle de dialectique.

On voit facilement où ces explications et ces définitions veulent en venir. Elles s'appliquent immédiatement au schéma. Celui-ci diffère d'un objet ordinaire, d'un objet naturel, essentiellement par le fait qu'il se prête à l'exercice d'une technique, qui est l'instance responsable de la solution.

(Dans le cas de notre carte, l'horizon de réalité et la technique qui lui est propre sont caractéristiques d'un chapitre — et d'un stade — très élémentaires de l'*Analysis situs* ou *Topologie*.)

Nous avons ainsi terminé les explications par lesquelles l'idée de schéma devait être introduite. Peut-être s'étonnera-t-on de tout ce qui a été passé sous silence. « Un fait tient du miracle, dira-t-on. C'est que la technique mise en œuvre dans un schéma disjoint de sa signification extérieure reste en parallèle avec les opérations que l'on effectue dans cette signification extérieure. Ce fait est certainement capital, car c'est lui qui fait tout l'intérêt et qui commande toute l'utilisation du schéma. Or c'est trop peu de dire qu'il n'a pas trouvé d'explication jusqu'ici : aucun essai d'explication n'a même été tenté. » L'observation est exacte : nous n'avons pas le moins du monde tenté d'expliquer comment il peut se faire qu'il existe une concordance schématique et pourquoi une telle correspondance peut avoir une aussi grande portée. Faut-il vraiment s'en étonner ? À celui qui nous en ferait un grief, voici ce que nous pourrions répondre :

« De quel genre d'explication parlez-vous ? Pensez-vous que tout soit explicable; qu'on puisse donner de tout des raisons nécessaires et suffisantes ? Voulez-vous dire qu'une explication véritable est une explication définitive qui ne laisse plus aucune ombre derrière elle ? Pour vous l'explication ne devrait-elle pas être, pour être entièrement valable, la réduction d'un donné opaque à une situation rationnellement claire ? »

« Mais où prenez-vous qu'il existe toujours, et même qu'il existe parfois, des explications de ce genre ? Pour nous et pour ce qui nous occupe ici, nous estimons qu'il n'en existe pas ! »

Une comparaison nous permettra d'éclaircir la situation. En observant régulièrement le cours et les phases de la lune, on peut y découvrir certaines lois de périodicité. La connaissance de ces lois est-elle mal fondée lorsqu'on n'en donne pas d'explication ? Une loi d'expérience n'est-elle pas une loi véritable, et lui faut-il toujours une explication ?

Certes, il est possible de donner une explication des périodicités dont nous parlons, une explication dont l'élément explicatif essentiel serait fourni par les positions et les mouvements relatifs de la terre, de la lune et du soleil. Mais la connaissance de ces mouvements est, elle aussi, toute pénétrée de connaissances empiriques. Faut-il la rendre rationnelle ? On peut en donner une nouvelle explication dans le cadre d'une théorie du système solaire. Mais cette théorie n'est elle-même ni gratuite, ni purement rationnelle. Des éléments empiriques contribuent à la constituer. Et ainsi de suite.

Une connaissance s'étant fixée en lois dans un certain horizon de réalité, toute explication ultérieure requiert les éléments d'un horizon de réalité qui embrasse, élargit ou approfondit le premier. Mais ce nouvel horizon de réalité n'a pas de vertu explicative dernière et absolue.

Toute explication qui vaut la peine d'être imaginée participe plus ou moins des mêmes caractères. Elle n'est jamais définitive. Les fondements, par exemple, sur lesquels une théorie du système planétaire peut s'édifier, doivent naturellement rester sans explication, à moins d'être insérés à leur tour dans un nouvel horizon de réalité. L'idée d'un système de la connaissance dans lequel tout soit explicable est gratuite ou absurde.

Revenons maintenant à la question de la concordance schématique. Pour l'expliquer de façon valable, il nous faudrait pouvoir l'insérer dans un système de connaissances préalablement organisé. Il nous faudrait apercevoir l'horizon de réalité où les normes explicatives pourraient entrer en action. Or rien de semblable n'est entré jusqu'ici dans le cadre de nos connaissances assurées. Les conditions mêmes d'une explication de ce genre nous font complètement défaut. Au point où nous en sommes, la possibilité d'une concordance schématique est un fait d'expérience.

L'axiomatisation schématique

108. L'AXIOMATISATION SCHÉMATISANTE. Ayant admis les idées de schéma et d'horizon de réalité au nombre de nos instruments intellectuels (en même temps que tout le corps des idées qui s'y rattachent), revenons à l'édification rationnelle de la géométrie qui a fait l'objet

du chapitre précédent.

Supposons, comme la méthode axiomatique l'exige, que nous ayons dressé la liste complète des notions primitives et des conventions verbales; que nous ayons énoncé la totalité des axiomes indispensables et, enfin, que nous ayons pris pleine et entière connaissance de cette base axiomatique. Quel commentaire avons-nous fait, jusqu'ici, de ces suppositions ?

Nous nous sommes contentés de répéter : « Les notions de point, de droite, d'angle, etc., telles qu'elles sont dans notre vision intuitive de l'espace, donnent manifestement lieu aux énoncés que nous avons décidé de prendre pour axiomes. » Nous nous sommes ainsi bornés à fixer l'expression verbale d'une partie (d'une partie seulement) de notre connaissance naturelle de l'étendue.

Mais, une fois la base axiomatique posée, la dialectique de la déduction s'en empare; il est alors de règle, en axiomatique, de ne plus faire aucun appel direct à l'intuition, celle-ci ne devant plus s'exercer que par l'intermédiaire de la dialectique. La méthode axiomatique prétend ainsi dénouer ses attaches (ou du moins les affaiblir) avec l'horizon de réalité où les notions dont elle continue à se servir ont été primitivement conçues, où leur signification originelle se réalise, où les axiomes ont été tout d'abord aperçus et où ils ne cessent pas d'être valables. Pour mieux soumettre la base axiomatique à la dialectique déductive, on entend la dépouiller (au moins partiellement) de son « contenu de réalité ».

Devant les intentions ainsi formulées de la méthode axiomatique, il est difficile de ne pas être repris par le doute. Evidemment, rien ne s'oppose à ce que la méthode axiomatique ait l'*intention* de se dégager de l'horizon de réalité naturel où les idées géométriques ont pris naissance, mais sommes-nous bien sûrs qu'elle en soit capable ? N'est-ce pas là une intention irréalisable ?

Un tel doute ne cédera qu'au fait accompli ? Au sophiste qui démontre dialectiquement (mais par quelle dialectique ?) l'impossibilité du mouvement, on répond en marchant. Peut-être le sophiste ne se sentira-t-il pas touché par cette preuve inspirée de l'action, précisément parce que c'est un sophiste. S'il avait sincèrement et sérieusement en vue le problème de la connaissance, il ne lui resterait qu'une chose à faire : prendre l'évidence du fait comme centre de réorganisation de ses rapports intellectuels avec le réel; accepter l'indubitable comme préliminaire de toute dialectique légitime et par conséquent réviser sa dialectique en posant l'existence du mouvement comme exigence préalable. — Nous avons démontré la possibilité de l'axiomatisation en axiomatisant. La situation ne s'en trouve pas, pour cela, complètement éclaircie. Bien des questions restent posées, mais nous n'avons plus à douter du succès de l'entreprise et de l'efficacité des moyens mis en œuvre, puisque l'entreprise a réussi et que les moyens employés se sont révélés efficaces. L'heure où l'objection précédente aurait pu nous arrêter est passée. L'abandon (au moins

partiel) de l'horizon de réalité originel n'est plus une tâche qui nous attend, c'est une tâche accomplie. Que nous ayons ou non mesuré toute la portée des procédés de l'axiomatisation, nous n'avons plus à les justifier, mais à les comprendre. Il nous reste à recueillir les conséquences du succès de cette audacieuse manœuvre. Il nous reste à en commenter les circonstances, à en tirer les enseignements, à en tenir compte.

C'est vers nous-mêmes que les questions doivent maintenant se tourner. Le fait accompli ne vient-il rien déranger dans l'opinion que nous nous faisons de notre propre savoir ? Nos vues sur les conditions et sur les moyens légitimes de la connaissance s'en accommodent-elles sans effort ? En un mot : L'intention d'axiomatiser en éliminant plus ou moins complètement la signification originelle des éléments géométriques n'est plus à mettre en doute; elle est réalisable; elle est réalisée et les exigences qu'il reste à faire valoir ne peuvent que refluer de ce fait accompli vers notre propre vision, vers notre propre doctrine des rapports du connaissant au connaissable.

Ayant ainsi marqué le sens dans lequel s'exerce la pression de l'expérience, nous pouvons revenir aux questions que la situation comporte.

Envisageons, par exemple, l'axiome :

Axiome I_3. — *Il y a seulement une droite qui passe par deux points différents.* Comment cet énoncé précis pourra-t-il être séparé de sa signification naturelle ?

Les mots « droite », « passe par » et « points » sont ceux qui doivent être privés de leur sens intuitif. Tous les autres conservent la fonction qu'ils exercent dans le langage habituel. Mais quel sens les premiers conservent-ils ? Comment se fait-il que nous puissions continuer à nous en servir ? Comment expliquer que l'emploi conjugué, dans une seule et même phrase, de mots au sens plein et de mots au sens oblitéré (ou du moins réduit) n'engendre pas une confusion sans issue ? Si l'on renonce à savoir ce que c'est qu'*une droite*, et si l'on ne sait plus se représenter *un point*, comment saura-t-on ce que sont deux points; et si la signification du verbe « passer par » est remise en question, quelle ombre de signification peut-il y avoir à affirmer qu'*une droite seulement passe par deux points* ? Si les axiomes ne sont pas des énoncés arbitraires, s'ils sont au contraire l'expression d'une certaine réalité, ou mieux d'une certaine structure de l'horizon de réalité où ils resteront fondés, par quel miracle diront-ils tout à coup autre chose que ce qu'ils avaient mission de dire ?

Dans toutes ces questions, on retrouve l'écho du doute dont nous parlions plus haut, du doute concernant le bien-fondé de la « désintégration » des notions géométriques qui doivent participer à l'édification axiomatique. Ce doute, nous l'avons dit, ne devrait plus nous troubler, mais nous ne l'aurons vraiment surmonté que lorsque nous aurons compris non seulement que l'axiomatisation est un fait accompli, mais comment ce fait s'accomplit.

109. L'HORIZON LITTÉRAL. Pour y voir plus clair, nous allons essayer de prendre les choses par un autre bout, en quelque sorte par le bout opposé. Cela nous fera faire un assez long détour. Mais nous y verrons plus clair ensuite.

Essayons tout d'abord d'imaginer que les mots avec lesquels la base axiomatique est verbalement constituée n'aient aucune espèce de signification. Va-t-il nous rester quoi que ce soit qui offre encore prise à la déduction ? Ou ne serons-nous pas plutôt obligés, pour que le travail déductif puisse prendre son départ, de réinsuffler aux mots une signification conforme au bon sens et, aussi, conforme à notre connaissance intuitive des réalités « extérieures » ? Dans ce dernier cas, jusqu'à quel point nous faudra-t-il revenir sur nos pas ? Nous sera-t-il possible de nous arrêter à un état intermédiaire entre l'absence totale de signification et le sens originel plein ? Ces questions jalonnent un programme que nous allons tenter de remplir.

Conformément à ce plan, commençons donc par interpréter les phrases dont la base axiomatique se compose dans un horizon de réalité extrêmement réduit qu'on pourrait nommer un horizon alphabétique. Les réalités qui s'y présentent sont constituées par un certain nombre de signes d'écriture et par certains assemblages de ces signes, les apparences reconnaissables (c'est-à-dire la conformité à un certain ensemble de modèles) devant seules compter. Dans cet horizon, le mot « point », par exemple, n'a pas d'autre réalité que d'être constitué par la succession des cinq lettres p, o, i, n, t — et nous statuons qu'il en est de même non seulement de tout autre mot désignant une notion primitive de l'axiomatique, mais aussi des mots ordinaires du langage tels que « deux » ou « toujours ». Les axiomes, eux aussi, n'ont plus d'autre réalité que l'apparence qu'ils nous offrent en tant que succession de signes littéraux dans un ordre déterminé. Ils ne conservent que la réalité qu'ils pourraient revêtir pour un typographe capable de distinguer les signes de l'écriture et capable de les assembler correctement, mais incapable non seulement de savoir ce que les mots et les phrases veulent dire (ce qui pourrait lui arriver s'il composait un texte dans une langue qui lui fût étrangère), mais encore ignorant du fait que tel assemblage de lettres est un mot d'une certaine langue, et telle configuration une phrase.

Est-il possible de mettre en rapport cet horizon alphabétique (et la réalité que la base axiomatique y prend maintenant) avec l'horizon de réalité intuitif où la signification primitive des axiomes est fondée ? Nous pouvons en faire l'essai. Mais ne nous attendons pas à pouvoir le pousser bien loin. Convenons donc que la base axiomatique, dans son objectivité alphabétique, ait pour mission de représenter, d'une façon ou d'une autre, la base axiomatique revêtue de sa réalité intuitive. Peut-il être question d'une représentation fidèle ? Le mot « droite », par exemple, ne rappelle en rien, par sa forme imprimée, l'idée

d'une droite géométrique, l'idée de la forme rectiligne, — ou, du moins, il ne la rappelle pas mieux que tout autre mot imprimé. Si l'on ajoute qu'en allemand, c'est le mot « Gerade » qui rend les mêmes services, aucun doute ne resterait possible si nous en avions jamais eu : le mot « droite » dans sa réalité alphabétique ne peut être qu'un signe représentatif; il ne saurait être plus qu'un symbole choisi arbitrairement. Il en serait de même, naturellement, pour tous les autres mots désignant une notion fondamentale. Ce serait aussi le cas, par exemple, pour les interventions du verbe « passer par ». On pourrait peut-être se dispenser de considérer tous les mots de la langue ordinaire comme autant de symboles individuels, mais chaque axiome (dans son apparence alphabétique) aurait du moins à être pris comme un signe (et rien de plus) de ce qu'il signifiait antérieurement. La base axiomatique tout entière ne serait plus alors, elle aussi, qu'un signe très complexe fabriqué de toutes pièces avec les réalités élémentaires du monde alphabétique.

Ce signe peut-il donner prise à nos intentions axiomatiques ? La dialectique déductive peut-elle aller s'ancrer dans cet horizon de « pures apparences littérales » ? La déduction, telle que nous l'avons pratiquée, se contente-t-elle vraiment de n'attribuer aux mots que la réalité qu'ils pourraient garder pour quelqu'un qui ne connaîtrait rigoureusement rien de la langue que nous parlons ici ? Cette dernière question fait éclater l'insuffisance du point de vue absurdement formaliste et superficiel auquel l'horizon alphabétique répond. Si nous devions en rester là, la configuration très complexe que formerait la base axiomatique dans son ensemble ne serait pas même un symbole, car il est dans la fonction du symbole de servir à quelque chose, tandis que le signe littéral dont nous parlons ne servirait exactement à rien. Il resterait strictement inutilisable, car il n'y a aucun rapport entre l'horizon alphabétique que nous venons d'imaginer et la dialectique déductive dont nous nous sommes déjà servis. Pour procurer à cette dernière ses points d'appui et ses points d'attaque, nous serons obligés de réintégrer les axiomes (et naturellement aussi les énoncés déduits) dans une partie au moins de leur signification intuitive. Mais où sera-t-il possible de s'arrêter, dans ce rétablissement du sens primitif ?

Seules les exigences de la dialectique peuvent en décider, c'est le seul critère dont nous disposons.

110. L'HORIZON SYNTACTIQUE. La première mesure qui s'impose est donc de rendre aux assemblages de signes d'écriture leur qualité de mots et de phrases au sein d'une langue intelligible. Du même coup nous réintroduisons aussi un principe de choix (ou mieux encore un principe d'exclusion) limitant les combinaisons littérales admissibles. Il y a des mots, des suites de mots qui, au sein d'une langue déterminée, ne peuvent rien signifier pour la simple raison qu'ils n'y figurent pas ou qu'ils contrevien-

nent aux règles de la syntaxe de cette langue. (La syntaxe d'une langue, dans le cas idéal, devrait décrire les associations de termes qui sont admissibles et indiquer les caractères de celles qui ne le sont pas. En réalité, la syntaxe d'une langue s'établit bien plus par la conformité à certains modèles et à certains usages que par l'observation de règles explicites.)

Dans la combinaison suivante, par exemple,

L'homme est ni,

tous les mots appartiennent au vocabulaire de la langue française. Elle est pourtant syntactiquement incorrecte dans cette langue. La phrase incomplète suivante

*L'homme est **

(où l'astérisque indique la place d'un mot indéterminé) peut être correctement complétée; par exemple, en remplaçant l'astérisque par un adjectif. Les phrases que voici :

L'homme est mortel et *L'homme est immortel*

sont toutes deux correctes. Mais la syntaxe exclut la possibilité de remplacer l'astérisque par une conjonction.

La correction syntactique à elle seule représente ainsi un critère permettant d'exclure déjà de notre système axiomatique un certain nombre de phrases défectueuses. Mais les deux phrases complétées qui précèdent font bien voir que ce critère ne pourra suffire, puisqu'elles se contredisent l'une l'autre.

Pour que la dialectique puisse se mettre en branle, il ne suffit donc pas que la base axiomatique soit grammaticalement et syntactiquement irréprochable. Et d'ailleurs, on ne se propose aucunement de déduire toutes les phrases qui satisferaient au critère de correction dont nous venons de parler. Considérons, par exemple, les deux énoncés géométriques suivants :

I_3 *Par deux points différents, il passe seulement une droite*
I_3' *Par deux points différents, il passe au moins deux droites.*

Du seul point de vue de la langue, ces énoncés sont parfaitement admissibles, l'un et l'autre. Mais du point de vue de notre dialectique déductive, ils sont incompatibles. Si l'on prend I_3 comme axiome, I_3' doit être écarté. Et s'il arrivait que I_3' fût démontrable, c'est I_3 qui serait à exclure.

La dialectique a donc le droit de légiférer sur des phrases dont la forme est correcte et dont le sens nous est encore problématique. Et tout ce que, pour l'instant, nous en savons, c'est que l'incompatibilité des énoncés n'est pas d'origine « linguistique », mais d'origine dialectique. Elle doit résider dans leur signification, dans les rapports mutuels de leurs signification. La dialectique

opère par ses propres moyens une sélection parmi les énoncés syntactiquement irréprochables. Pour pouvoir en rendre compte, il nous faut faire un pas de plus dans le rétablissement de la signification intuitive de nos énoncés.

Revenons aux conditions dans lesquelles la déduction opère. La dialectique avec ses nécessités et ses évidences propres, disions-nous, vient suppléer l'intuition directe de l'espace. Or, les mots dans lesquels cette intuition repose spécialement sont ceux qui désignent les notions fondamentales : point, droite, passer par, etc. Ce sont donc spécialement ces mots dont la signification doit être annulée ou réduite. Les autres mots qui sont dans le langage courant supportent au contraire l'appareil dialectique : ils devront être maintenant maintenus dans leurs fonctions habituelles.

Cette analyse nous a ramenés bien près de notre point de départ. Nous avons à prendre note que les énoncés sur lesquels la dialectique s'exerce sont des phrases composées selon les règles et les usages de la langue française avec deux sortes de mots. Les uns recèlent leur sens usuel, et exercent dans la structure verbale leur rôle normal. Ce sont les mots tels que un, deux... et, ou,... avec, si, alors,... librement, nécessairement, etc. Ils forment une armature verbale dans laquelle les autres mots, ceux de « point », de « droite », etc., sont encastrés. Ces derniers n'ont pas encore retrouvé de signification. Ils sont comme des formes vides et n'indiquent, dans le texte, que la place qu'ils occupaient primitivement. Le problème est de remplir à nouveau ces formes vidées de leur sens d'un sens nouveau (et réduit) sur lequel la dialectique puisse reprendre prise.

111. L'HORIZON DE LA DIALECTIQUE DE LA DÉDUCTION.

La difficulté va maintenant se dénouer de façon toute naturelle, et peut-être trouvera-t-on que le détour assez long que nous venons de faire n'était pas absolument nécessaire. Mais si nous n'avions pas pris la peine de le faire, peut-être ne saurions-nous pas apprécier la « solution » à sa juste valeur.

Supposons que, dans les énoncés I_3 et I_3', la forme vide « point » reçoive la signification « objet quelconque pris dans une première catégorie », la forme vide « droite » la signification « objet quelconque pris dans une seconde catégorie » et qu'enfin l'on substitue à « passer par » une relation quelconque pouvant s'établir entre certains objets de la première catégorie et certains objets de la seconde : Quelle que soit la nature des objets et de la relation envisagée, les énoncés I_3 et I_3' restent dialectiquement incompatibles. Cette simple expérience est décisive. On pourrait la répéter en variant les notions fondamentales et les énoncés; le résultat resterait le même : les démarches de la dialectique ne tiennent jamais à la nature particulière des « objets » à propos desquels elles ont lieu.

Cette observation tempère considérablement la violence des expressions telles que « vider un mot de sa signification primitive » ou « renoncer au contenu intuitif d'une notion ». Lorsque nous prétendons renoncer à nous servir de l'idée de point, par exemple, « telle qu'elle est dans notre intuition », nous ne renonçons pas à toutes les attaches de cette notion avec l'horizon de réalité où elle a pris naissance. Nous ne renonçons pas à considérer un point comme une chose ayant sa façon propre d'exister. Un point ne cesse pas d'être un objet — même si c'est un objet de la pensée — ayant existence et individualité. Même lorsque nous prétendons renoncer à la forme que l'idée de droite évoque dans notre esprit, nous n'effaçons pas tout de l'image que nous portons en nous. Les points et les droites ne cessent pas d'être envisagés comme des choses, au sens le plus ordinaire, le plus intuitif du mot « chose ». Mais ce sont des choses dont les caractères distinctifs, les caractères qui leur sont particuliers, n'auront plus à intervenir. Une droite, par exemple, n'est plus qu'un individu d'une certaine catégorie qu'il suffira de désigner sans avoir à le décrire, à spécifier. Pour le distinguer des individus appartenant à d'autres catégories, tels que les segments ou les angles (qui devront être également et semblablement « dépouillés » de leurs caractères intuitifs), il suffira d'attacher à chacune de ces catégories une désignation choisie en toute liberté. On dira, par exemple, que les points forment une première catégorie, les droites une seconde, les angles une troisième, etc.; ou bien on dira la catégorie A, la catégorie B, la catégorie C, etc.; ou bien encore on désignera toujours et exclusivement les points par des majuscules; les droites par des minuscules; les angles par des lettres de l'alphabet grec, et ainsi de suite.

Dans ces conditions, il n'est pas absurde de parler de « deux points » ou d'« une droite seulement ». Il y a exactement autant de sens à dire « deux points » qu'à dire « deux exemplaires d'une première catégorie »; autant de sens à dire « une droite seulement » qu'à dire « un exemplaire seulement d'une seconde catégorie » — lorsqu'on sait par ailleurs qu'il ne sera jamais exigé de s'en référer aux « caractères naturels » des objets en question.

Et quant au verbe « passer par », il ne cesse pas de désigner une relation entre certaines choses (une relation entre certains individus de la première catégorie et certains individus de la seconde); mais c'est une relation dont la nature reste indéterminée, dont la façon d'être originelle peut rester ignorée parce que le raisonnement déductif saura désormais s'en passer.

Tout compte fait, il est donc inexact de dire que la dialectique opère sur des mots vides de sens. Il faut dire plutôt que le sens des mots est réduit à la fonction de dénommer un certain nombre de catégories de choses ou un certain nombre de relations de catégorie à catégorie.

En fin de compte, voici comment se présente l'édification de notre système axiomatique.

À l'aide d'éléments choisis dans notre matériel intuitif, nous commençons par construire la base axiomatique. Celle-ci est formée d'un certain nombre d'énoncés relatifs à certaines relations que nous avons spécialement distinguées entre les éléments précédemment choisis.

Cela fait, nous faisons appel à une technique mentale et verbale ayant pour but de former de nouveaux énoncés à partir des axiomes. Mais cette technique n'opérera pas sur la base axiomatique telle qu'elle vient d'être séparée du contenu intégral de l'intuition. Pour être adaptée aux moyens que la technique va être capable de mettre en œuvre, la base axiomatique doit être remaniée. Il faut superposer à la connaissance que nous en avons, une image simplifiée, une image qui porte le sceau de notre volonté de schématisation.

Cette matière axiomatique ainsi expurgée de sa signification géométrique (au sens ordinaire) est alors prête à être soumise à l'activité organisatrice et créatrice de la dialectique.

112. Les moyens de la dialectique.

La dialectique une fois installée, de quels moyens dispose-t-elle pour tirer des axiomes l'ensemble des autres énoncés qu'elle a précisément pour fonction de déduire ? C'est là une question qui doit être examinée très attentivement si l'on veut acquérir une juste compréhension de la démarche axiomatique. Mais il est encore trop tôt pour le faire avec tout le soin voulu. Nous nous contenterons, pour l'instant, de quelques remarques rapides.

Les axiomes, par exemple le suivant :

Par un point P, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite p,

sont des énoncés portant sur des éléments quelconques, de telle et telle catégorie. Dans l'axiome précédent, P est un élément quelconque de la catégorie des « points », *p* un élément quelconque de la catégorie des « droites ». Ces énoncés peuvent naturellement être particularisés, pour tels ou tels éléments particulièrement désignés. Par rapport aux configurations d'éléments dont ils posent ou concèdent la possibilité, les axiomes fixent nos droits et nos devoirs, c'est-à-dire les libertés qu'ils nous reconnaissent et les restrictions, les nécessités qu'ils nous imposent. Ce dont la dialectique reste capable se trouve ainsi délimité : c'est l'exercice de ces libertés dans le cadre de ces nécessités.

Sans vouloir faire ici le compte exact de tout ce que cela signifie[1], on peut en quelques mots en indiquer certaines parties essentielles : la logique (ou physique) de l'objet quelconque, comportant les jugements d'existence, de compatibilité ou d'exclusion réciproque des groupes d'objets de nature quelconque, la logique de l'acte quelconque énonçant les lois de combinaisons

[1] Voir plus loin, n° 124.

des actions compatibles ou incompatibles, un canon de nos jugements élémentaires concernant l'emploi du vrai et du faux, une certaine charte de nos libertés naturelles, par exemple de notre liberté d'imaginer ou de ne pas prendre en considération, etc.

Or il faut remarquer que la logique, tendant à se constituer en discipline autonome, répond précisément à l'intention de légiférer sur les objets indépendamment de leur nature, sur les classes sans avoir à se préoccuper des propriétés de leurs éléments (si ce n'est celle d'être réunis en une même classe qu'on ne puisse pas confondre avec une autre classe), sur les actes en ne sachant rien de leur réalisation (si ce n'est qu'ils sont libres ou liés, compatibles ou contradictoires), etc.

En ce sens, la technique à laquelle le matériel axiomatique révisé donne prise est une technique strictement logique. Elle répond à la définition que nous avons donnée de la dialectique de la déduction.

Le géomètre axiomaticien entend, disions-nous, être dispensé de tout rappel de l'intuition spatiale, dès qu'il a constitué sa base axiomatique. L'examen précédent vient de nous montrer comment il y réussit, et de quel prix il paie son succès. En bref :

L'installation de la dialectique déductive, dans l'édification axiomatique de la géométrie, présente les caractères de l'installation d'une technique dans un schéma.

Cette affirmation est d'ailleurs aussi valable pour l'édification axiomatique de toute autre discipline.

Dans notre cas, le schéma se présente avec une autonomie déjà si nettement visible que nous n'avons guère pensé à en préciser la signification extérieure. Nous ne pouvons cependant pas nous en dispenser entièrement.

Peut-être le résultat de cet examen ne sera-t-il pas exactement celui qu'un enseignement traditionnel suggère.

La correspondance schématique et les trois aspects

Reprenons la constatation par laquelle se résumaient les essais présentés aux paragraphes précédents :

« *L'axiomatisation se présente comme l'installation d'une technique (et plus spécialement d'une dialectique) dans un schéma.* »

Cette constatation n'a déjà plus rien de surprenant. Elle n'a cependant pas encore livré tout son sens. Deux points demandent spécialement à être précisés :

a) Quelle est la signification extérieure du schéma axiomatique ? — ou quelles en sont les significations extérieures ? — car il n'est pas exclu que nous puissions en désigner plus d'une;

b) Quel est, d'autre part, l'horizon de réalité qui lui confère son existence autonome; dans lequel il existe avec sa structure propre. ?

Ce sont là les deux questions fondamentales qui se posent à propos de tout schéma.

Commençons par la première. Pour y répondre, nous n'aurons pas besoin d'une analyse supplémentaire. Il nous suffira, pour l'essentiel, de nous mettre au bénéfice des résultats obtenus (au chapitre II) en appliquant le principe de la poupée russe à l'aspect intuitif de la connaissance géométrique.

113. L'ASPECT INTUITIF EN TANT QUE SIGNIFICATION EXTÉRIEURE.

L'axiomatisation a-t-elle éliminé l'intuition ? Nous savons maintenant à quelle brutale simplification du problème correspondrait une réponse purement et simplement affirmative. Tout au long de l'axiomatisation, et chaque fois qu'un nouveau secteur de notre connaissance spatiale était atteint par le processus axiomatique, nous avons pris la peine de revenir sur les buts de l'axiomatisation. C'est, expliquions-nous, de reconstruire rationnellement (ou, mieux encore, déductivement) le contenu de l'intuition. Cette reconstruction ne prit jamais le caractère d'une élimination immédiate et totale du matériel intuitif dont nous nous étions servi jusque-là. Qu'on se souvienne de la fable de la maison aux mille fenêtres. Nous n'avons pas récusé l'intuitif, nous n'avons fait qu'en limiter l'intervention. Pour constituer la base axiomatique, nous ne fîmes appel qu'à un nombre restreint d'éléments (notions et relations) choisis parmi tous ceux que l'intuition nous offre, mais, de ceux-là, nous avons mainte et mainte fois déclaré que nous les acceptions tels que l'intuition nous les présente — du moins pour commencer. Chaque extension de la base axiomatique fut marquée d'un recours analogue à notre information intuitive, et nous n'avons jamais manqué d'en faire la remarque. Peut-être cette insistance a-t-elle été jugée superflue, ou même lassante. Elle nous dispense, à cet endroit, d'en dire davantage. Car il est clair que, par la façon même dont nous avons procédé, nous avons désigné la signification extérieure en face de laquelle le schéma axiomatique se constituait : *C'était précisément le contenu de l'intuition*.

(Le lecteur accordera peut-être un sourire au jeu des dénominations qui nous fait nommer extérieure la réalité intime et profonde qu'est, pour nous, la structure de notre connaissance naturelle.)

Ainsi s'explique le soin que nous avons mis à analyser l'aspect intuitif de notre faculté géométrique. Nous entendions préciser dans deux directions, en quelque sorte opposées, le rôle et la nature du contenu de l'intuition :

a) Par rapport aux réalités qui sont extérieures aux robots — robots dont la mission était de donner une représentation tangible du fonctionnement de nos conceptions et de nos conduites spatiales;

b) Par rapport à la personne, chez laquelle l'organisation et l'activité mécaniques des robots se traduisaient en une vision consciente des formes étendues et des relations qui s'établissent entre elles.

En répartissant les rôles entre le robot périphérique, le robot lambertien et la personne mathématicienne, nous avons tout simplement dégagé les conditions d'existence de l'horizon intuitif. C'est par l'organisation du robot lambertien que se constitue la réalité propre de cet horizon. Celui-ci vient à la connaissance de la personne mathématicienne, lorsque cette dernière contemple la structure du robot lambertien.

Nous avons expliqué (au n° 36, chap. II) comment il peut se faire que, pour la personne mathématicienne, cet horizon de réalité prenne figure de réalité abstraite et inconditionnelle. Bien entendu, ces explications n'ont pas eu le pouvoir de rien changer à ce qui fait la réalité et la valeur propres de l'intuition. L'idée que nous pouvons nous en faire s'en trouve cependant relativisée. Cette relativisation n'a rien de destructif. Elle trouve, au contraire, son accomplissement constructif dans l'idée de l'*horizon intuitif de réalité*.

Ainsi, deux conceptions de l'intuition s'opposent l'une à l'autre : celle qui la pose inconditionnelle, celle qui la prend relativisée. Elles informent des doctrines préalables incompatibles. Il est clair que nous ne pouvons pas leur accorder la même valeur. Seule, la seconde tient compte de toute notre information; seule, elle répond aujourd'hui à notre expérience; seule, elle est idoine. (C'est là, d'ailleurs, une remarque qui s'imposait d'elle-même, dès après notre analyse de l'aspect intuitif.) Selon la première, la signification extérieure de l'entreprise axiomatique s'arrêterait au contenu de l'intuition. Celui-ci la réaliserait définitivement et inconditionnellement. Selon la seconde, au contraire, la recherche de la signification extérieure ne s'arrête pas fatalement au contenu de l'intuition, mais, le traversant, a la liberté de se porter vers les réalités encore plus extérieures auxquelles il répond lui-même.

Mais laissons ce dernier point de côté pour l'instant; il nous faudra y revenir au moment de la synthèse dialectique qui est le but de ce chapitre; et reportons notre attention sur ce qui fait la réalité propre du schéma axiomatique. Nous venons de rappeler qu'au premier moment de sa constitution, il était tout simplement formé d'éléments choisis dans le matériel intuitif à notre disposition. Ce qui lui a fait une autre nature, c'est la volonté de l'axiomaticien de s'émanciper de la tutelle de l'intuition, de s'affranchir de la vision spatiale. C'est l'intention de procéder déductivement qui a donné naissance à ce que nous avons déjà nommé *l'horizon dialectique*. Jusqu'à quel point cette intention a-t-elle atteint son but ?

Nous savons fermement qu'elle n'était pas vaine. Jusqu'à un certain point, les notions de départ ont véritablement été vidées de leur contenu intuitif. Mais l'ont-elles été totalement ? La seconde chose que nous savons maintenant tout

aussi fermement, c'est qu'il n'en est rien. Les « réalités » de l'horizon axiomatique sur lesquelles la dialectique a prise ne se sont pas entièrement évadées du monde de leur signification primitive. Elles y restent attachées par certains caractères à la fois sommaires et essentiels, celui d'être une chose, d'entrer passivement ou activement dans une relation concrète, etc. Ce n'est pas sur des formes parfaitement vides que la dialectique opère, ce n'est pas du rationnel pur qu'elle réussit à organiser. Même après la constitution de l'horizon axiomatique, l'évasion du sensible n'est pas totale, la marche au rationnel n'a pas rejoint son dernier but, l'intention dominante de l'axiomaticien n'a pas trouvé son entière satisfaction.

Qu'on se souvienne de ce que nous disions de la façon dont l'autonomie d'un schéma se réalise : La carte bien et dûment établie, étalée sur la table de l'auberge, la carte qui se prête à la recherche de la solution théorique est un schéma qui a revêtu sa « pleine » autonomie. Cela veut dire, rappelons-le, que pour ce qu'on en veut faire, sa réalité propre suffit, qu'on peut parfaitement se dispenser de penser à la forêt qui en est la signification extérieure. Mais cela veut-il dire que la carte appartient à un autre monde, à un monde d'une autre essence que la forêt ? Certes non. La carte et la forêt, pour en rester à cet exemple, font partie l'une et l'autre, à des titres différents, il est vrai, du monde réel du sens commun.

C'est de façon analogue que l'horizon axiomatique, sans être identique à l'horizon intuitif, n'en est cependant pas dissocié.

Nous avons ainsi dressé la réalité propre du schéma en face de sa réalité extérieure : ces deux réalités sont-elles bien en correspondance schématique ? Nous avions dégagé quatre conditions essentielles à satisfaire pour qu'il en soit ainsi :

a) Par sa signification, le schéma est engagé dans un horizon de réalité qui lui est extérieur, au sens que nous avons donné à ce dernier mot.

b) Il trouve son existence autonome et prend sa structure propre dans un second horizon de réalité (qui doit parfois être conçu dans ce but même).

Ce sont ces deux premiers points qui viennent d'être mis au clair. Il nous reste à commenter les deux derniers.

c) Entre ces deux horizons, il s'établit une correspondance portant les caractères que nous avons précisément réunis sous le qualificatif de schématique.

d) Dans l'horizon de son existence propre, le schéma se prête à une technique interprétable dans l'horizon de sa signification extérieure.

Dans la correspondance que nous avons établie entre l'intuitif et l'axiomatisé, ce qui est, par exemple, droite pour la première n'est plus qu'un objet d'une certaine catégorie pour la seconde. Il est clair que les objets axiomatiques

auxquels nous conservons le nom de droites après les avoir dépouillés de presque tous leurs caractères distinctifs au regard de l'intuition, ne sont pas des images parfaitement fidèles des droites que nous savons imaginer. Il est clair que les premiers ne jouent, vis-à-vis des seconds, que le rôle de symboles, que ce qui fait la nature de ceux-ci n'est rendu que de façon très sommaire, et même conventionnelle, par ce qui fait la nature de ceux-là. Il est vraiment inutile d'en dire davantage : le point *c)* s'illustre de tout ce que nous avons dit de l'élimination des caractères intuitifs, et des limites qui sont posées à cette élimination.

Le point *d)*, enfin, se trouve confirmé par l'expérience même de l'axiomatisation. Nous n'avons plus à démontrer que l'installation d'une technique interprétable dans l'intuitif est possible, puisque l'expérience vient d'en être faite, puisque nous disposons d'ores et déjà de l'horizon axiomatique où la technique déductive a la faculté de s'exercer.

Point après point, le résultat de l'expérience axiomatique se précise : *L'axiomatisation n'installe pas un ensemble de notions « purement rationnelles » qu'elle soumettrait à une déduction purement abstraite. Elle instaure conjointement un schéma axiomatique et une dialectique dans ce schéma, interprétables l'un et l'autre dans l'intuition spatiale qui en fournit la signification extérieure.*

114. L'ASPECT THÉORIQUE EN TANT QUE SIGNIFICATION EXTÉRIEURE.

L'axiomatisation de la géométrie a pris son appui, nous venons de nous en rendre compte, dans une signification extérieure bien désignée, dans la contexture de nos notions intuitives. Cette signification extérieure est-elle la seule possible ? Par une brève allusion, nous avons déjà envisagé l'éventualité d'une pluralité de significations extérieures « parallèles ». C'est l'aspect théorique que nous allons maintenant examiner sous cet angle.

Qu'on ne s'attende pas à voir se dessiner ici un horizon théorique parallèle à l'horizon intuitif et complètement indépendant de celui-ci.

Il ne faut pas y songer. L'espoir nous en a été enlevé par les résultats de notre examen des trois aspects fondamentaux de la connaissance géométrique. Certes, il nous a été possible (et cela bien avant l'axiomatisation) de préciser et de spécifier chacun de ces aspects par rapport aux deux autres, mais non jusqu'à leur autonomie complète. L'axiomatisation elle-même n'y parvient pas.

Et pourtant, en montrant en quoi l'intention théorique se distingue et se détache de la contemplation des formes, nous avons bien dégagé un horizon de réalité différent de l'horizon intuitif, différent, mais non dissocié. L'horizon intuitif et l'horizon théorique ne sont aucunement étrangers l'un à l'autre : le second naît du premier par l'insertion du moment déductif. Il n'est pas très facile de dire en quoi les notions qui portent le même nom diffèrent, selon qu'on les engage dans l'un ou dans l'autre de ces deux horizons. En quoi la droite de l'intuition naturelle se distingue-t-elle, par exemple, de la droite qui intervient dans telle ou telle démonstration ? Il est naturellement impossible de les séparer brutalement l'une de l'autre, pour faire apparaître leur nature propre. Mais le moins qu'on puisse dire est que la droite de la théorie est gravée d'un trait plus fin et plus aigu dans notre esprit. Il y a entre elles toute la distance qui sépare une notion naturelle (d'un emploi constant et presque inconscient) d'une notion passée au rang d'instrument mental, d'un emploi consciemment observé et surveillé.

L'insertion du moment déductif dans l'intuitif a fait évoluer toutes les notions intuitives vers un état de précision conceptuelle qui les rend adéquates aux distinctions tranchées (et sommaires) du raisonnement logique.

Dans notre connaissance, le théorique vient doubler l'intuitif comme la forme d'une expérience sur et dans l'intuitif.

Peut-être la distinction que nous cherchons à suggérer prendra-t-elle plus de relief si nous distribuons encore une fois les rôles entre robots et personnes adjointes : la structure de l'intuitif est inscrite, on s'en souvient, dans l'organisation du robot lambertien, mais l'expérience constitutive du théorique est le fait de la personne adjointe à ce robot, le fait de la personne mathématicienne.

Ayant ainsi complété, grâce à nos nouveaux moyens d'expression, l'examen de l'aspect théorique, tournons-nous encore une fois vers les « réalités » de l'horizon axiomatique. Est-il juste de dire cette fois encore que le passage de l'un à l'autre est une axiomatisation schématisante ?

II faut l'avouer, cette question doit avoir quelque chose d'irritant pour le géomètre habitué à ne considérer la géométrie que sous l'angle mathématicien.

« Il y a, dira-t-il, quelque chose de forcé et d'artificiel à mettre l'axiomatisé et l'intuitif directement en correspondance. Cette façon de faire ne correspond en tous cas pas au développement historique. Pour le mathématicien, qui fut le premier à parler et à se servir de la méthode axiomatique, l'axiomatisation ne fut qu'une reprise de l'aspect théorique. Ce ne fut tout d'abord qu'une mise en bon ordre du dispositif déductif. Une théorie mathématique étant à établir, il y avait avantage, pour la clarté de l'exposition, à énumérer toutes les notions et à énoncer toutes les hypothèses dont la théorie devait être déduite, et à veiller à ce que seules elles soient employées. Le purisme axiomatique n'était pas encore de rigueur. On ne s'occupait guère de savoir si les notions avaient encore ou n'avaient plus leur contenu intuitif. Je doute qu'on ait aperçu une différence de nature entre la déduction géométrique au sens ordinaire et traditionnel et la déduction axiomatisée. Celle-ci n'était guère qu'une façon plus

soigneuse de disposer celle-là. Aussi ne puis-je entendre sans un grain d'irritation qu'on demande s'il y a *aussi* correspondance entre le plan théorique et le plan de l'axiomatisé. C'est précisément entre ces deux plans que la correspondance est la plus visible, la plus étroite, la plus fidèle. Ici, la déduction elle-même se reporte d'un plan sur l'autre.

» En un mot, mieux encore que l'aspect intuitif, l'aspect théorique trouve son image éclaircie, épurée, dans l'édifice axiomatique. »

Le mathématicien qui parle ainsi a-t-il tort ? Non, mais il court un double risque. En ne se détachant pas suffisamment de l'aspect théorique, tel qu'il se réalise au stade préaxiomatique, il ne mesurera pas à sa juste valeur le résultat de l'abstraction schématisante qui fait émerger l'axiomatisé de ses réalisations antérieures. Pourra-t-il s'expliquer à lui-même la création des géométries non euclidiennes sans s'être fait une idée claire de l'horizon axiomatique ? On peut en douter. Nous aurons d'ailleurs à y revenir.

Le second risque est d'oublier que le théorique requiert l'intuitif, de croire que l'axiomatisation réussit à effacer toute trace de ce dernier. C'est d'ailleurs pour éviter toute possibilité de tomber dans cette seconde erreur que nous avons choisi l'intuitif comme première signification extérieure de l'horizon axiomatique.

Mais peut-être l'observation que nous venons de prêter au mathématicien a-t-elle fait naître une autre hésitation. La concordance entre l'aspect théorique et l'aspect axiomatique de la géométrie n'est-elle pas trop étroite, trop réussie, pour pouvoir être considérée, elle aussi, comme une correspondance schématique ? Ne doit-il pas y avoir une distance plus grande entre un schéma et sa signification extérieure ?

Cette hésitation ne se justifie pas. Il suffit, pour le voir, de remettre en présence l'une de l'autre (par exemple) les deux conceptions correspondantes de la droite. Les droites parallèles dont il est question dans l'axiome d'EUCLIDE ne sont aucunement dépouillées, dans notre esprit, des caractères représentatifs qui confèrent au parallélisme une signification spatiale toute particulière. Elles sont encore tout autre chose que des objets de l'horizon axiomatique dont nous avons si souvent souligné la « nature dépouillée ».

Nous pourrions reprendre ici, l'un après l'autre, tous les caractères par lesquels l'idée de correspondance schématique s'est précisée pour nous : nous les trouverions tous réalisés. En bref :

En tant que signification extérieure du schéma axiomatique, l'aspect théorique réalise avec ce dernier une correspondance encore plus étroite que l'aspect intuitif.

115. L'ASPECT EXPÉRIMENTAL EN TANT QUE RÉALISATION EXTÉRIEURE.

Passons enfin à l'aspect expérimental. Nous n'avons pas grand-chose de neuf à en dire ici, mais en le passant sous silence, nous éveillerions peut-être l'idée qu'il se présente tout autrement que les deux premiers. Posons-nous donc une troisième fois, à propos de ce troisième aspect, les deux questions obligées :

La géométrie expérimentale prend-elle sa réalité spécifique dans un horizon de réalité qui lui est propre ?

Et s'il en est ainsi, cet horizon est-il aussi en concordance schématique avec l'horizon axiomatique ?

Ce n'est pas sans un certain effort de réflexion que nous avons pu marquer, au paragraphe précédent, la distance qui sépare l'horizon théorique de l'horizon intuitif, le mot « théorique » prenant son sens préaxiomatique. C'est une difficulté assez analogue que nous rencontrons ici : à première vue, l'horizon expérimental semble se confondre avec l'horizon de l'intuition naturelle. Mais nous ne saurions en rester à cette position sans laisser s'effacer des distinctions qui nous étaient déjà devenues claires au chapitre II. La discussion du paragraphe précédent va nous servir de modèle[1].

L'horizon théorique, disions-nous, se détache de l'horizon naturel pour répondre à l'intention déductive, pour réaliser les conditions d'application et de validité de la dialectique de la déduction telle qu'elle s'exerce en géométrie élémentaire. Il s'en détache comme il arrive que, dans un tableau, un groupe de figures se détache de l'ensemble : il s'en détache, mais il ne s'en sépare pas.

De façon en quelque sorte symétrique, l'horizon de réalité où se profile l'aspect expérimental se détache de l'horizon naturel par la mise en œuvre d'un certain ensemble de procédés techniques, par l'insertion et l'intervention d'une activité qui produit des objets géométriques d'une qualité supérieure à celle des objets naturels.

Cette technique de production est ici l'élément caractéristique et dominant : l'horizon expérimental est tout simplement ce qu'elle réussit à faire de l'horizon naturel.

Passant à la seconde question, nous aurions à examiner le rapport de l'horizon ainsi construit à l'horizon axiomatique. Sont-ils vraiment, eux aussi, en concordance schématique ? Mais nous ne nous attarderons plus à cet examen. Il va nous suffire de rappeler deux moments de notre étude.

Une première synthèse dialectique, au niveau de l'information naturelle, s'est faite sous l'idée dominante de l'équivalence « de vérité » des trois aspects. C'était mettre l'élément de concordance en particulière évidence. Pour deux

[1] La discussion sera d'ailleurs reprise et approfondie au moment de la synthèse dialectique.

d'entre eux, nous venons de relever l'existence d'une concordance analogue (à la fois affermie et affaiblie, il est vrai) jusque sur le plan axiomatique. Ce résultat s'étend de lui-même au troisième.

Une information plus exacte, une connaissance plus fine sont venues réduire l'idée de l'équivalence des trois aspects à une validité sommaire. Que reste-t-il, en particulier, de la concordance entre le théorique et l'expérimental qui semblait susceptible de se réaliser avec une approximation toujours meilleure : tout juste ce qu'il faut pour que la correspondance de l'un et de l'autre à la « réalité axiomatique » soit une concordance schématique.

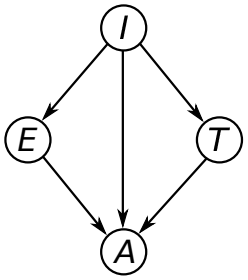


FIG. 70

En fin de compte, les trois paragraphes précédents peuvent être résumés comme suit :

Par l'adoption d'une certaine dialectique ou d'une certaine technique, l'horizon théorique et l'horizon expérimental se détachent respectivement de l'horizon naturel. Tous trois sont en concordance schématique avec l'horizon axiomatique.

La figure ci-contre illustre (schématiquement !) la situation.

116. LES TROIS ASPECTS EN TANT QUE SCHÉMAS ACTIFS. L'idée de schéma vient de nous servir à organiser conceptuellement les rapports des trois aspects de la géométrie à son édification axiomatique. En décrivant chacun des trois horizons de réalité correspondants dans sa fonction de significations extérieures nous n'avons cependant présenté que son rôle passif. Tous trois ont également un rôle actif, une fonction constitutive, face à des réalités que nous aurons encore une fois le droit de nommer extérieures ou antérieures. Ce n'est, d'ailleurs, pas la première fois que nous parlons de leur « double nature ». En imaginant le robot lambertien, nous avions précisément l'intention de la rendre manifeste, spécialement en ce qui concerne l'intuition. Porteur de la structure de l'horizon intuitif, ce robot est, passivement, objet d'organisation pour l'activité axiomatisante et, activement, moyen d'organisation (mentale) face aux réalités du monde qui l'entoure. Une bonne partie de ce qui doit être dit à ce propos l'a déjà été. Mais notre but n'est pas seulement de revenir sur l'analyse des trois aspects pour y apporter une retouche ici, et un complément là; ou pour montrer que les notions nouvellement introduites s'appliquent efficacement à ce qui avait été exposé précédemment. À cet endroit, c'est encore la notion même du schéma qui reste en question. Mieux que nous n'avons pu le faire jusqu'ici, l'occasion s'offre d'insister sur ce que nous appellerons le *rôle constitutif du schéma*. Ces dernières précisions sont d'ailleurs nécessaires. Le complément qu'elles

apportent à l'idée du schéma est essentiel.

Reprenons donc le moyen d'analyse que représente le robot lambertien, doté de sa personne adjointe (la personne mathématicienne) et placé dans un monde de réalités que nous lui savons extérieures. Nous qui l'avons construit, nous n'avons aucune peine à mettre dans un juste rapport la « réalité » du monde extérieur et la structure de la « connaissance » qui se trouve inscrite en lui. Un mot suffit à tout dire, celui de schéma. Dans l'organisation des mécanismes qui en font un robot bien au point, il y a un schéma du monde et des états que notre robot peut y occuper.

Faut-il le démontrer par le menu, en reprenant l'un après l'autre tous les caractères du schéma et faisant voir que nous les retrouvons tous bien réalisés ? Nous ne le ferons pas. La chose est trop claire pour qu'il vaille la peine de s'y arrêter. Mais ce que nous tenons à souligner, c'est la nouvelle intervention de l'idée de schéma. Elle ne règle plus seulement le rapport du robot à l'activité axiomatisante de la personne mathématicienne. Elle est descendue d'un degré vers les réalités du monde extérieur. Le schéma assume maintenant un rôle antérieur au rôle que nous lui avions primitivement accordé, antérieur dans la genèse de la connaissance du monde.

Pour nous qui connaissons à la fois l'existence des réalités extérieures et les lois d'organisation du robot, il ne fait pas de doute que, quant au schéma lambertien, le monde est en situation de *signification extérieure*. Mais le robot n'est là, pour moi, que comme figure simplificatrice et évocatrice d'un autre que moi. Il m'éclaire sur le rôle de l'intuition, quant à cet autre (que je puis encore hésiter à identifier à mon être propre). Sans grand effort, je comprends que, pour tous les autres, l'horizon intuitif n'est qu'un schéma; qu'il ne leur fournit pas une image en tous points fidèle du monde extérieur, mais seulement une représentation symbolique et sommaire.

Tant que le robot n'est que la figure d'un autre — même d'un autre quelconque — il m'est également facile de reconnaître toute la portée de certaines expériences collectives qui redoublent le sens des mots « symbolique et sommaire ».

« Il est vrai, aurait-on pu dire avant ces expériences, que les formes géométriques pures ne trouvent pas de réalisation parfaite dans le monde physique. Mais cela n'est qu'un accident qui tient à l'insuffisance de nos moyens techniques. Il reste permis de penser que les formes géométriques sont des formes limites dont il doit être possible de s'approcher de mieux en mieux. Les techniques sont incapables aujourd'hui de les rejoindre complètement. Il n'est cependant pas illégitime de penser que ces formes puissent être celles de certains corps matériels.

» Si par exemple on donne la définition suivante de la surface. « La limite d'un corps vers l'extérieur est une surface », il n'est pas interdit de se

représenter le corps en question comme occupant une portion de l'espace physique. La géométrie semble proposer un idéal véritable aux formes que la matière peut et doit prendre. Elle se présente comme la forme limite de sa signification extérieure ».

Ce langage ne nous est actuellement plus permis, les expériences des physiciens nous ont enlevé le droit de parler de la localisation parfaitement délimitée d'un corps matériel, de la surface infiniment précise qui le contiendrait, etc. Il nous est clair, désormais, que la façon dont il vient d'être question de lier les formes géométriques à leur réalisation physique équivaut à un ensemble de vues sur la constitution de la matière et sur la nature de l'espace physique.

Il put sembler légitime de ne faire aucune distinction entre l'idée de signification extérieure et celle de réalité tout court. Aujourd'hui cette distinction s'impose. La connaissance instrumentée a fait surgir, à l'intérieur de la connaissance sensible, une réalité métasensible. Elle a ouvert un nouveau monde physique dont le monde physique tel que l'intuition nous en fournit l'image n'est que l'enveloppe : le monde atomique. Ce progrès dégrade la connaissance intuitive. Non pas qu'elle cesse d'être efficace au niveau où elle s'applique. Ce qu'elle perd, c'est un caractère qui ne lui revenait que par usurpation : elle se trouve reléguée du rôle (usurpé) de connaissance immédiate et définitive au rang de connaissance intermédiaire, de connaissance provisoire. Il nous faut renoncer à l'idée que son objet, que l'objet de son intention est une réalité en soi. Il nous faut enfin reconnaître que ce n'est qu'un horizon de réalité.

En un mot : les réalités du monde physique dans lesquelles l'intuition se réalise, qui fournissent à l'intuition le monde de son efficience (le monde de sa signification) ne peuvent plus être conçues comme des réalités tout court, mais seulement comme des apparences de réalité. *Le monde dont l'intuition spatiale nous transmet l'image n'est qu'un horizon de réalité.*

Ce n'est plus seulement d'une marge d'approximation existant entre la notion géométrique ou intuitive et sa réalisation qu'il faut maintenant parler, mais d'une marge d'indétermination.

Ne manquons pas de le répéter : la variation de doctrine qui s'exprime par l'abandon de l'idée de réalité toute simple au profit de l'idée d'horizon de réalité est la conséquence fatale de la variation de la doctrine physique relative aux propriétés de la substance matérielle.

Il est donc erroné de croire que la géométrie puisse imaginer ses rapports avec le monde physique en toute autonomie, sans avoir à tenir compte de l'avancement des connaissances dans les autres disciplines scientifiques. La vision que le physicien se fait de la structure du monde physique domine actuellement la façon dont nous devons nous représenter l'accord de l'intuition

géométrique avec sa signification extérieure. C'est en face de l'expérience du physicien que nous ressentons toute la précarité de l'idée dominante de la synthèse dialectique au niveau de l'information naturelle.

De tout autre que moi il m'est donc clair que la connaissance de la réalité à laquelle on accède par une expérience fine relativise irrémédiablement la structure de la connaissance intuitive : sa nature schématique nous devient doublement évidente. Mais la relativisation ne va plus aussi facilement s'il s'agit de moi-même, si j'identifie mes propres moyens de connaissance à ceux du robot lambertien, et si je m'imagine moi-même enfermé dans ma propre organisation sensorielle et mentale comme la personne mathématicienne l'est dans son robot. Car, nous l'avons déjà noté, au chapitre II, la vision intuitive est la forme même sous laquelle la réalité extérieure se présente à nous, sous laquelle elle se constitue comme « réalité extérieure ». Ce qu'il nous était aisé de reconnaître comme un schéma, chez les autres, prend pour nous caractère de connaissance évidente et inconditionnelle. Et pourtant nous ne pouvons pas nous mettre en dehors de l'expérience commune. Ce qui vaut pour tous les autres, doit aussi être valable pour nous. L'expérience commune vient heurter l'évidence individuelle : c'est celle-ci qui doit céder devant le progrès de tous.

Nous avons ainsi atteint le point sur lequel nous voulons particulièrement insister : un schéma ne se présente pas nécessairement comme image réduite ou simplifiée d'une réalité déjà donnée par elle-même. Au contraire, le schéma peut se présenter comme moyen constitutif essentiel d'un horizon de réalité. C'est lui qui détermine la forme sous laquelle cet horizon se constituera pour nous. Il apparaît alors parfaitement adéquat à sa signification extérieure. Il paraît faire un avec elle. Celle-ci ne s'en détache que lorsqu'on l'envisage comme objet d'une connaissance qui l'épouserait étroitement. Sa signification extérieure n'a pas de forme antérieure et plus précise que celle qu'il lui confère. En un mot, *c'est par lui que l'horizon de réalité se constitue.*

Bien entendu, le schéma ne manifeste pas encore, dans cette fonction active, les caractères que nous lui avons reconnus. Ils ne se révèlent que lors d'un approfondissement ultérieur de la connaissance, lors du passage à une connaissance plus fine qui reconstitue une signification extérieure qui se trouve, elle, visiblement dans le rapport de concordance schématique (et seulement schématique) avec ce qui a désormais clairement pris le caractère d'un schéma.

Si la connaissance intuitive était restée à la frontière de notre connaissance, aurions-nous hésité à en faire le type même d'une connaissance à la fois immédiate et définitive ? N'ayant jamais eu l'occasion de la dépasser, comment aurions-nous eu l'idée de la mettre en cause ? Nous la disons maintenant schématique et provisoire. Mais elle n'est provisoire que pour celui qui la dépasse. Elle n'est schématique que pour l'observateur qui a surpris ses insuffisances. Il n'y a de sens à parler d'un horizon de réalité que dans la

perspective de la connaissance en devenir, dans une perspective de dévoilement progressif de la « réalité ». C'est la perspective de la science moderne. Mais l'esprit qui n'a jamais dépassé la connaissance intuitive n'y participe pas.

Pour le dire une dernière fois, *pour l'horizon de connaissance qui ferme, provisoirement peut-être la perspective, le schéma représente le moyen même par lequel l'horizon de connaissance de sa signification extérieure se trouve précisé, bien plus, grâce auquel il prend sa spécification*. Le schéma est alors tout le contraire d'une imitation simplifiée, tout le contraire d'une création après coup. C'est au contraire lui qui apporte l'élément créateur par excellence, l'élément sans lequel il n'y aurait pas de connaissance puisqu'il n'y aurait pas de forme d'expression de cette connaissance.

L'aspect théorique et l'aspect expérimental donnent lieu à des remarques analogues. Ils sont l'un et l'autre des organisations schématiques des mêmes réalités extérieures que l'aspect intuitif. Pour chacun d'eux, comme pour ce dernier, l'idée de schéma descend d'un degré vers le monde extérieur. Ils ne représentent l'un et l'autre, et chacun à sa façon, que des horizons de réalité en concordance schématique avec l'univers-objet-de-connaissance. Il est vrai que nous avons les mêmes difficultés à le concevoir que tout à l'heure, dans le cas de l'aspect intuitif. Ces deux organisations schématiques sont elles aussi *constitutives* (au sens que nous venons d'expliquer) de deux formes de réalité, l'une idéale, l'autre concrète. C'est encore une fois dans l'expérience qui nous révèle, sous les traits de ces deux apparences, une « nouvelle réalité » d'une structure imprévue, que leur caractère schématique nous devient nettement visible.

En résumé, nous venons de constater que l'idée de schéma nous permet de décrire commodément les doubles rapports des trois aspects de la géométrie, d'une part à leur schéma axiomatique commun, d'autre part à leur signification extérieure commune. Vers le schéma axiomatique, l'installation du schéma signifie la création d'un horizon de réalité simplificateur, vers la réalité extérieure, les trois aspects sont constitutifs d'autant d'horizons de réalité.

Les résultats précédents ont une valeur qui dépasse le cadre de la géométrie. Ils concernent l'ensemble de la connaissance, nous voulons dire l'état dans lequel toute connaissance se présente à nous, à un instant déterminé : rien ne nous autorise à penser que notre connaissance, même à ses dernières frontières, soit davantage qu'un horizon de connaissance; que les dernières « réalités » que nous ayons conçues, soient davantage qu'un horizon de réalité.

Le modèle et l'analogie

Comment les mots prennent-ils leurs significations ? Comment les façons justes de parler s'installent-elles ? En particulier, comment un emploi correct des mots « concret » et « abstrait » peut-il être suggéré ?

Au cours des premiers chapitres, nous avons montré que ces vocables ont indéniablement des significations opposées, mais que le caractère de cette opposition n'est pas rendu avec exactitude par la conception traditionnelle qui met un abstrait préexistant (comme une essence) en face d'un concret prédéterminé (comme une réalité toute faite). Pour accompagner efficacement la pensée scientifique dans son évolution, cette opposition doit se faire plus souple, plus circonstanciée. Elle doit se dialectiser sous la pression de l'expérience en cours.

Tout ce qui précède, dans ce quatrième chapitre, peut être envisagé comme un essai de préciser les rapports à établir entre l'abstrait et le concret, de façon que ces rapports conviennent à l'horizon de connaissance qui s'est dégagé de notre longue discussion. Ce que nous avons fait et ce que nous continuons à faire peut se résumer en ces mots :

Installer une dialectique idoine du concret et de l'abstrait. La notion de schéma est une clef de cette dialectique. Ce n'est pas la seule. C'est tout un langage que nous établissons en le pratiquant. Nous voulons y faire entrer maintenant la notion de *modèle*.

LE MODÈLE

117. PREMIER EXEMPLE : LE MODÈLE ET LE CONCRET.

Un exemple, simple à souhait, va se prêter aux premières explications.

Voici la matière sur laquelle notre attention doit se porter : Nous supposons disposer de $2n$ éléments (n désignant un nombre entier quelconque) dont la nature nous soit inconnue, et reste indéterminée, exception faite de la propriété suivante qui doit être valable pour tous les éléments : entre deux quelconques de ceux-ci, il peut (mais il ne doit pas nécessairement) exister une certaine relation bien précise, mais dont la nature doit elle-même rester sans aucune importance.

On le voit, la matière ainsi mise à notre disposition est de nature assez analogue à celle des « réalités » de l'horizon axiomatique dont il a tant été question plus haut.

Deux éléments A et B seront dits voisins (l'un de l'autre) s'ils sont entre eux dans la relation dont nous venons de parler. De notre propre chef, nous posons maintenant les deux exigences suivantes que nous formulerons comme deux axiomes à satisfaire :

Axiome 1. Chaque élément possède exactement deux voisins.

Axiome 2. Tous les éléments sont ordonnés en une seule chaîne.

Il est vrai que nous n'avons pas encore défini ce que doit être la chaîne d'éléments dont parle le deuxième axiome. Mais on l'imagine facilement et la suite ne laissera pas de doute sur ce point. Une remarque encore : Nous avons spécifié que la nature des éléments ne doit jouer aucun rôle, réserve faite de la propriété explicitement indiquée. Nous aurions pu tout aussi bien dire, avec la même réserve, qu'ils sont de nature quelconque et ajouter qu'il doit en être de même de la liaison qu'il faut imaginer entre eux.

Et maintenant, posons-nous, à propos de ces deux axiomes, les deux questions que voici :

Nous avons énoncé ces axiomes librement : est-il certain qu'il existe des groupes d'éléments pour les satisfaire ?

Et si tel est le cas, ne pourrait-il arriver que le second axiome ne fût qu'une conséquence du premier ?

Avons-nous, pour répondre à ces deux questions, une méthode d'une certaine généralité qui ne convienne pas uniquement à notre cas, mais qui s'applique, en principe, à toutes les questions de ce genre ?

Voici ce que, dans notre cas, nous pourrions imaginer :

Cinq garçons et cinq fillettes jouent sur un pré. Les voici qui forment une ronde, chaque garçon donnant la main à deux fillettes et chaque fillette à deux garçons. En cet instant, leur groupe dessine un cercle bien régulier.

C'est le moment de distinguer, dans le spectacle qu'ils nous offrent, un *modèle* où les deux axiomes précédents se trouvent réalisés. Choisissons $n = 5$, et envisageons le groupe des dix enfants que nous avons sous les yeux comme une figuration réelle de l'un des groupes d'éléments auxquels nos axiomes pourraient s'appliquer. Convenons ensuite de réaliser la relation dont la nature restait imprécisée par la liaison réelle de se donner la main. La ronde réalise alors la chaîne fermée que le deuxième axiome postule.

Si l'on formule arbitrairement ou au hasard un certain nombre d'axiomes à satisfaire, il n'est pas sûr qu'ils puissent l'être. Il pourrait arriver que l'ensemble des exigences qu'ils formulent soit contradictoire. Si nous avions pensé que tel serait peut-être le cas pour nos deux axiomes, l'existence du modèle que nous venons d'apercevoir ne nous laisse aucun doute : il ne tient qu'à nous de faire abstraction de la nature particulière des « éléments » et de la « relation » dont nous avons pris connaissance et de constituer, à l'exemple de l'axiomatisation schématisante, un schéma sans propriétés superflues.

Mais voici, quant à notre modèle, une péripétie pleine d'intérêt : la chaîne s'est défaite, les fillettes ont fait un pas vers l'intérieur du cercle, les mains se sont alors renouées et c'est maintenant deux chaînes que nous avons sous les yeux, celle des garçons entourant celle des fillettes.

Nous nous demandions, il y a un instant, si le second axiome pouvait être une simple conséquence du premier. La réponse est claire, elle est négative. Dans le modèle modifié, nous apercevons une propriété inconciliable avec le second axiome, tandis que le premier reste valable. Le second n'est donc pas conséquence du premier...

Mais voici que la grande ronde s'est reformée. Les deux chaînes se sont réunies en une seule où garçons et fillettes alternent à nouveau régulièrement.

De notre côté, est-ce à nouveau le premier modèle que le tableau nous suggère ? Chose remarquable, le second modèle persiste dans le premier. Nommons voisins deux garçons qui donnent la main à la même fillette et voisines deux fillettes qui donnent la main au même garçon, la grande ronde se scinde alors pour nous en deux chaînes indépendantes l'une de l'autre : C'est le second modèle qui reparaît.

La même réalité peut ainsi témoigner en faveur de deux axiomes contradictoires.

Nous aurons plus tard à nous référer à l'exemple qui précède.

Chacune des péripéties que nous avons notées aura son importance. Mais pour l'instant, il n'y faut voir qu'un premier essai d'élever l'idée de modèle au rang d'instrument mental efficace.

De ce qui vient d'être expliqué, une première acception se dégage nettement : fournir ou construire un modèle est une opération assez strictement inverse de celle de concevoir ou d'établir un schéma. La fonction du modèle est d'apporter à un schéma une illustration que ce dernier ne comporte pas d'avance, une signification extérieure qui en soutienne la conception.

Voulons-nous dire que l'on part d'un schéma déjà formé, déjà revêtu de son existence autonome dans son horizon propre de réalité ? Et qu'il s'agit uniquement de découvrir une signification extérieure qu'il n'admettait pas encore ? Bien entendu, ce cas n'est pas exclu, de même que n'était pas exclu, dans la constitution d'un schéma, le cas où celui-ci se dégageait simplement d'une signification extérieure déjà bien constituée dans son horizon de réalité. Dans ce cas, l'idée de modèle ne va pas plus loin que celle d'une signification extérieure supplémentaire.

Mais l'idée de modèle peut garder son efficacité sans que les choses se présentent aussi simplement. La production d'un modèle peut fort bien être l'un des moyens dont s'accompagne et se sert l'édification d'un schéma, reprenant en sens inverse le rôle du schéma que nous avons nommé constitutif. Quant à. notre exemple, il n'est extrême ni dans un sens ni dans l'autre.

Le rapport entre l'horizon de réalité d'un modèle (au sens que nous venons de suggérer) et celui des « réalités » qu'il illustre n'est donc rien de plus ni de moins qu'une concordance schématique.

À ce propos, il y a un point, dans notre exemple, qui demande à être bien mis en lumière, parce qu'il a une importance de principe. Après avoir posé nos deux axiomes, nous nous étions demandé si le second ne pourrait être une conséquence du premier. Mais de quels moyens dispose-t-on pour répondre à une telle question, ajoutions-nous. Ces moyens existent : c'est la méthode dite « des modèles ». Tout simple qu'il soit, notre exemple permet de s'en faire une représentation tout à fait nette :

Comment montrer que l'énoncé B n'est pas une conséquence d'un énoncé A (ou d'un groupe d'énoncés) ?

En produisant un modèle dans lequel A soit réalisé en même temps qu'un énoncé incompatible avec B. Cette méthode est d'un usage assez courant en axiomatique. Il saute aux yeux qu'elle n'est pas de la même nature que les règles de la logique déductive. Contrairement à la tendance logique habituelle, c'est par un retour au concret qu'elle apporte la décision.

Sur ce point, l'interdépendance méthodologique de l'abstrait et du concret est manifeste. La méthode des modèles sort *donc* clairement de la tradition rationnelle. Sa seule justification est l'existence des concordances schématiques dont nous relevons le jeu à toutes les articulations de notre connaissance spatiale. Dans une perspective « purement rationnelle », cette méthode est un corps étranger. Elle prend tout naturellement sa place dans notre perspective dialectique.

Chaque fois qu'un schéma est intervenu dans nos considérations, un modèle aurait pu nous rendre des services corrélatifs. Mais nous ne poursuivrons pas cette idée. Tout au plus remarquerons-nous (ce qui n'étonnera personne) que la géométrie expérimentale peut être envisagée comme un modèle de la géométrie théorique, l'une et l'autre étant prises au stade préaxiomatique.

Ce qui caractérise le modèle tel que nous l'avons envisagé jusqu'ici, c'est un net retour vers un horizon de réalité extérieur ou antérieur, une volonté de réintégration dans le plus concret, un souci d'illustration au sens le plus habituel de ce dernier mot. Mais cette tendance peut s'affaiblir, et de diverses façons, sans que l'idée de modèle perde sa valeur et le modèle lui-même sa fonction. Le retour au concret peut faire place à un simple retour à du plus commun, à du plus aisément maniable, ou même seulement à du déjà connu. C'est en particulier dans ce dernier sens que l'on parlera plus tard d'un modèle euclidien du non-euclidien.

118. DEUXIÈME EXEMPLE : LE MODÈLE ET LE FORMEL. Nous avons voulu souligner, dans notre premier exemple de modèle, l'intention de s'appuyer sur une illustration concrète des circonstances à étudier. Dans cet exemple, le modèle prend ses éléments dans le monde des réalités les plus simples. C'est d'ailleurs pourquoi nous aurions pu l'appeler un *modèle par réalisation*. Mais l'idée de modèle ne comporte pas nécessairement, nous l'avons déjà dit, une chute aussi marquée d'un schématisé vers un réalisé. Dans l'exemple suivant, nous nous proposons de faire ressortir l'aspect conventionnel que la « réalité » du modèle peut parfois revêtir.

Il s'agira de la représentation de la suite des nombres entiers, par leurs signes numériques dans la numération décimale :

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,.. 100, 101, 102,...

Ces signes nous sont si familiers que nous oublions facilement jusqu'à quel point ils sont conventionnels. Aussi n'est-il peut-être pas complètement superflu de rappeler pour commencer qu'il reste, dans le langage et dans certains usages, des traces de l'emploi plus ou moins systématique d'autres systèmes de numération, et que le système dual peut prendre dans certaines conditions une signification privilégiée.

On pourrait même se servir (et la proposition en a été faite dans certaines recherches sur les fondements de l'arithmétique) de représentations très primitives, comme celle dont voici les premiers termes :

I, II, III, IIII, IIIII,.....

Notre intention est d'examiner spécialement le modèle de la suite des nombres que fournit la numération décimale. Mais le système précédent, dans lequel chaque nombre se trouve représenté par un groupe convenable de traits verticaux, mérite qu'on s'y arrête un instant.

Remarquons tout d'abord que, dans cette représentation, le signe d'un nombre est un modèle par réalisation, au sens même qui vient d'être précisé. Il est naturellement facile d'imaginer un maniement de ces signes par lequel les opérations élémentaires de l'arithmétique se trouveraient réalisées.

L'égalité de deux nombres, par exemple, pourrait être constatée par le procédé d'identification suivant qui ne fait intervenir que la pratique « de l'un contre un ». Les deux groupes de traits représentant les deux nombres à comparer étant proposés, on commencerait par barrer d'un trait horizontal le premier trait vertical de chacun des deux groupes. On en ferait ensuite de même pour le trait suivant, et ainsi de suite. Si ce procédé n'aboutit pas à constater l'égalité des deux nombres, il décide naturellement lequel est le plus grand.

L'addition des deux nombres se réaliserait par la mise bout à bout des signes correspondants. Et l'on distingue facilement par quelles pratiques élémentaires du même genre les autres opérations arithmétiques pourraient être effectuées.

L'ensemble de ces signes et de ces pratiques est un modèle de l'arithmétique élémentaire.

Est-ce strictement un modèle par réalisation ?

Remarquons que les pratiques par lesquelles les opérations arithmétiques se trouvent traduites pourraient être codifiées en règles autonomes et ne contenant plus aucune allusion à leur origine et à leur signification arithmétique. Ce seraient alors de pures règles de jeu. Elles revêtiraient un caractère conventionnel évident.

Ce modèle réalise assez purement l'intention formalisatrice qui est de remplacer un certain ensemble de démarches abstraites (ou insuffisamment dominées) par un ensemble bien codifié de pratiques sur des symboles.

Revenons maintenant au système de numération décimal. Non pas qu'il apporte, quant à l'idée du modèle formalisateur, quelque chose de fondamentalement nouveau. Mais il permet de mieux faire ressortir la part de convention qui entre dans la facture du modèle.

Les neuf premiers chiffres sont des symboles arbitraires, des figures entièrement conventionnelles. Il en est de même du zéro. L'écriture des autres chiffres à l'aide uniquement des neuf premiers et du zéro n'est pas totalement conventionnelle, elle incorpore une véritable invention mathématique. Le procédé selon lequel les nombres peuvent être écrits successivement, d'après ce système de numération, peut être cependant expliqué comme un jeu sans signification arithmétique prédéterminée. Nous avons ainsi dans la suite des signes numériques (1) un modèle de la suite des nombres entiers dans lequel le caractère conventionnel est beaucoup plus apparent que dans le modèle de tout à l'heure.

Nous n'allons pas rappeler ici comment les opérations arithmétiques élémentaires s'effectuent (toujours en numération décimale). Tout le monde le sait. Insistons cependant encore une fois sur le fait que toutes ces opérations peuvent être décrites, elles aussi, comme un jeu à pratiquer sur les signes numériques, comme un jeu qui ne réclame aucune connaissance arithmétique spéciale, même du degré le plus élémentaire, une fois données les tables d'addition et de multiplication des chiffres de base.

C'est d'ailleurs ainsi que les opérations arithmétiques sont enseignées aux enfants. À l'âge où l'esprit de l'enfant est mûr pour un enseignement de ce genre, il ne l'est pas encore pour une justification explicative. Ce seul fait jette un jour très vif sur la fonction du modèle.

Ce sont les mêmes raisons qui font de tout système numérique semblable à ceux que nous venons d'indiquer un *modèle formalisateur* de la suite dès entiers.

Ces quelques remarques doivent faire comprendre que le problème de la formalisation est étroitement lié aux idées de schéma et de modèle. Mais ce n'est ici ni l'endroit ni le moment de nous engager davantage dans cette voie.

Nous nous contenterons aussi de mentionner le modèle algébrique de la géométrie que réalise la géométrie analytique.

119. TROISIÈME EXEMPLE : LE MODÈLE PAR TRANSCRIPTION. Dans l'exemple suivant, nous allons voir s'affaiblir jusqu'à disparaître l'intention d'aller chercher appui dans du « plus concret », dans du « mieux en main », ou dans du « mieux connu », intention que nous avons présentée comme caractéristique. Nous la retrouverons cependant après coup.

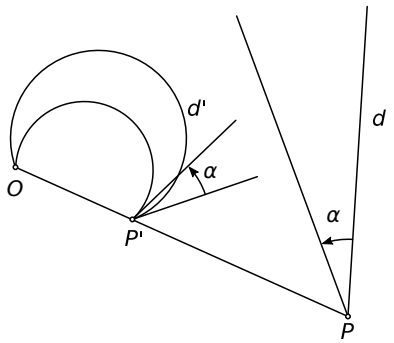


FIG. 71

Il s'agit de la transcription bien connue de la géométrie élémentaire qu'on obtient en faisant subir une transformation par inversion aux éléments et aux figures de la géométrie plane.

Soit O le centre d'inversion. On sait que cette transformation fait correspondre à tout point P un point P′ situé sur le rayon OP et tel que le produit des rayons vecteurs OP·OP′ soit égal au carré du rayon du cercle d'inversion.

Une droite quelconque d se transforme en un cercle d' passant par le centre d'inversion et réciproquement.

À deux droites parallèles correspondent deux cercles tangents en O, et n'ayant par conséquent aucun autre point d'intersection. Leur tangente commune en O est d'ailleurs parallèle aux deux droites en question.

Deux droites se coupant en un point P sont transformées en deux cercles passant par O et se coupant en un second point P′. La transformation par inversion est conforme, cela veut dire que l'angle des deux droites concourantes se retrouve égal à lui-même dans l'angle des deux cercles correspondants. Le sens de rotation n'est, il est vrai, pas conservé, mais renversé.

Soit enfin p la distance entre O deux points A et B. La transformation place les points correspondants A′ et B′ sur un cercle passant par le centre d'inversion O. Dans la figure transformée, la distance p peut être, elle aussi, retrouvée. Exprimée à l'aide des éléments de la seconde figure, elle vaut

$$AB = \operatorname{cotg}\frac{\overset{\frown}{B'O}}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\overset{\frown}{A'O}}{2}$$

L'un après l'autre, tous les éléments de la géométrie plane pourraient être ainsi transformés. Pour ce que nous avons en vue, ce qui vient d'être indiqué suffira.

Voici maintenant le procédé par lequel on peut faire de la seconde figure, de la figure transformée, un modèle de la figure originale : une droite *d*, avons-nous dit, se transforme en un cercle *d′*. Convenons de remplacer partout où elle se présentera la dénomination « cercle passant par O », par la dénomination « droite » de l'élément qui lui a donné naissance. Appelons « angle » de deux de ces « droites », l'angle que forme, pour un œil ordinaire, l'angle des cercles correspondants. Convenons en outre de dire que nous tournons à droite (encore une fois dans la figure transformée) chaque fois que nous tournerons à gauche, et appelons systématiquement « distance » des points A′ et B′, l'expression dont nous venons de préciser qu'elle est égale à la distance des points A et B, etc...

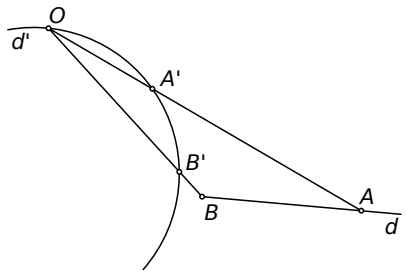


FIG. 72

Le procédé, on le voit, est extrêmement simple. Il a même l'air de n'être qu'un jeu sans valeur et sans portée. Il consiste à transférer de l'élément primitif à l'élément transformé la dénomination habituellement attribuée au premier.

En même temps qu'un procédé de transcription des dénominations, nous engendrons aussi un procédé de traduction systématique des énoncés géométriques.

Ainsi, l'énoncé suivant :

Par un point, il ne passe qu'un cercle touchant un autre cercle donné en un point donné O

correspond évidemment, une fois la substitution des dénominations effectuée, et si O est le centre d'inversion, à l'axiome des parallèles.

Enfin, en même temps qu'une traduction des énoncés géométriques, nous opérons une projection de la structure déductive de la géométrie dans le plan originel sur l'ensemble des énoncés correspondants.

Résumant tout le procédé en un seul mot, on dit qu'on a construit avec les éléments de la géométrie euclidienne un modèle de cette géométrie.

Il est clair que dans cette conception du modèle, l'intention que nous avions présentée comme caractéristique se trouve affaiblie de façon décisive : nous ne réalisons pas un modèle de la géométrie euclidienne par du « plus concret », puisque le modèle est lui-même construit avec des éléments pris dans la géométrie euclidienne, puisqu'il est lui-même un *modèle euclidien* de la géométrie euclidienne; nous ne réalisons pas non plus un modèle plus maniable, car la nouvelle signification de la distance, pour ne citer que cet exemple, est loin d'être plus commode que la notion ordinaire de distance; nous ne réalisons pas davantage notre modèle par du mieux connu, car l'aspect que prend dans notre modèle la structure logique des théorèmes ne nous était guère donné d'avance, avant d'avoir été manifesté par notre procédé systématique de traduction. Il semble donc que le modèle présenté dans ce dernier exemple prenne assez exactement le contrepied de ce que nous avions tout d'abord expliqué.

Et pourtant, ce dernier exemple vient reprendre assez naturellement sa place à côté des précédents si l'on ne se borne pas à mettre l'original et la transcription en présence l'un de l'autre. En nommant du même nom l'élément primitif et l'élément transformé, on provoque tout naturellement un effort d'abstraction qui, pour identifier les deux éléments, les dépouille l'un et l'autre d'une partie de leur signification habituelle. Cet effort et son aboutissement nous sont maintenant familiers. Ce sont précisément eux que nous avons étudiés et décrits en montrant comment l'axiomatisation schématisante fait passer de l'horizon intuitif à l'horizon axiomatique, en vidant les notions géométriques élémentaires d'une bonne part de leur substance intuitive. La mise en parallèle de la géométrie euclidienne et de sa traduction a pour effet de profiler derrière les deux à la fois le schéma de leur structure commune. Par rapport à ce dernier, aussi bien l'original que la traduction et la traduction tout autant que l'original se trouvent jouer le rôle de modèle au sens que nous avions indiqué précédemment.

Il n'est donc pas illégitime de conserver le mot de modèle pour désigner, dans cette configuration triangulaire, celui des systèmes déductifs qui a servi de réactif pour précipiter la constitution du schéma.

L'ANALOGIE

L'analyse de l'idée d'analogie est-elle ici bien à sa place ? Est-elle bien nécessaire à la discussion du problème qui nous occupe ? S'il était possible de s'en passer, n'y aurait-il pas avantage à le faire ?

120. RETOUR SUR LE PROBLÈME FONDAMENTAL. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler le but que ce chapitre IV s'est assigné. Ce but est double; comme est double la signification de toute notre étude. Celle-ci a pour premier objet de montrer que la géométrie, simplement et objectivement envisagée dans son intégrité, s'établit en discipline dialectique.

Mais notre but principal se place encore plus loin. La géométrie n'est qu'un exemple (privilégié, il est vrai). À travers le témoignage qu'elle doit nous apporter, c'est une théorie de la connaissance que nous visons, une théorie adéquate à la pratique des disciplines scientifiques.

Ce chapitre se situe donc à la fois par rapport à notre premier but et par rapport à notre but essentiel. Il représente tout d'abord un instant décisif de la constitution de la géométrie en une discipline dialectique. On s'en souvient : la synthèse organique des trois aspects avait pu s'effectuer une première fois sous l'idée dominante d'une certaine équivalence (de vérité) de ces trois aspects. Au niveau de l'information naturelle, cette idée dominante s'impose avec la force d'une évidence. Elle ne résiste cependant pas à une information plus fine et plus profonde. Il ne peut être question de la conserver intacte, mais jusqu'à quel point pourrait-elle être sauvegardée ? L'échec (tout au moins relatif) de la première idée dominante remettait toute la synthèse géométrique en question.

La synthèse devait être refaite, la chose ne pouvait souffrir aucun doute. Mais quel devait en être le nouveau principe ? Où trouver la nouvelle idée dominante capable d'informer à nouveau la collaboration réciproque des trois aspects ? Ce qui aggravait la situation, c'est qu'un démenti formel avait atteint, à travers l'idée dominante, les vues, la doctrine préalable, qui l'informaient. L'hypothèse de l'équivalence (de vérité) des trois aspects était conforme à un certain alliage d'un réalisme et d'un rationalisme assez sommaires tous les deux, dont la pensée scientifique s'est longtemps servie avec succès. Ce réalisme et ce rationalisme ont été mis l'un et l'autre en défaut, avec toutes leurs prétentions à une validité inconditionnelle et dans toutes leurs notions fondamentales.

En un mot, ce que l'échec de la première tentative de dialectisation a le plus nettement révélé, c'est, à un certain niveau de connaissance, l'insuffisance et l'inefficacité des notions traditionnelles en face du problème de la liaison des trois aspects.

Fallait-il abandonner ce problème, laisser les trois aspects se disjoindre dans et par une connaissance plus fine et plus précise ? Nous l'avons déjà dit, il ne pouvait en être question. La première tâche qui s'imposait était, au contraire, de découvrir ou d'inventer une nouvelle idée dominante, de promouvoir une nouvelle doctrine préalable idoine à l'état de notre information. Il fallait se laisser orienter et informer par l'expérience géométrique elle-même, et dégager une doctrine qui satisfasse *au moins* aux deux exigences suivantes :

elle doit rendre une certaine valeur et une certaine validité à la première idée dominante et à la première synthèse dialectique que celle-ci inspirait,

elle doit permettre de franchir une nouvelle étape dans l'analyse du problème de l'espace et nous fournir le principe d'une nouvelle synthèse dialectique.

C'est à cette tâche que le chapitre III devait nous préparer par la connaissance précise de la méthode axiomatique, et que le chapitre IV devait être spécialement consacré. Celui-ci devait dégager et proposer les notions de base capables de renouveler la doctrine préalable : ces notions-clé sont précisément celles de schéma et de modèle.

Qu'on veuille bien le remarquer : Le sens de ces dernières notions ne leur vient pas d'avoir été intégrées d'avance dans tel ou tel système, d'avoir déjà leur place et leur fonction dans un réalisme préalable, par exemple — ou d'avoir été accordées d'avance avec telle ou telle variété de rationalisme ou d'idéalisme. Elles ont pris leur signification dans la pratique même et dans le progrès de la connaissance géométrique. Elles n'ont pas été proposées au nom d'une expérience d'une autre essence (au nom d'une intuition métaphysique, par exemple) qui envelopperait et prédéterminerait l'expérience et la réflexion scientifiques. Elles ne sont pas soutenues par un système qui leur serait antérieur.

Telles qu'elles ont été proposées, ce sont elles, au contraire, qui soutiennent et inaugurent un nouveau point de vue, une nouvelle doctrine de la connaissance : la théorie de la connaissance dialectique, de la connaissance en évolution et en progrès (c'est, bien entendu, la théorie que nous dégageons tout au long de cet ouvrage). Les moyens sont à pied d'œuvre, la preuve qu'ils conviennent sera faite en les appliquant, par les résultats de leur application. La synthétisation dialectique est prête à être reprise.

Mais la portée des notions ainsi introduites dépasse la reconstitution de l'intégrité géométrique. Elles nous ouvrent précisément la compréhension des principes de la théorie *générale* de la connaissance qui est le principal de nos buts. Dans ce chapitre, notre regard est resté constamment fixé sur ce but. C'est au nom des vues plus générales que nous aurons gagnées que nous reviendrons au problème (tel que nous l'avons laissé à la fin du chapitre précédent) de l'accord des trois aspects de la connaissance spatiale. L'idée dominante (de la synthèse à refaire) que nous proposerons à ce moment-là ne sera qu'une transcription, dans la perspective géométrique, de l'idée inspiratrice de la théorie générale. Mais jusque-là, celle-ci restera au premier plan de nos préoccupations. Or l'idée d'analogie en est aussi l'une des idées maîtresses. Il nous importe de faire voir jusqu'à quel point elle est liée à celle de la correspondance schématique. Elle représente l'un des nœuds de la liaison (sur laquelle notre attention doit encore se porter) de l'expérimental et du théorique. Même s'il était possible de s'en passer pour ce qui concerne le côté géométrique de notre étude, il nous faut l'amener à son tour au premier plan de la discussion.

121. Définition et portée de l'analogie entre deux secteurs de réalité.

Revenons au dernier des exemples qui ont illustré l'idée de modèle. Il s'agissait, on s'en souvient, d'une simple traduction de l'édifice euclidien par l'intermédiaire de l'inversion. Le modèle et l'original étaient faits de la même substance, l'un n'était ni plus ni moins réel que l'autre. Ce fait était d'ailleurs en désaccord

avec l'idée du modèle telle que nous l'avions présentée jusque-là. La propriété caractéristique du modèle qui devait être de proposer un appui à une construction mentale semblait lui faire défaut. Jusqu'à un certain point, ce caractère lui fut cependant rendu en profilant derrière le modèle et l'original à la fois leur structure axiomatique commune.

Il est clair que l'idée de modèle ainsi réintroduite ne rend pas compte de façon satisfaisante des rapports de l'original et de sa traduction. Dans le cas particulier, et dans le cas du modèle de la géométrie non-euclidienne dont nous nous servirons au chapitre prochain, c'est bien sur la structure logique du modèle qu'on veut mettre l'accent. Aussi la dénomination de modèle se justifie-t-elle. Mais elle ne se justifierait plus, s'il s'agissait uniquement de décrire la correspondance existant entre l'original et sa transcription. Il serait certainement plus juste de dire qu'il existe, entre ces derniers, une analogie parfaite.

Cet exemple pourrait naturellement nous suggérer une certaine conception de l'analogie (de l'analogie *complète*) entre deux « réalités ». Il suffirait qu'à tout rapport aperçu entre deux ou plusieurs éléments de l'une, on pût faire correspondre un rapport existant entre les parties correspondantes de l'autre. La correspondance ainsi introduite serait génératrice de l'analogie. Une définition de ce genre est toute naturelle dans une théorie réaliste de la connaissance, et plus généralement dans toute théorie imaginant que la réalité ou ses aspects se décomposent selon des structures préexistantes et déterminées une fois pour toutes. Un point de vue de ce genre est cependant trop étroit pour rendre compte de l'expérience que notre étude nous a déjà fait faire, et qui est d'ailleurs encore en plein développement.

Dans la perspective de la connaissance en état de progrès (et peut-être en état de révision jusque dans sa structure), il n'est pas légitime d'admettre que la réalité à connaître porte en soi une structure achevée, structure que la connaissance aurait simplement pour tâche de porter à la conscience. Dans ces conditions, la conception de deux réalités analogues est-elle encore possible ? Elle l'est encore. L'idée d'analogie peut être facilement précisée, nous en avons maintenant tous les moyens.

Soient donc A et B les deux « réalités » à comparer entre elles. On peut les dire analogues si ce sont deux modèles (au sens strict) d'un même schéma C, ou, en d'autres termes, si elles sont toutes deux en correspondance schématique avec un même secteur de réalité. (On ne se méprendra pas sur la signification de l'expression « secteur de réalité »; elle désigne tout ou partie d'un horizon de réalité.)

Cette définition est toute naturelle, elle se borne à tirer parti des notions déjà introduites. Peut-être va-t-elle cependant susciter l'objection suivante :

Selon la définition proposée, l'analogie est une relation à trois termes. Mais c'est une relation à deux termes, dans la conception qu'on s'en fait habituellement. Elle s'établit directement entre les deux réalités analogues. Le troisième terme n'est-il pas superflu ? S'il l'est, la définition est boiteuse.

Cette objection est facile à désarmer. Il est tout à fait clair qu'au moment où l'on se propose de constater ou d'établir une analogie entre les deux domaines A et B, nulle mention n'est encore faite du troisième terme. Que le troisième terme ne soit pas donné en même temps que les deux autres, la chose est indéniable. Mais il suffit de se rappeler les observations auxquelles le dernier exemple de modèle du paragraphe précédent a donné lieu. Là aussi, deux termes seulement nous étaient donnés au départ : le plan euclidien et sa transcription. Mais par le fait même de la transcription et de l'identification qu'elle opère, on amorce un processus d'abstraction qui dégage la même structure schématique de l'un et de l'autre des domaines en confrontation. Dans cet exemple, la correspondance entre les deux domaines était, il est vrai, trop étroite, trop achevée, pour servir de base à une conception générale de l'analogie. Mais quant au reste, les observations que nous avons faites à ce moment-là. peuvent être reprises ici sans modification.

En d'autres mots, c'est le fait même de dégager et de constituer la correspondance analogique qui donne naissance au troisième terme. Conçue comme une relation à deux termes, l'analogie se réalise comme une relation à trois termes.

L'analogie est donc facile à définir. Il est plus difficile de la mettre bien à sa place, de lui attribuer toute son importance dans l'édification de nos connaissances. Au sens où nous la comprenons ici, elle n'institue pas entre les domaines analogues une correspondance qui puisse être étendue de proche en proche à tout ce qui fait la réalité de l'un et de l'autre. Bien entendu, dans tout ce qui précède, le mot de « réalité » doit être pris avec le sens qui lui convient. Les domaines A et B dont il a été question ne sont que des secteurs de réalité et rien n'autorise à penser que l'analogie qui s'établit entre eux dépasse les horizons de réalité auxquels ils appartiennent. En d'autres termes, s'il devait arriver que les horizons primitifs s'estompent, du fait d'une meilleure connaissance, pour faire place à des horizons plus finement structurés, notre définition n'exige pas que l'analogie se transmette nécessairement à ces nouveaux horizons. L'analogie s'établit entre des horizons de réalité et non entre des « réalités en soi ». Cette limitation va de soi, mais elle n'est pas encore assez étroite. Il n'est pas même sûr que l'analogie s'étende à tout ce qui fait légitimement partie des secteurs de réalité A et B. L'analogie telle qu'elle se trouve proposée ici ne saisit de droit, dans A et B, que ce qui jouera le rôle de signification extérieure du troisième terme, du schéma C.

« Fort bien, dira-t-on, telle est la propriété essentielle de l'analogie une fois cette notion reprise dans le climat de la connaissance schématique. Mais quel en est l'intérêt ? Cette notion n'est telle que parce que vous l'avez ainsi définie.

Vous avez mis vous-même une certaine insistance à la relever. La définition que vous nous en avez donnée n'est-elle pas arbitraire ? Ne l'avez-vous pas librement choisie ? »

Est-il vrai que cette définition ait été librement choisie ? Nous ne le pensons pas. La situation ne peut pas être résumée de façon aussi brève, si l'on tient à le faire équitablement. Un choix ne peut être dit ni libre ni arbitraire s'il tient compte (ou cherche à tenir compte) de tout un ensemble d'expériences et d'exigences... Mais là n'est pas le fond de la question. Le jugement à porter sur la notion *telle qu'elle a été définie* n'est pas un jugement de droit, mais un jugement de fait. En un mot, cette notion convient-elle ou ne convient-elle pas ? Est-elle efficace ou ne l'est-elle pas ? Rend-elle compte ou non des correspondances qu'on a désignées jusqu'ici comme étant des analogies ?

La question ne peut et ne doit être tranchée que par l'expérience. Oui ou non, l'analogie s'établit-elle entre des secteurs de réalité et non entre des réalités en soi ? Si la réponse est oui, elle est au fond l'équivalent d'une loi naturelle. Elle ne statue pas que nous avons pris arbitrairement la décision de considérer la réalité sous cet angle. Elle exprime que telle est aussi la façon dont la réalité — ce que nous continuons à nommer réalité — se dévoile à nous.

Or c'est bien en faveur d'un oui que le développement de la connaissance scientifique moderne (et toute l'expérience que nous faisons ici) semble témoigner. Nous aurons d'ailleurs à y revenir bientôt.

La synthèse dialectique au niveau axiomatique

122. REPRISE DU PROBLÈME DE LA DIALECTISATION. Les matériaux sont à pied d'œuvre, le problème de la dialectisation peut être repris. Rappelons en quelques mots comment celui-ci se présente.

Nous exposions au chapitre II les exigences et les conditions de la synthèse des trois aspects au niveau de l'information naturelle. « Le moment est venu, disions-nous, de faire avancer au premier plan l'alternative suivante qui domine cette question : chacun des trois aspects est-il spécifiable jusqu'à l'autonomie, ou bien ne se présente-t-il jamais à l'état pur, appuyé qu'il est sur les deux autres ?

» Ces deux éventualités comportent des conséquences très divergentes. Dans le premier cas, il devrait exister trois modes différents et indépendants de faire de la géométrie. Pour traiter le problème qui nous occupe, il suffirait alors de dégager ceux-ci, de manière à conférer à chacun d'eux sa propre et entière spécificité. Dans le second cas, la question ne s'éclaircirait pas aussi simplement; le problème des rapports entre les trois aspects aurait une tout autre portée et ce serait devant lui que nous nous trouverions maintenant placés.

» Au niveau de l'information naturelle, où le problème se posait à ce moment-là, l'alternative devait être tranchée en faveur de la seconde éventualité.

» Tous les faits que nous pouvons invoquer à ce point de notre étude parlent contre l'espoir de conférer une existence autonome à chacun des trois aspects.

» Qu'on se rappelle le procédé décrit pour fabriquer les surfaces planes. Ce procédé ne s'expliquerait pas si l'on ne savait d'ailleurs — c'est-à-dire intuitivement — qu'une surface ne peut être à la fois concave et convexe...

» Certes on pourrait se donner l'air d'avoir oublié l'information intuitive et la négliger par la suite. Mais qu'y gagnerait-on ? Le plus simple est de reconnaître qu'il est difficile (et probablement impossible) de tracer une ligne de démarcation bien nette entre l'intuitif et l'expérimental. Ces deux aspects s'interpénétrent...

» Les deux aspects ne se confondent certainement pas. Et pourtant, rien ne nous autorise à penser qu'ils puissent être entièrement séparés, que l'un puisse être imaginé sans que nous ayons à chercher aucun appui dans l'autre. L'aspect intuitif est un fait, l'aspect expérimental en est un autre. Mais l'aspect purement expérimental n'est probablement qu'un idéal irréalisable, et l'aspect purement intuitif aussi.

» Avons-nous d'autre part des raisons de penser que nous rencontrerons moins de difficultés à définir un aspect purement théorique et que le théorique se séparera franchement de l'empirique (ce dernier comprenant à la fois l'intuitif et l'expérimental) ? Dans les exemples que nous avons traités, l'aspect théorique se développait au moyen de chaînes d'opérations sûres et de jugements certains. Mais où ces opérations mentales avaient-elles pris leur efficacité et ces jugements leur certitude ? Cette efficacité et cette certitude sont précisément les caractères que nous avons reconnus à la connaissance intuitive. En géométrie, le théorique tient partout à l'intuitif. Dans d'autres sciences, le théorique aboutit directement à l'expérimental. Dans d'autres encore, les racines empiriques sont plus cachées. Nulle part, la séparation totale du théorique et de l'empirique n'est un fait accompli...

» Ainsi, au niveau de l'information naturelle, la première éventualité est à écarter : l'examen des trois aspects les montre partiellement spécifiés et partiellement interdépendants. Et c'est en face de cette constatation, en l'absence d'une spécification donnée d'avance, ou même seulement possible d'avance, que le problème de l'accord des différentes sources de notre connaissance prend son importance et sa complexité. »

Ces constatations faites, nous formulions le problème de l'espace et nous énoncions comme suit l'une de ses exigences essentielles :

« ... une solution normale (du problème de l'espace) doit être une solution

techniquement accomplie. Nous voulons dire qu'elle doit comporter la mise à jour et l'installation du jeu dialectique des trois aspects. La solution est ce jeu lui-même, tenant lieu de moyen de connaissance et de régulateur de l'action. »

Nous avons trop souvent rappelé l'idée dominante de la « solution élémentaire » pour qu'il soit nécessaire de le faire encore une fois.

Presque aussitôt, cette solution se trouva d'ailleurs compromise par sa rencontre avec l'horizon atomique.

« ... L'efficacité d'un jeu dialectique établi peut tenir à un état sommaire de notre information. Celle-ci vient-elle à se préciser : il arrive, et c'est ce qui se passe dans notre cas, que la dialectique ne morde plus sur le réel. En tant que solution du problème de l'espace, notre synthèse dialectique perd son authenticité.

» Tout est-il compromis ? Tout est-il à refaire ? Personne ne le croira...

» Pour unir les trois aspects dans un nouveau jeu dialectique, il faudra commencer par les disjoindre encore plus complètement. Leur spécification doit être poussée d'un pas plus loin, en particulier celle de l'aspect théorique. »

C'est à cette dernière tâche que s'est appliqué le chapitre III. L'expérience de l'axiomatisation s'y est déroulée. Nous incite-t-elle à modifier la position générale que nous avions prise en face du problème de la dialectisation ? Nous en aurions l'obligation si, du fait de l'axiomatisation, l'aspect théorique s'était dégagé jusqu'à l'autonomie complète. Est-ce le cas ? Voici quelques-unes des remarques par lesquelles le chapitre III s'achevait :

« Certes, en s'axiomatisant, la pensée géométrique a affirmé son caractère théorique. La discipline à laquelle elle s'astreint lui assure une indépendance relative envers les sources intuitives et expérimentales de son information. Plus le jeu axiomatique est strict et plus l'apport de ces sources se trouve surveillé et limité...

» Mais la convenance des axiomes reste suspendue à notre vision intuitive de l'espace, que l'expérience quotidienne renouvelle. Mais la dialectique (de la déduction) est toute mélangée (dans une mesure que nous n'avons pas même su complètement apprécier) d'éléments intuitifs relatifs à l'espace, au temps, au nombre, à l'objet, etc. En un mot, par la pratique axiomatique, la pensée rationnelle se spécifie : elle s'épure, elle se réalise mieux dans le sens d'une autonomie voulue et recherchée; mais l'idéal d'une autonomie parfaite, achevée, reste hors d'atteinte. »

En principe, rien n'est donc changé. La recherche de la synthèse dialectique reste engagée dans la même situation. Le jeu dialectique doit pouvoir s'installer, efficace et précis, sans que les trois partenaires aient encore gagné leur autonomie réciproque, sans qu'il soit permis d'admettre qu'ils la gagneront jamais complètement.

Ce point dûment fixé, envisageons en particulier le rapport du théorique à l'expérimental, dont le relâchement, dans l'horizon atomique, est à l'origine de la crise de la première solution. La solution s'est-elle améliorée du fait de l'axiomatisation ? Voici encore, pour en finir avec cette récapitulation préliminaire (préliminaire à la nouvelle dialectisation), les conclusions du chapitre III.

« La marche à la spécification a son revers... Dans la mesure même où notre analyse s'achève dans sa perspective théorique, la réalité du monde atomique lui devient étrangère. Un antagonisme surgit ainsi entre deux moments essentiels de la constitution progressive de notre connaissance : celui de la spécification et celui de la fermeture de la synthèse. N'est-ce là qu'un léger accident ? » Au contraire, ajoutions-nous. Pour retrouver les conditions dans lesquelles une nouvelle synthèse dialectique pourra s'établir, il faudra appeler à l'existence une série de notions encore inédites, créer les instruments convenant à un nouveau stade de la connaissance.

Ces notions sont maintenant à notre disposition.

123. La nouvele idée dominante : la correspondance schématique.

La solution doit consister à montrer comment les trois aspects s'organisent en un système efficace, et spécialement à dégager l'idée directrice de cette organisation. Or, depuis un certain temps, sans que nous l'ayons formulée, cette idée nous accompagne. Elle s'est imposée d'elle-même. Nous l'avons rencontrée à toutes les articulations de la connaissance géométrique. C'est celle de la correspondance schématique. Il suffit de l'admettre comme idée dominante pour que tous les moments de notre expérience spatiale et géométrique se réarticulent, pour que la synthèse se refasse, pour que nous l'apercevions déjà faite. Le travail n'est plus à faire, la mise en place des résultats est d'ores et déjà effectuée. Il ne reste qu'à en prendre conscience.

La figure 73 nous épargnera de trop longues explications. Les cercles I, E, T et A y représentent les quatre horizons de réalité dont nous avons relevé l'existence : les horizons intuitif, expérimental, théorique (au sens préaxiomatique) et axiomatique. Le monde réel y est évoqué par le cercle en pointillé R. Le pointillé a pour mission de rappeler que le monde extérieur n'est pas donné tout constitué, qu'il ne l'est, au contraire, que par l'intermédiaire des horizons de réalité représentés par les cercles en trait plein.

Le cercle I occupe, dans la figure, une position centrale : cette position privilégiée doit évoquer le rôle central et irréductiblement fondamental que nous avons dû reconnaître à l'intuition.

Les cercles E et T sont placés à peu près au même niveau que le cercle I : Nous voulons rappeler par là comment les horizons de réalité correspondants

dérivent de l'horizon intuitif, par la mise en action, *dans ce dernier* horizon, d'une technique adéquate, expérimentale ou mentale. La position du cercle A doit enfin permettre de le mettre en rapport à la fois et de façon assez visiblement analogue, avec les trois cercles précédents, illustrant de cette façon le rôle que joue l'horizon axiomatique envers les trois autres horizons de réalité. Ce rôle est la clé de tout le système.

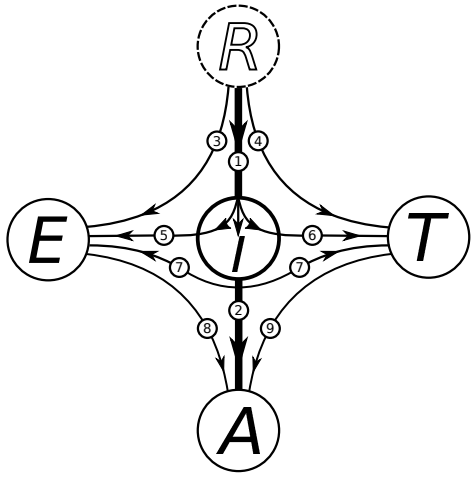


FIG. 73

On s'en souvient, l'axiomatisation de la géométrie s'est tout d'abord présentée comme une reprise rationnelle du contenu de l'intuition spatiale. A s'est constitué en un schéma dont l'aspect intuitif incorporait la première signification extérieure. Dans notre figure, la flèche 2 représente donc la correspondance schématique par laquelle A et I se rattachent l'un à l'autre. Cette correspondance est l'axe de toute l'organisation.

Mais il peut arriver, nous le savons, qu'un schéma admette plus d'une signification extérieure. C'est précisément le cas de A. En examinant les relations qui s'établissent entre T et A d'une part, E et A d'autre part, nous avons pu reconnaître qu'elles présentent aussi les caractères d'une correspondance schématique. C'est là ce que les flèches 8 et 9 doivent signifier.

Trois correspondances schématiques convergent donc sur A. Ainsi, l'horizon axiomatique assume par rapport aux horizons I, E et T le rôle de *schéma révélateur d'une analogie*. A est l'élément de liaison par excellence. C'est par son intermédiaire que se précise la nature des liaisons existant entre les trois aspects. Par son existence, A témoigne d'abord de l'existence de ces liaisons; par sa structure propre, il en délimite la contexture et la portée.

Les flèches 7, 5 et 6 représentent la triple analogie dont A manifeste la structure commune.

Au moment où le rôle de l'axiomatisation nous semblait consister à abstraire un schéma déductif d'une signification extérieure, nous parlions d'axiomatisation schématisante. Il se révèle maintenant que la constitution de l'horizon axiomatique doit encore être envisagée sous un angle tout différent : Au niveau de l'information naturelle, I était le centre de toute l'organisation géométrique.

Au niveau que nous avons maintenant rejoint, A vient doubler I dans son rôle organisateur. On peut maintenant laisser tomber l'idée dominante de l'équivalence (de vérité) des trois aspects, tout le système n'en reste pas moins cohérent et structuré par l'intermédiaire de A.

La constitution de l'horizon axiomatique est le moment décisif de la mise en rapport des trois aspects, le moment décisif de la synthèse dialectique.

L'idée d'analogie ne rend cependant pas complètement compte des rapports (tels que nous les avons déjà aperçus) entre l'intuitif et l'expérimental et entre l'intuitif et le théorique. Il suffit, pensons-nous, d'en faire la remarque, la chose ayant été suffisamment étudiée.

Les flèches 1, 3 et 4, enfin, évoquent les rapports des horizons I, E et T avec leur signification extérieure ou antérieure commune. Elles représentent donc, elles aussi, trois correspondances schématiques. Au niveau de la première synthèse dialectique, trois flèches analogues auraient évoqué trois formes d'adéquation à la réalité — à une réalité préexistante. À ce niveau, les édifications schématiques correspondantes sont constitutives des trois horizons de réalité. Le caractère schématique de ces trois formes d'adéquation n'est mis en évidence que par le progrès de la connaissance du réel, par le passage à une connaissance plus finement détaillée.

Envisageons maintenant la figure 73 dans son ensemble. Elle évoque et suggère un jeu cohérent de tous les éléments qui y sont représentés. Nous le voyons maintenant clairement, dans toutes ses parties et dans toutes ses péripéties, ce jeu est dominé par l'idée informatrice et directrice de correspondance schématique.

En un mot, l'idée trop sommaire de l'adéquation qui informait la première synthèse dialectique peut être abandonnée et remplacée par l'idée de correspondance schématique dans laquelle se reflète une connaissance elle-même plus détaillée des formes possibles de l'adéquation. L'idée de correspondance schématique peut être promue au rang d'idée dominante de la synthèse dialectique sans que la cohérence de celle-ci ait à en souffrir.

La discussion de notre problème pourrait être interrompue ici : Nous venons d'atteindre le but que nous nous étions proposé dès que nous fûmes aperçu que la première solution reste liée au niveau de la connaissance naturelle et que sa validité ne se reporte pas telle quelle sur un horizon moins sommairement dessiné. Toute solution du problème de l'espace, disions-nous, doit être une solution active. Ce qui la constitue, c'est le jeu même des trois aspects. La solution mieux étudiée vers laquelle nous tendons dès la fin du chapitre II, nous venons de la proposer, en installant dans ses grandes lignes la synthèse dialectique dominée par l'idée de la correspondance schématique. La nouvelle solution, ce n'est pas autre chose que ce jeu dialectique mieux informé.

Cette nouvelle solution, demandera-t-on, assure-t-elle une base meilleure à la mise en œuvre de notre connaissance spatiale ? La nouvelle solution va-t-elle inaugurer une nouvelle pratique, une pratique mieux fondée et de plus grande efficacité ? Répétons-le — car c'était là le sens de certaines des remarques qui suivirent l'exposé de la première solution : là n'est pas le problème. Certes, la méthode axiomatique inaugure une pratique plus sûre, spécialement en ce qui concerne les rapports de l'intuitif et du déductif. Mais ce progrès, si considérable soit-il, ne modifie pas essentiellement la situation pour ce qui concerne la pratique (d'ores et déjà établie) de la collaboration des trois aspects. L'efficacité n'en a jamais été compromise, dans le large cadre où elle s'était éprouvée. Ce qui s'était obscurci, c'était la nette vision du jeu dialectique et la compréhension de son succès.

Le problème était, la pratique restant efficace, de lui recréer une légitimité théorique, de lui refaire son intelligibilité.

Il n'en est pas autrement de toute démarche théorique : l'explication théorique d'un *fait* confère à ce dernier une certaine garantie rationnelle qu'il ne possédait pas encore. — Et quant à la théorie elle-même, quel en est le garant ? C'est sa convenance, ce dernier mot devant être parfois pris dans un sens très strict et d'autres fois dans un sens beaucoup plus large.

Ici, le fait à expliquer, c'est l'existence des trois aspects et la possibilité de les mettre en rapport. Toute explication suffisamment ample de ce fait représente une théorie de l'espace. La première synthèse dialectique n'était ni plus ni moins qu'une première théorie de ce genre. Sa convenance ne fut que relative au niveau d'information où elle fut d'abord imaginée. Un supplément d'information en exigea la révision : c'est maintenant chose faite.

Et quelle est la garantie de la théorie révisée ? Nous ne pouvons que répéter ce que nous venons de dire : c'est sa convenance, le mot prenant ici un sens très large. C'est dans une trame extrêmement complexe et serrée d'explications et de confrontations qu'elle s'éprouve. Son *idonéité* ne lui était pas acquise d'avance. Elle l'acquiert en la méritant.

124. RETOUR A LA DIALECTIQUE DE LA DÉDUCTION. Le moment décisif de la synthèse dialectique est donc la constitution de l'horizon axiomatique A. Chose remarquable, le rôle organisateur de ce dernier, sa fonction-clé à la pointe de tout le système confère une nouvelle valeur à son autonomie. Celle-ci n'est pas absolue, nous le savons. Elle existe cependant, dans la mesure où la structure propre de l'horizon schématique et la technique déductive ont été dégagées de l'intuition géométrique. L'importance de la déduction dans l'abstrait (dans un abstrait aussi épuré que possible) s'en trouve tout particulièrement soulignée. L'essai de constituer l'autonomie de la géométrie théorique (c'est-à-dire son axiomatisation) nous a

conduit à placer celle-ci dans un cadre plus général. Les contingences de l'intuition géométrique y perdent leur valeur significative et l'intuition s'y retire vers un autre ordre de faits (vers les « faits logiques »), les notions et les relations géométriques s'y défont de leurs qualités d'engagement dans le monde géométrique pour ne garder que leur qualité d'objet et de relations entre objets. Par sa projection sur l'horizon axiomatique, la géométrie théorique a donc pris place au sein d'une théorie des objets — des objets dont on cherche à ne retenir que la qualité d'être des objets indépendamment de toute propriété précise qui pourrait leur appartenir d'avance — en un mot des objets logiques.

Cette théorie est-elle indépendante de toute expérience et de toute intuition, dans son horizon propre de réalité ? Ou bien n'y présente-t-elle qu'un aspect d'une synthèse à laquelle d'autres aspects sont indissolublement liés ? Les indications, d'ailleurs assez nombreuses, dont nous nous sommes contentés jusqu'ici allaient toutes dans le même sens : elles marquaient avec insistance le caractère complexe; de la dialectique déductive, c'est-à-dire de la technique applicable au monde des objets logiques.

Nous allons reprendre ces indications et les compléter. Peut-être la chose ne serait-elle pas nécessaire, si notre étude ne visait pas le problème de la connaissance en général, à travers celui de la connaissance géométrique. Mais, pour une théorie générale de la connaissance, il est naturellement de la plus haute importance de se rendre compte que la constitution d'une théorie générale des objets logiques rencontre les mêmes difficultés de principe que la constitution d'une théorie de l'espace. On pourrait penser que le problème que nous traitons ici, le problème de l'espace, est d'une complexité spéciale, et qu'il doit exister des domaines de la connaissance d'une contexture beaucoup plus simple. Ces domaines seraient alors méthodologiquement antérieurs, et cela de façon essentielle, à celui qui se trouve traité ici. Or l'idée d'une antériorité aussi radicale ne résiste pas à un examen sérieux. On se rend alors compte que les exemples de synthèse dialectique dont la connaissance géométrique offre l'occasion sont des modèles du genre.

Nous devrons d'ailleurs nous borner à quelques explications très simples. Le rôle que la géométrie joue quant au problème de l'espace, la théorie des objets le reprend quant à un autre problème tout à fait fondamental, quant au problème méthodologique du *Commencement*. Il est difficile de les traiter l'un sans l'autre. Nous aurons donc à reprendre plus tard toutes les indications qui vont suivre.

La théorie des objets, fondement de l'autonomie (relative) de l'horizon axiomatique, se présente sous les trois aspects principaux que voici :

a) comme physique de l'objet quelconque,

b) comme charte de nos libertés naturelles,

c) comme canon élémentaire de nos jugements.

a) Comme *physique de l'objet quelconque.* D'emblée, la connaissance de l'objet (de propriétés quelconques) se présente sous les trois aspects que nous avons si souvent distingués. La conception même de l'objet et les relations que nous établissons entre les objets sous le signe de l'évidence en manifestent l'aspect intuitif. Une technique combinatoire extrêmement élémentaire opérant sur des objets réels ou sur des symboles littéraux, par exemple, en réalise l'aspect expérimental. Ces deux aspects à la fois se prêtent enfin à une systématisation déductive.

Le tout s'organise en une synthèse dialectique dont l'idée dominante est l'équivalence des trois aspects. Cette idée se présente d'ailleurs elle-même avec l'immédiateté de l'évidence.

C'est à cette discipline élémentaire qu'appartient, par exemple, l'énoncé suivant :

Si la présence d'un objet A entraîne toujours la présence d'un objet B, l'absence de B entraîne l'absence de A.

La physique de l'objet quelconque va d'ailleurs de pair avec une Logique de nos conduites élémentaires.

b) Comme *charte de nos libertés naturelles*.

Sans l'exercice de certaines libertés de l'esprit, il ne peut y avoir ni axiomatisation ni déduction. Il nous est possible de concevoir, de construire et de définir de nouveaux objets mentaux qui viennent prendre leur place à côté de ceux dont nous disposons déjà. Ainsi, nous avons la faculté de décider ou de ne pas décider de traiter une configuration de deux objets comme un seul objet — d'envisager, par exemple, une paire de points comme équivalente à un segment.

Bien entendu, la liberté dont nous parlons n'est pas illimitée. Il y a des exigences à remplir pour que les objets construits par l'esprit puissent être agréés dans le monde des objets. Notre libre imagination se met ainsi d'accord avec les lois de la physique de l'objet quelconque.

Cette liberté n'en va pas moins très loin. Déjà la suite illimitée des nombres entiers en donne le témoignage. Elle justifie (par le fait accompli) la prétention de l'esprit à concevoir, après un nombre n fini quelconque d'objets, encore un objet dont la seule propriété soit précisément d'être le $n + 1^{\text{ème}}$ mais les justes prétentions de l'esprit vont encore plus loin. Il revendique de pouvoir rassembler dans la conception d'un seul objet un processus de genèse qui peut comporter une suite illimitée de moments. Celui qui ne se croirait pas libre de le faire ne pourrait pas concevoir le nombre irrationnel, par exemple. Le postulat du point-limite lui paraîtrait illégitime.

Toute la théorie du continu témoigne de la liberté dont l'esprit dispose vis-à-vis de son expérience, de la liberté de la compléter, de la prolonger, de

l'intégrer dans une théorie. Il est clair qu'un énoncé tel que l'axiome auquel nous venons de faire allusion n'est pas susceptible d'une vérification expérimentale directe. Nous sommes cependant libres de l'admettre comme une hypothèse directrice et simplificatrice. L'efficacité de cette mesure trouve alors son expression dans la cohérence de tout le système. Elle retombe, par ce biais, sous le coup de l'expérience.

Et, d'autre part, la liberté dont nous parlons ne saurait être interprétée comme une liberté dont il nous serait loisible d'user individuellement et arbitrairement, puisque l'intuition de l'espace est toute dominée par la vision ou la représentation de la continuité.

La science du raisonnement apparaît dans cet exemple, non plus comme une physique très simple et très générale qui réglerait les rapports à établir entre les objets (par le fait même que ce sont des objets), mais bien comme une science des moyens dont l'esprit peut et sait disposer en toute légitimité. Il n'y a pas de doute que la théorie du continu, cette façon d'extrapoler et de « fermer » l'expérience de l'espace en accord avec nos vues intuitives, correspond à une façon admissible de faire. Comment s'expliquer qu'elle put causer aux philosophes grecs des difficultés qu'ils ne surmontèrent jamais. C'est naturellement qu'ils n'étaient pas parvenus à dégager la dialectique des raisonnements de ce genre. Ce n'est que beaucoup plus tard, le problème se posant à nouveau au sujet du calcul différentiel, que la dialectique adéquate finit par se constituer — à travers tous les tâtonnements et toutes les difficultés que l'on sait.

c) Comme *canon de nos jugements*.

La science du raisonnement comporte enfin un aspect normatif sur lequel il est à peine nécessaire d'insister.

La physique de l'objet quelconque n'est pas toute la physique, elle n'en est que le chapitre le plus élémentaire. La charte de nos libertés naturelles n'est pas la codification de tout ce dont nous sommes et serons capables, elle n'en est que la très sommaire esquisse. En tant que canon de nos jugements, la logique n'est pas une instance aux compétences illimitées. Ce n'est, en somme, qu'une instance préalable. Mais elle est impitoyable.

Tout jugement et tout système de jugements sont soumis au contrôle de l'instance logique. Mais celle-ci n'en examine pas tout le contenu. Elle dépouille les jugements d'une partie de leur sens pour ne conserver que les propriétés générales des objets et des relations entre objets qui y figurent. Son verdict est alors celui-ci :

Le système de jugements proposé est possible, il s'intègre dans la physique de l'objet quelconque et respecte nos libertés naturelles, ou celui-là :

Le système de jugements proposé est impossible, il ne s'intègre pas dans la physique de l'objet quelconque, il ne s'accorde pas avec la charte de nos libertés naturelles.

Ainsi, l'esprit est capable, dans un climat normatif inconditionnel, de décider si tel système de jugements est ou non recevable.

La logique ne décide pas du vrai ou du faux d'un jugement porté sur des objets réels. Le vrai logique ne se rapporte qu'aux jugements portés sur les objets logiques et sur les relations établies entre eux.

Nous ne chercherons pas à analyser ici l'intuition qui informe l'instance logique normative et lui permet de porter ses jugements préalables de conformité dans un sentiment d'absolue compétence. Pour atteindre son but, l'analyse de cette intuition doit être mise à sa place. Elle appartient au Problème du Commencement.

Encore un mot pour finir, quant au but des indications précédentes. Ce but est de prévenir un jugement précipité sur la dialectique de la déduction. Si nous avions pu croire que cette dernière se présente bien dégagée, sous une forme bien achevée devant laquelle l'examen s'arrêterait parce qu'il aurait trouvé son terme, ce qui précède nous aurait détrompés. Sous un examen qui veut gagner en profondeur, la dialectique déductive ne se révèle pas moins complexe que l'exercice intégral de la connaissance spatiale. Chose étrange, à première vue du moins, tout le problème semble renaître dans l'un des éléments de la solution.

Ce fait ne compromet-il pas irrémédiablement le résultat de notre étude ? Il le ferait, si la justesse de la méthodologie traditionnelle (et non dialectique) s'imposait sans recours. Certes, ce fait est irrécusable. Mais il ne fait pas obstacle à la méthodologie dialectique. Il la justifie. C'est pour en tenir compte qu'elle est ce qu'elle est : c'est l'une des expériences fondamentales dont elle se réclame.

Conclusion

125. POUR PRÉPARER LA SUITE. Le choc que la géométrie avait subi de sa rencontre avec l'horizon atomique est ainsi surmonté. Une nouvelle synthèse dialectique vient de se substituer à la première que le progrès de la connaissance avait désavouée. La solution est-elle définitive ? l'expérience géométrique a-t-elle atteint son terme ?

Une remarque tout d'abord quant au désaveu infligé à la première synthèse dialectique. Celle-ci a-t-elle perdu toute valeur ? Faut-il l'abandonner comme une fausse solution dont on aurait reconnu l'irrémédiable erreur ? Rien ne peut-il en être sauvé ?

Une décision aussi tranchante ne se justifie pas. En la prenant, on commettrait une nouvelle erreur. Parlant des exigences à imposer à la seconde synthèse dialectique pour que celle-ci soit une bonne solution, nous disions : elle devra

rendre à la première synthèse la valeur qui lui revient du fait de sa validité relative. Cette exigence est-elle remplie ? Sans aucun doute. Si la seconde synthèse se présentait comme une solution absolue, expression d'une réalité dernière, elle déclasserait complètement la solution antérieure. Mais tel n'est pas le cas. En principe, les deux solutions sont de la même nature : elles sont l'une et l'autre relatives à un certain niveau de connaissance, adaptées à un certain horizon de réalité. L'une dépasse l'autre, mais non d'une hauteur indéfinie.

Les deux synthèses dialectiques sont entre elles comme deux théories du même phénomène, dont l'une, après une longue validité incontestée, a dû céder la place à une théorie plus exacte,... en attendant que peut-être celle-ci soit à son tour remplacée par une troisième théorie encore meilleure. C'est là le rythme même du progrès scientifique.

Voulons-nous suggérer par là que la deuxième synthèse dialectique attend elle aussi d'être remplacée par une troisième synthèse informée par une troisième idée dominante ? S'il en était ainsi, quand ce jeu prendrait-il fin ?

Nous n'avons, en effet, pas encore franchi la dernière étape de notre progression méthodologique. Il nous reste encore une expérience décisive à faire, avant de tirer la leçon générale de notre longue analyse. Jusqu'ici, l'intuition est restée maîtresse du jeu dialectique. Elle ne s'est affaiblie, dans la seconde synthèse, que pour continuer à la dominer. Il nous reste à voir comment cette domination peut être mise en question. Il nous reste à comprendre comment il peut se créer une certaine distance entre celui qui connaît et l'intuition qui l'informe et ne cessera pas de l'informer. Comment l'intuition, de moyen indispensable et inaliénable de connaissance qu'elle est au niveau de l'information naturelle, peut devenir un obstacle et peut être tournée. Comment une géométrie peut se détacher partiellement de son support intuitif et proposer une vision révisée de l'espace.

Ce sera l'occasion de voir que l'expérimentation géométrique n'est pas invariablement liée aux horizons I, E et T, mais qu'elle peut aussi prendre l'horizon axiomatique comme champ d'activité.

Ce sont là des faits importants dont nos conclusions générales auront à tirer parti. Ils interviendront au chapitre prochain, à l'occasion de la constitution des *Géométries non-euclidiennes*.

L'édification de géométries venant contredire l'intuition sur certains points ne peut naturellement pas rester sans effet sur la conception des rapports des trois aspects. L'idée dominante de leur synthèse devra donc être révisée, elle aussi.

Ce sera notre dernière expérience.

CHAPITRE V

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

A. Le théorème de l'alternative

126. LE Ve POSTULAT D'EUCLIDE. Nous ne referons pas ici l'histoire des doutes et des essais qui aboutirent à l'édification des géométries non euclidiennes. Nous ne pouvons cependant pas nous dispenser de dire quelques mots du rôle que le cinquième postulat d'EUCLIDE (le postulat dit « des parallèles ») y a joué.

Les *Éléments* d'EUCLIDE datent d'environ 300 ans av. J.-C. Ils inaugurent la méthode axiomatique, dans un climat de pure rationalité, climat qui ne se retrouve pas tel quel (il est presque inutile de le rappeler) dans l'édification axiomatique de la géométrie à laquelle nous avons consacré notre chapitre III. La base axiomatique des *Éléments* d'EUCLIDE est formée par 9 axiomes et par 6 postulats.

Les *axiomes* énoncent des vérités communes dont l'évidence s'impose d'elle-même. Les voici :

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.
2. Si, à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si, de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si, à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si, de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles.
7. Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles.
8. Les grandeurs superposables sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

Les *postulats* énoncent des propositions de caractère géométrique qu'on demande d'accepter pour que l'œuvre constructive du géomètre puisse prendre son départ. Ils sont d'ailleurs, eux aussi, évidents.

1. II est possible de mener une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. II est possible de prolonger indéfiniment, dans sa direction, une ligne droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, on peut décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace[1].

Le cinquième de ces postulats est équivalent à l'axiome[2] V de notre base axiomatique (chap. III, p. 207). Nous continuerons à l'appeler l'axiome d'EUCLIDE ou tout simplement l'axiome des parallèles.

Rappelons-en l'énoncé exact :

Axiome V : Par tout point B non situé sur une droite a, il passe au plus une parallèle à a, quels que soient d'ailleurs B et a.

Nous avons vu, en effet, au chapitre III, que si une droite *a* coupant deux droites *b* et *c* fait avec ces droites des angles intérieurs dont la somme est égale à deux droits, ces droites *b* et *c* sont parallèles. On en déduit une construction qui permet de mener, par tout point B non situé sur une droite *a*, une parallèle à *a*. Le cinquième postulat demande que toute droite par B autre que la parallèle ainsi construite *coupe a*; la parallèle est dès lors unique. C'est ce qu'énonce notre axiome V, compte tenu du fait que l'existence d'une parallèle au moins est un théorème.

Les axiomes et les postulats qui précèdent forment-ils une base complète ? La base axiomatique dont nous sommes partis au chapitre III — on ne peut manquer d'en être frappé — en comprend un nombre beaucoup plus considérable. Etait-il nécessaire de les introduire tous ? Le fait est que bon nombre des axiomes que nous avons explicitement formulés restent implicites, non formulés mais agissants, dans l'œuvre d'EUCLIDE; qu'ils n'en sont pas moins appelés à collaborer à l'édification de la géométrie, on en a souvent fait la remarque. Leur évidence est telle que la nécessité de les poser explicitement a été comme masquée. Mais ce n'est pas là le point qui doit retenir notre attention.

Il est dans la nature d'un postulat, disions-nous, de s'imposer à l'esprit par son évidence. Pour quelle raison l'évidence du cinquième postulat fut-elle mise

[1] Nous avons cité — avec quelques modifications sans importance — ces axiomes et postulats d'après la traduction des œuvres d'EUCLIDE donnée par PEYRARD.

[2] Dans la terminologie axiomatique moderne on ne fait plus guère de différence entre les termes « axiome » et « postulat ».

en doute par les commentateurs et les continuateurs d'EUCLIDE ? Nous ne chercherons pas à le deviner ou à l'expliquer. Le fait est que, pendant des siècles, l'attention des géomètres devait rester fixée sur ce point.

La vérité du postulat des parallèles était-elle contestée ? Pas du tout. Il fallut attendre les temps modernes pour que le doute s'étendît jusque-là. Ce qui était mis en cause, ce n'était pas la vérité, mais seulement l'évidence de la proposition en discussion. On s'accordait pour argumenter de la façon suivante :

Pour une proposition *vraie*, seules deux éventualités sont à prendre en considération :

1. Il peut arriver qu'elle soit évidente. C'est alors un axiome. Il faut alors l'accepter sans démonstration.

2. Il peut arriver aussi qu'elle ne soit pas évidente. Il faut alors la démontrer; disons mieux, il doit alors être possible de la démontrer; en d'autres termes, une proposition vraie qui n'est pas évidente doit être démontrable. Quant à la démonstration, elle consistera, bien entendu, à ramener la proposition vraie mais non évidente à d'autres propositions vraies dont l'évidence ne fait aucun doute.

L'évidence de cette alternative méthodologique s'imposait elle-même avec une parfaite nécessité. On ne doutait pas qu'elle fût valable pour toute proposition vraie et par conséquent aussi pour le postulat des parallèles. Contester l'évidence de ce dernier c'était, du même coup, assumer la tâche de le démontrer. Et c'est bien à cette tâche que, génération après génération, les géomètres s'appliquèrent. Il faut attendre GAUSS pour voir poindre l'idée que l'alternative n'enferme peut-être pas toute la vérité et qu'il existe peut-être des propositions vraies qui ne seraient ni évidentes ni démontrables.

Le principe méthodologique dont il vient d'être question peut s'énoncer plus brièvement. En voici deux autres formulations :

a) Toute proposition vraie est soit évidente, soit démontrable.

b) Toute proposition vraie qui n'est pas évidente admet une démonstration.

À la lumière de ce principe, la situation semblait être parfaitement claire. Le cinquième postulat devait simplement passer de la catégorie des propositions évidentes dans celles des propositions démontrables. Sa démonstration devait exister, il fallait donc la trouver[1]. Deux façons de procéder semblaient s'offrir

[1] Comment peut-on savoir que le cinquième postulat est vrai, si l'on nie son évidence et si l'on n'en connaît pas de démonstration ? En fait, pendant toute l'époque dont nous parlons ici, personne n'a jamais douté de la *vérité* de ce postulat, même si l'on mettait en doute son caractère d'évidence. L'explication de ce fait à première vue étonnant pourrait être la suivante : ce ne sont pas seulement les axiomes qui étaient tenus pour évidents; mais tout l'édifice de la géométrie, avec sa structure déductive. Il s'agissait là d'une sorte de vérité globale, à laquelle tous les énoncés particuliers de la géométrie participaient. Or le cinquième postulat, en tant qu'*énoncé vrai*, semblait être un élément inaliénable de la géométrie tout entière. Le nier, n'était-ce pas ruiner la géométrie elle-même ? Mais cette géométrie était un édifice bien trop cohérent et trop éprouvé pour qu'il semblât possible de douter de sa vérité.

tout naturellement. La première était de supprimer tout simplement l'axiome dont l'évidence était défaillante, et de le démontrer à partir des évidences déjà reconnues. La seconde était de le remplacer par un autre axiome dont l'évidence ne pourrait pas être mise en doute. Elles furent tentées l'une et l'autre.

Pour la première, tous les essais restèrent vains. Pour la seconde, ce ne furent pas les « postulats de remplacement » qui manquèrent. Nous aurons l'occasion d'en citer quelques-uns par la suite; mais aucun d'eux ne trouva définitivement grâce, l'évidence d'aucun d'entre eux ne s'imposait sans conteste. L'échec des essais maintes fois répétés finit même par conduire à une situation assez confuse dans laquelle l'idée même de la démonstration géométrique se trouva compromise.

Nous n'étudierons pas ici cette crise de la légitimité géométrique. Mais nous reviendrons, au chapitre VI, sur cette très intéressante période de l'histoire de la géométrie. Pour les buts que nous poursuivons dans cet ouvrage, cette période nous paraît comporter des enseignements d'une certaine importance, et dont l'intérêt, d'ailleurs, n'est peut-être pas encore suffisamment souligné.

Pour l'instant, nous ne cherchons pas à faire revivre le problème du cinquième postulat, tel qu'il se présenta à EUCLIDE ou à ses successeurs, à LEGENDRE ou à GAUSS. Nous allons, au contraire, l'examiner dans la perspective axiomatique bien analysée qui est maintenant la nôtre. Ce problème est, en effet, le fil directeur qui doit nous conduire à un nouveau tournant de notre étude. En suivant ce fil directeur avec patience et ténacité, nous ferons une expérience d'un caractère très spécial, expérience qui nous obligera à réviser les exigences auxquelles une synthèse des trois aspects de la géométrie doit satisfaire et à réviser en même temps l'idée dominante sous laquelle cette synthèse pourra s'opérer.

Pour les buts généraux que nous poursuivons ici (buts que nous avons déjà souvent rappelés), cette expérience est d'une importance exceptionnelle. Nous allons l'inaugurer en examinant à nouveau, avec les moyens qui sont maintenant en notre possession, l'historique question du cinquième postulat.

127. LE THÉORÈME FONDAMENTAL « DE L'ALTERNATIVE ».

Nous allons nous placer dans le premier cas de tout à l'heure : celui où l'on supprime tout simplement le cinquième postulat sans chercher à le remplacer par un autre énoncé. Dans un cadre axiomatique bien tracé, cette mesure a une signification tout à fait nette : on sait exactement quels sont les axiomes qui restent et dont on a le droit de se servir. On sait aussi très bien comment on peut s'en servir, comment on peut en tirer des conséquences valables. Ce qui nous reste, pour le dire exactement, ce sont tous les axiomes des groupes I, II, III et IV. En partant de cette base *axiomatique tronquée* (décapitée de l'axiome qui en constitue en quelque sorte le

couronnement), nous démontrerons un théorème fort important que nous appellerons *le théorème de l'alternative*.

Nous commençons par rappeler que nous avons démontré au chapitre III le théorème suivant (théorème 45, p. 206) :

Si a est une droite qui ne passe pas par le point A, il est toujours possible, quels que soient a *et A, de mener par A une droite qui ne coupe pas* a.

La démonstration de ce théorème ne faisait pas usage de l'axiome des parallèles. D'autre part, elle nous indiquait comment on peut procéder pour construire une telle non-sécante : il suffit de mener par A une droite quelconque *b* qui coupe *a* sous un angle α (par exemple sous un angle droit) et de reporter en A cet angle α dans le même sens à partir de *b*; la droite obtenue, *c*, ne peut pas couper *a* (fig. 74).

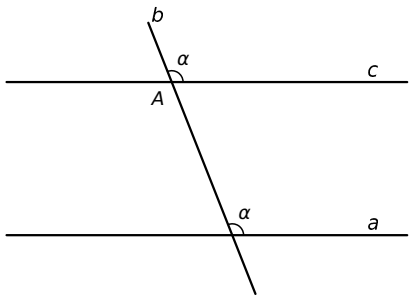


FIG. 74

Ce théorème nous garantit donc l'existence d'*une* non-sécante. Mais nous ignorons toujours s'il n'en existe pas plusieurs. Sans chercher encore à éclaircir définitivement ce dernier point, nous allons nous demander ce qui se passerait si, par un point, nous pouvions mener deux non-sécantes d'une droite ne passant pas par ce point.

Théorème de l'alternative :

S'il existe un point A et une droite a *tels que par A on ne puisse mener qu'une seule droite qui ne coupe pas* a*, alors, par tout point, pour toute droite ne passant pas par ce point, on ne peut mener qu'une seule non-sécante de cette droite.*

En d'autres termes : si pour un seul point et une seule droite, l'axiome d'EUCLIDE est vérifié, il est *toujours* vérifié; si pour un seul point et une seule droite, cet axiome n'est pas vérifié, il n'est *jamais* vérifié. C'est là l'alternative que rappelle le nom que nous avons donné à ce théorème.

Bien entendu, la démonstration ne fera pas usage de l'axiome d'EUCLIDE ! En revanche, elle pourra faire usage de tous les autres axiomes, en particulier aussi des axiomes sur la congruence.

Démonstration : Supposons d'abord que A et B soient deux points et *a* et *b* deux droites tels que la distance de A à *a* soit la même que celle de B à *b* (fig. 75).

Nous allons montrer que si par A il n'existe qu'une seule non-sécante de *a*, il n'existe également qu'une seule non-sécante de *b* par B.

Menons par A et B les perpendiculaires h et h' à a et b (dont l'existence a été démontrée au chapitre III, sans faire appel à l'axiome des parallèles), et les perpendiculaires d et d' à h et h'. Soient L et L′ les pieds des perpendiculaires h et h' sur a et b. Nous savons que d ne coupe pas a, et d' ne coupe pas b. Supposons que par B il existe une autre non-sécante de b, m'. Soit α l'angle de m' avec h'; reportons cet angle, dans la même direction, au point A à partir de h. Nous obtenons une droite m qui doit couper a, puisque par hypothèse, au point A, la non-sécante d de a est unique. Soit donc M le point d'intersection de m avec a. Reportons la longueur LM à partir de L′, du côté où nous avions mesuré α, jusqu'au point M′. Les triangles LAM et L′BM′ sont congruents comme ayant deux côtés égaux (AL = BL′ par hypothèse, LM = L′M′ par construction) enfermant un angle égal (l'angle droit en L, resp. L′). La droite BM′ fait donc l'angle α avec h'; elle est donc (à cause de l'unicité du report des angles) identique à m'; m' est donc une sécante, contrairement à l'hypothèse. Il ne peut donc exister que la seule non-sécante d' par B à b.

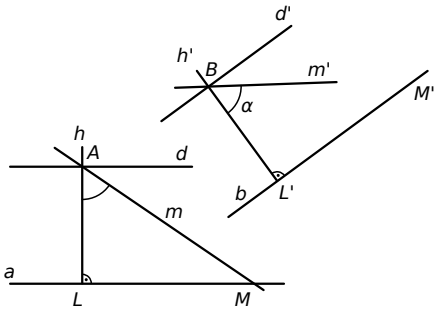


FIG. 75

Ce premier résultat nous permet de réduire la démonstration du théorème de l'alternative à la démonstration du théorème suivant :

soit a une droite, A un point tel que par a on puisse mener une et une seule non-sécante de a. Alors on ne peut mener qu'une seule non-sécante de a par tous les points de la perpendiculaire h à a par A qui sont situés du même côté de a que A.

En effet, si b est une droite quelconque, B un point quelconque, il existe sur h et du même côté de a que A un point B′ tel que les figures (B′,a) et (B,b) soient congruentes. Si l'on a déjà démontré qu'il ne passe qu'une non-sécante de a par B′, on en déduit comme précédemment qu'il ne passe également qu'une non-sécante de b par B.

Démontrons donc le théorème ci-dessus :

Soient A et B deux points de la même perpendiculaire h à a, situés du même côté de a.

a) Nous commencerons par supposer que B est plus rapproché de a que A, et démontrerons donc la propriété suivante :

S'il ne passe qu'une non-sécante de a par A, il n'en passe aussi qu'une seule par B.

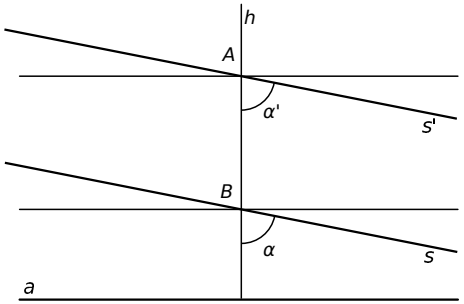


FIG. 76

La démonstration se fait par réduction à l'absurde (fig. 76). La non-sécante par A est naturellement orthogonale à h (cf. plus haut).

Supposons que par B il passe outre la non-sécante orthogonale à h, une deuxième non-sécante s faisant l'angle α avec h. Soit s' la droite par A faisant du même côté l'angle $\alpha' = \alpha$ avec h. D'après le théorème 45 du chapitre III, les droites s et s' ne se coupent pas. Mais s sépare le plan en deux parties, et a se trouve de l'autre côté de s que s'[1]. Par conséquent s' ne peut couper a; c'est donc une deuxième non-sécante par A, contrairement à l'hypothèse.

b) Nous démontrons maintenant que :

S'il ne passe qu'une non-sécante de a par A, il n'en passe également qu'une par le point B de h situé à la distance double de a que A.

Montrons d'abord que cette proposition démontre définitivement le théorème : soit C un point quelconque de h (fig. 77). D'après le postulat d'ARCHIMÈDE, si nous construisons le point A_1 situé à la distance double (de a) de celle de A, puis le point A_2 situé à la distance double (de a) de celle de A_1, etc., nous finirons par obtenir un point A_n situé *au-delà* de C. S'il ne passe qu'une non-sécante par A_1, d'après *b)* il n'en passe également qu'une par A_2, par A_3,... par A_n. Et, d'après *a)*, s'il n'en passe qu'une par A_n, il n'en passe également qu'une par C, plus rapproché de a que A_n.

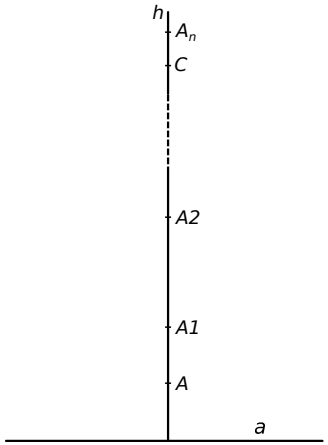


FIG. 77

Démontrons donc, pour finir, la proposition *b)* (fig. 78) :

Soit a' l'unique non-sécante de a par A; elle est, nous le savons, perpendiculaire à h. Soit B le point situé à la distance

[1] Rappelons qu'au chapitre III nous avons vu comment les axiomes des groupes I et II permettent de reconstituer les propriétés d'ordination sur la droite et dans le plan.

de *a* double de celle de A; supposons que par B il passe deux non-sécantes de *a*. Soit *s* celle qui n'est pas orthogonale à *h*. *s* doit couper *a′* : en effet, les figures (B,*a′*) et (A,*a*) sont congruentes, et par A il ne passe qu'une non-sécante de *a*; il ne passe donc également qu'une non-sécante de *a′* par B (c'est dire que *s n'est pas* une non-sécante de *a′*). Soit alors C un point de *s* situé *en dessous* de *a′*, et menons la droite AC.

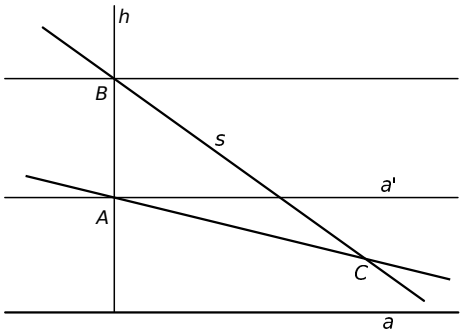


FIG. 78

Entre A et C, cette droite ne peut couper *a*, puisque A et C se trouvent du même côté de *a*.

Au-delà de C, elle ne peut pas non plus couper *a*, puisqu'elle a passé de l'autre côté de *s* (qui est une non-sécante de *a* par hypothèse) que *a*.

Au-delà de A, elle ne peut pas couper *a* non plus, puisqu'elle s'y trouve de l'autre côté de *a′* que *a*.

La droite AC est donc une non-sécante, contrairement à notre hypothèse (qu'il ne passe qu'une non-sécante par A). Il ne peut donc passer qu'une non-sécante par B.

Le théorème est ainsi entièrement démontré.

Le théorème de l'alternative n'exclut nullement la possibilité que par un point il passe plusieurs non-sécantes d'une droite. Il nous dit seulement que si cela est le cas pour un point et une droite, ce doit être le cas pour tous les points et toutes les droites.

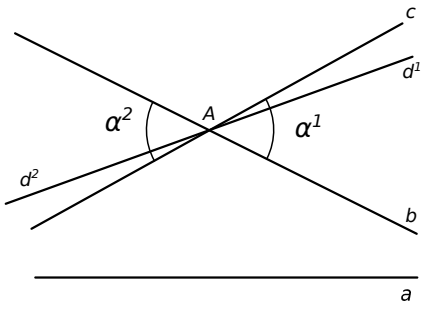


FIG. 79

Étudions donc ce qui arrive si par un point A, il passe deux non-sécantes, *b* et *c*, d'une droite *a* (fig. 79).

Nous allons montrer que les sécantes de *a* par A remplissent dans ce cas un angle de sommet A dont les côtés sont eux-mêmes des non-sécantes.

Appelons α^1 et α^2 les deux angles opposés formés par *b* et *c* et dans lesquels la droite *a* ne pénètre pas; et soit *d* une droite passant aussi par A et située dans ces deux angles. Le point A la partage en deux demi-droites, d^1 et d^2, d^1 située dans α^1 et d^2 dans α^2.

d^1 (par exemple) peut-elle couper *a* ? D'après les propriétés de l'ordination (que les axiomes des groupes I et II permettent, nous l'avons déjà dit, de reconstituer), un point ne saurait se trouver à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'angle α^1. Ce devrait cependant être le cas pour un éventuel point d'intersection de *a* et de d^1. Un tel point n'existe donc pas.

Le même raisonnement peut être fait pour d^2; par conséquent *d* ne coupe pas *a* : c'est une non-sécante. Il en est naturellement de même de toute autre droite par A située dans les mêmes angles que *d*. Il existe donc une infinité de non-sécantes, remplissant tout l'angle des droites *b* et *c* que *a* ne traverse pas.

Donc : si les droites *b* et *c* ne coupent pas *a*, toutes les droites contenues dans l'angle α et son opposé ne coupent pas non plus la droite *a*.

Les non-sécantes *b* et *c* forment quatre angles opposés deux à deux par le sommet. Soit α' celui qui contient la droite *a*. Aucune des demi-droites issues de A dans les autres angles ne coupe *a* (fig. 80).

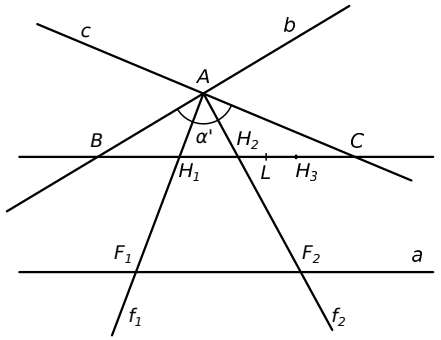


FIG. 80

Soient maintenant deux demi-droites f_1 et f_2 issues de A et coupant *a* en F_1 et F_2. Comme nous l'avons vu au chapitre III, théorème 29, toutes les demi-droites (issues de A), comprises entre deux demi-droites coupant *a* sont aussi des sécantes.

La suite du raisonnement se fera très facilement en menant le segment BC, d'un côté à l'autre de l'angle α', et portant notre attention sur les points d'intersection de ce segment avec les demi-droites issues de A. Nous répartirons ces points en deux catégories, la première étant celle des points d'intersection avec les sécantes et la seconde celle des points d'intersection avec les non-sécantes (issues de A, dans α'). Nous venons de voir qu'entre deux points de la première catégorie il ne peut y avoir aucun point de la seconde.

Soient H_1 et H_2 les points (de la première catégorie) correspondant aux sécantes f_1 et f_2 : tout le segment H_1H_2, extrémités comprises, appartient donc à la première catégorie.

Partageons H_2C en son milieu H_3. Deux éventualités peuvent se présenter :

a) H_3 appartient à la première catégorie;

b) H_3 appartient à la seconde catégorie.

Dans le premier cas, tout le segment H_1H_3 appartient à la première catégorie.

Dans le second cas, tout le segment H_3C appartient à la seconde catégorie.

Dans le premier cas, on partagera le segment H_3C en son milieu H_4 après quoi les deux éventualités que nous venons de distinguer se présenteront à nouveau pour H_1H_4 et H_4C.

Dans le second cas, nous partagerons H_2H_3 en son milieu, et nous aurons à faire sur le segment ainsi partagé des distinctions analogues; et ainsi de suite...

Ce procédé de bipartition répété indéfiniment conduit à prolonger chaque fois soit le domaine de la première catégorie vers la droite, soit le domaine de la seconde catégorie vers la gauche, le domaine libre diminuant chaque fois de moitié. Le domaine libre se réduit *à la limite* à un point L et les points du segment H_2C se trouvent alors répartis comme suit :

Le segment H_2L (L faisant peut-être exception) appartient tout entier à la première catégorie;

le segment LC (L faisant peut-être exception) appartient tout entier à la seconde catégorie;

le point L lui-même n'a encore été attribué ni à l'une ni à l'autre des deux catégories.

Le point L peut-il appartenir à la première catégorie ? Les points de cette catégorie sont simplement et uniquement les projections sur BC, avec A comme centre de projection, de l'ensemble des points de la droite *a*. Cet ensemble, lorsqu'on décrit la droite dans un sens ou dans l'autre, n'a pas de dernier point. Il doit en être de même de sa projection. L n'appartient donc pas à la première catégorie.

Ce qui vient d'être fait pour le segment H_2C peut être répété pour le segment H_1B (ou pour BH_2, si l'on préfère).

Le résultat final s'énonce donc ainsi :

Les points de la première catégorie remplissent sans lacune un segment de BC privé de ses deux extrémités.

En d'autres termes :

Les sécantes d'une droite tirées d'un point situé hors de cette droite remplissent un angle dont les côtés eux-mêmes sont des non-sécantes.

En résumé, s'il existe, par le point A, plus d'une non-sécante de la droite *a*, il existe par ce point deux non-sécantes privilégiées qui séparent les sécantes des non-sécantes.

Dans une étude plus approfondie de cette éventualité « non euclidienne », ces deux non-sécantes privilégiées prendront le nom de *parallèles* à *a*.

Pour démontrer le postulat d'EUCLIDE, il ne resterait, la chose est claire, qu'à éliminer l'éventualité « non euclidienne » que nous nommerons aussi, nous conformant à l'usage, l'éventualité hyperbolique ou lobatschefskienne. Mais comment faudrait-il s'y prendre pour y parvenir ?

On peut naturellement se proposer de raisonner par l'absurde; prenant le cas hyperbolique comme hypothèse et l'adjoignant (au lieu de l'axiome V d'EUCLIDE) à la base axiomatique tronquée, on peut tirer des conséquences de cette nouvelle base axiomatique (de cette base axiomatique modifiée) avec l'intention et dans l'espoir d'aboutir à une contradiction. La rencontre d'une telle contradiction assurerait alors (par l'absurde) la seule validité du cas euclidien. Mais, encore une fois, est-il certain qu'il existe, parmi les conséquences de la nouvelle base axiomatique, des énoncés incompatibles entre eux ? Nous ferons par la suite un essai assez longuement poursuivi, en commençant par examiner ce que devraient être les propriétés des parallèles « hyperboliques ». Le résultat pourra sembler étrange : les différences avec la géométrie euclidienne vont s'ajouter les unes aux autres, mais la contradiction ne se réalisera pas. Pour être convaincant, cet essai devra être poursuivi avec une ténacité que certains lecteurs trouveront peut-être lassante. Si tel était le cas, il n'y aurait pas d'inconvénient sérieux à ne pas trop s'attarder aux paragraphes 148 et 149.

B. Le modèle de POINCARÉ

I. *LES MOYENS MATHÉMATIQUES*

128. LE CALCUL DES NOMBRES COMPLEXES. La section qui va suivre est d'un caractère tout différent de celui de la précédente. La démonstration du théorème de l'alternative ne faisait que reprendre l'analyse axiomatique du chapitre III, pour la compléter, il est vrai, sur un point de grande importance; les moyens dont nous disposions pour démontrer ce théorème nous étaient strictement prescrits par le cadre axiomatique dans lequel nous nous retrouvions.

Dans cette section nous reprendrons, au contraire, la liberté de mettre en œuvre normalement, c'est-à-dire sans précautions axiomatiques spéciales, un certain ensemble de moyens mathématiques classiques et, d'ailleurs, relativement élémentaires. L'emploi des nombres complexes est, en effet, d'une grande commodité pour traiter certains chapitres de la géométrie du plan (de la géométrie des cercles en particulier). Pour l'expérience (de caractère géométrique) que nous avons en vue, c'est précisément à un certain nombre de résultats géométriques de ce genre que nous devrons avoir recours.

Ce paragraphe aura donc un caractère simplement auxiliaire : il n'a pour but que de nous mettre en mains un certain nombre de moyens mathématiques dont il est commode de se servir.

Nous commençons par rappeler brièvement, à l'intention de nos lecteurs non

mathématiciens, les notions et les propriétés dont nous allons nous servir.

On appelle « nombres complexes » les expressions $a + bi$, a et b représentant des nombres réels quelconques, les règles de calcul pour ces nombres complexes étant par définition les mêmes que pour les nombres réels, augmentées de la règle $i \cdot i = i^2 = -1$.

On a donc par exemple :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

et

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd$$
$$= ac - bd + (bc + ad)i;$$

a et b étant des nombres réels, on dit que a est la partie réelle, bi la partie imaginaire du nombre complexe $a + bi$. Un nombre complexe n'est nul que si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont simultanément nulles. On en déduit que deux nombres complexes ne sont égaux que s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Si dans un plan on choisit un système d'axes cartésiens, on peut représenter le nombre complexe $z = x + iy$ par le point de coordonnées (x,y). On fait ainsi correspondre à chaque nombre complexe un point du plan et réciproquement. En particulier, les nombres réels (qui peuvent être considérés comme des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle) correspondent de cette façon aux points de l'axe des x que, pour cette raison, nous appellerons parfois l'axe réel. Nous appellerons le plan ainsi mis en correspondance avec l'ensemble des nombres complexes le *plan de la variable complexe*, et parlerons indifféremment du nombre complexe z ou du point z, ce point z étant précisément le point qui correspond au nombre z.

Il est souvent utile de passer à une représentation quelque peu différente, celle qui fait correspondre au nombre complexe $z = x + iy$ non plus le point z de coordonnées (x,y), mais le *vecteur* $\overrightarrow{Oz}$, de composantes (x,y). Rappelons que deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes composantes, c'est-à-dire si les flèches qui les représentent sont parallèles, de même sens et de même longueur, sans être nécessairement appliquées à la même origine.

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes, z leur somme :

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Dans la deuxième interprétation, z est représenté par le vecteur de composantes $x_1 + x_2$ et $y_1 + y_2$; ce vecteur est la somme (la résultante) des deux vecteurs $\overrightarrow{Oz_1}$, de composantes (x_1,y_1), et $\overrightarrow{Oz_2}$, de composantes (x_2,y_2) (fig. 81).

On obtient ainsi une interprétation géométrique simple de l'addition de deux nombres complexes : celle-ci se traduit par l'addition des vecteurs correspondants. Non moins simple est l'interprétation de la soustraction :

Soit $z = z_1 - z_2$, et, par suite, $z_1 = z + z_1$. z est donc représentée par le vecteur $\overrightarrow{z_1z_2}$.

Pour obtenir une interprétation simple de la multiplication et de la division, on passe des coordonnées ordinaires aux coordonnées polaires (fig. 82) :

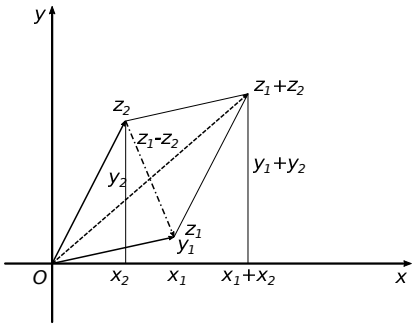


FIG. 81

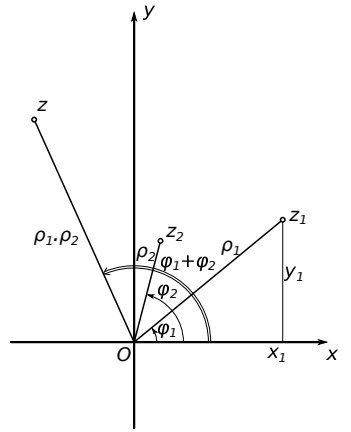


FIG. 82

Appelons ρ la longueur du vecteur $\overrightarrow{Oz}$, φ la mesure de l'angle que doit décrire l'axe Ox pour venir s'appliquer sur $\overrightarrow{Oz}$. On appelle ρ le *module* ou la *valeur absolue* du nombre z, φ son *argument*; φ n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près.

On écrit aussi $\rho = |z|$.

On voit en particulier que l'argument d'un nombre réel est 0 si ce nombre est positif, π si ce nombre est négatif.

On a (par définition même des fonctions trigonométriques),

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

et

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il s'ensuit :

$$z = x + iy = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Soient maintenant z_1 et z_2, deux nombres complexes, de modules ρ_1 et ρ_2 et d'arguments φ_1 et φ_2, et soit z leur produit. On a :

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$
$$= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$
$$= \rho_1 \rho_2 \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\}.$$

Mais, d'après des formules classiques,

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin (\varphi_1 + \varphi_2),$$

de sorte que finalement :

$$z = \rho_1 \cdot \rho_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}.$$

On a donc la règle suivante :

Pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie leurs modules et on additionne leurs arguments.

Enfin pour obtenir une interprétation de la division, posons

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \ (z_2 \neq 0) \text{ et par suite } z_1 = z \cdot z_2;$$

si ρ_1, ρ_2, ρ et φ_1, φ_2, φ sont respectivement les modules et les arguments de z_1, z_2 et de z, on a d'après ce qui précède :

$$\rho_1 = \rho_2 \cdot \rho \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi;$$

calculant ρ et φ, on en tire la règle de la division que voici :

le quotient de deux nombres complexes a pour module le quotient de leurs modules, et pour argument la différence de leurs arguments — différence qui n'est autre que l'angle orienté des vecteurs représentant le numérateur et le dénominateur.

129. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CERCLES. Soient maintenant a, b, z trois nombres complexes quelconques. Nous désignons par (z,a,b) le rapport

$$\frac{z-a}{z-b} = (z,a,b).$$

Le module de ce rapport est le quotient des modules de $z - a$ et $z - b$; c'est donc le quotient $\frac{\overline{az}}{\overline{bz}}$. Quant à son argument, c'est, d'après ce qui vient d'être dit, l'angle dont il faut faire tourner le vecteur $z - b$ pour lui donner le sens et la direction du vecteur $z - a$. C'est donc encore l'angle des vecteurs $\vec{az}$ et $\vec{bz}$, orienté comme dans la figure 83.

Quel est alors le lieu des points z *tels que* (z,a,b) *ait un argument constant* φ *?*

D'après un théorème bien connu de géométrie élémentaire (th. de THALÈS), c'est l'arc capable de l'angle φ sur le segment ab. C'est l'un des deux arcs ab formant à eux deux la circonférence C d'un certain cercle passant par a et b. L'autre arc, que nous appellerons l'arc complémentaire du premier, est l'arc capable de $\varphi + \pi$ (fig. 83). Si l'on fait prendre à φ toutes les valeurs possibles, on obtient ainsi tous les cercles passant par a et b, y compris (comme cas limite) la droite passant par a et b, qui est l'arc capable de l'angle π (pour les points entre a et b), ou de l'angle nul (pour les points extérieurs au segment ab) (fig. 84).

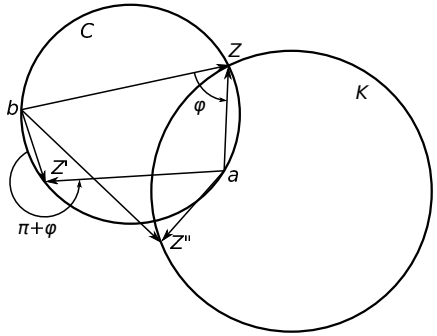


FIG. 83

Quel est, d'autre part, le lieu des points z *pour lesquels le module de* (z,a,b) *a une valeur constante* ρ *?*

C'est le lieu des points z tels que le rapport des distances de z à a et à b soit constant. D'après un second théorème bien connu de géométrie élémentaire (théorème d'APOLLONIUS), c'est un cercle, dit cercle d'APOLLONIUS, K, dont le centre se trouve sur la droite ab (fig. 83).

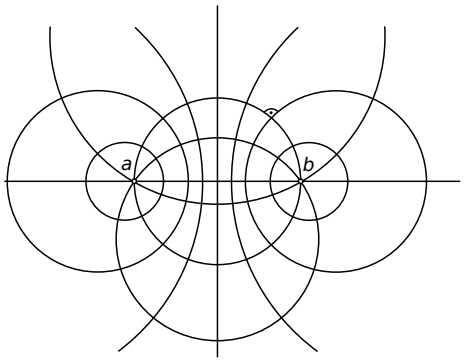


FIG. 84

Si ρ prend toutes les valeurs possibles, de 0 à ∞, on obtient un faisceau de cercles comprenant trois cas limites : pour $\rho = 1$, la médiatrice du segment ab, pour $\rho = 0$ et $\rho = \infty$, les cercles-points a et b (fig. 84).

Ainsi donc nous avons fait correspondre à toute paire de points a et b, deux faisceaux de cercles[1] :

1. Tous les cercles passant par a et b (avec comme cas limite la droite par a et b).

2. Tous les cercles d'APOLLONIUS du segment $\overline{ab}$ (avec comme cas limites :

[1] Dans la théorie que nous développons, il est naturel de considérer une droite comme cas particulier d'un cercle. Lorsque nous nous servirons de cette interprétation, nous parlerons dorénavant de cercles « au sens large ».

la médiatrice de ce segment, le point a et le point b, ces deux points jouant le rôle de cercles de rayon nul).

On démontre en géométrie élémentaire les deux théorèmes suivants (et nous en retrouverons une démonstration plus loin) :

1. Par tout point du plan passe un et un seul cercle de chacun de ces faisceaux (à la seule exception des points a et b).

2. Tout cercle de l'un des faisceaux coupe tous les cercles de l'autre faisceau à angle droit.

130. LE BIRAPPORT DE QUATRE NOMBRES COMPLEXES. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Par définition, nous appelons *birapport* (ou rapport anharmonique) de ces quatre nombres complexes pris dans cet ordre le rapport

$$\frac{(acd)}{(bcd)}.$$

Nous l'écrirons :

$$\frac{(acd)}{(bcd)} = (abcd).$$

On a donc :

$$(abcd) = \frac{\dfrac{a-c}{a-d}}{\dfrac{b-c}{b-d}}.$$

On vérifie sans peine les identités suivantes :

$$(abcd) = (cdab) = (dcba).$$

On a donc aussi

$$(abcd) = (dcba) = \frac{\dfrac{d-b}{d-a}}{\dfrac{c-b}{c-a}}.$$

Voici quelques propriétés du birapport :

1. Le module de ce birapport est égal au quotient des modules de (acd) et de (bcd).

En particulier, pour que ce module soit égal à 1, il faut et il suffit que (acd) et (bcd) aient même module, c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, que les points a et b se trouvent sur un même cercle d'APOLLONIUS du segment $\overline{cd}$.

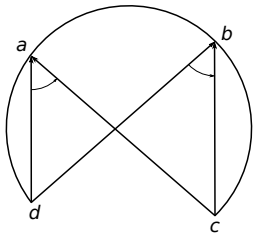


FIG. 85

2. L'argument de ce birapport est égal à la différence des arguments de (acd) et de (bcd). Le birapport aura donc en particulier un argument nul si (acd) et (bcd) ont le même argument, c'est-à-dire si a et b se trouvent sur un même arc de cercle limité par c et d (fig. 85).

3. L'argument du birapport sera π si les arguments de (acd) et de (bcd) diffèrent de π, c'est-à-dire si les points a et b se trouvent sur les arcs complémentaires d'un même cercle passant par c et d (fig. 86).

Or nous savons qu'un nombre est *réel*, si son argument est 0 ou π : positif si l'argument est 0, négatif si l'argument est π. Nous pouvons alors résumer les cas 2 et 3 en disant :

Pour que le birapport (a,b,c,d) *soit réel, il faut et il suffit que les points* a, b, c, d *se trouvent sur un même cercle* (au sens large). En particulier ce birapport est négatif si les arcs ab et cd empiètent l'un sur l'autre; il est positif dans le cas contraire.

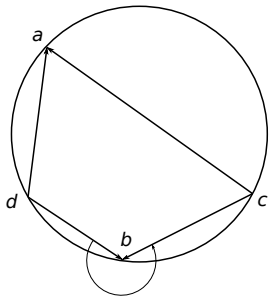


FIG. 86

Plus généralement demandons-nous quel est le lieu des points z tels que le birapport $(zabc)$ ait un module, respectivement un argument, constants (a, b, c restant fixes) :

Comme par définition $(zabc) = \dfrac{(zbc)}{(abc)}$, le module, respectivement l'argument du birapport seront constants si le module, respectivement l'argument de (zbc) sont constants. Donc (fig. 87) :

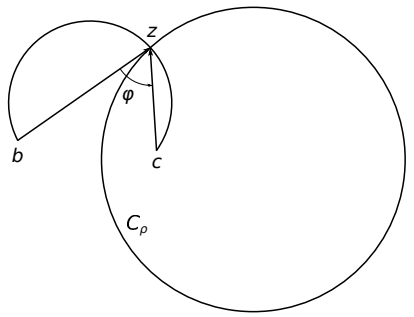


FIG. 87

le lieu des points z tels que $(zabc)$ ait un module constant est un cercle d'APOLLONIUS du segment $\overline{bc}$;

le lieu des points z tels que $(zabc)$ ait un argument constant est un arc de cercle limité par b et c.

Corollaire :

Soient a, b, c trois nombres complexes différents, u un nombre complexe quelconque. Il existe un et un seul nombre z tel que

$$(z,a,b,c) = u.$$

Il serait facile de vérifier cette propriété par le calcul[1]. Mais on peut aussi s'en rendre compte géométriquement : soient ρ le module, φ l'argument de u; les points z tels que (z,a,b,c) ait le module ρ se trouvent sur un cercle d'APOLLONIUS C_ρ de b, c et les points z tels que ce birapport ait l'argument φ se trouvent sur un arc capable de l'angle φ sur bc. Mais cet arc ne peut couper le cercle d'APOLLONIUS qu'en un seul point (fig. 87); c'est le point z cherché.

Considérons pour terminer le birapport $(abcd)$ de quatre nombres quelconques (fig. 88). Soit φ son argument. Si ψ_1 est l'argument de (a,c,d), ψ_2 celui de (b,c,d), nous savons que

$$\varphi = \psi_1 - \psi_2.$$

Menons les cercles par a, c, d et b, c, d et soient θ_1, θ_2 les angles de cd avec les tangentes à ces cercles. (Remarque : on sait qu'il passe toujours un et un seul cercle (au sens large) par trois points.) D'après des théorèmes bien connus, on a $\psi_1 = \theta_1$, $\psi_2 = \theta_2$, de sorte que $\varphi = \theta_1 - \theta_2$. Donc φ n'est autre que l'angle des deux cercles :

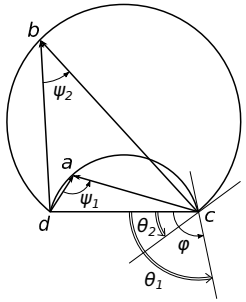


FIG. 88

l'argument du birapport $(abcd)$ est l'angle des deux cercles passant par a, c, d et b, c, d.

(Remarque : notre figure est dessinée de façon à rendre tous les angles positifs. Mais l'énoncé qui précède est général, si l'on tient compte du fait que les arguments des nombres complexes sont des angles *orientés*, qui sont à soustraire comme des quantités *algébriques*, et qui ne sont au surplus déterminés qu'à 360° près.)

131. LES HOMOGRAPHIES DU PLAN DES z. Une homographie du plan des z est une transformation qui fait correspondre à tout point z un point w selon la formule suivante :

(1) $$w = \frac{Az+B}{Cz+D}$$ (A,B,C,D : quatre constantes réelles ou complexes).

Nous excluons d'emblée le cas $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$, c'est-à-dire AD − BC = 0 : dans ce cas w ne dépend pas de z, mais est égal à $\frac{A}{C}$ pour tous les z. Dans ce cas

[1] En effet $(z,a,b,c) = (z,b,c)/(a,b,c)$ par définition. On doit donc avoir $(z,b,c) = (a,b,c) \cdot u$. Posons $(a,b,c) \cdot u = A$. Il suit $(z,b,c) = (z-b)/(z-c) = A$, donc

$$z - b = A(z - c),\ z(1 - A) = b - Ac. \qquad z = (b - Ac)/(1 - A).$$

(le « cas dégénéré »), tous les points z se transforment en un seul point w : ce cas n'a aucune signification pour ce que nous avons en vue.

Nous allons montrer que toute homographie conserve les rapports anharmoniques. En d'autres termes, si a', b', c' et d' sont les transformés de a, b, c et d, on a

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

En voici la vérification :

On a, par hypothèse :

$$a' = \frac{Aa+B}{Ca+D}$$ et les égalités analogues pour b', c' et d'.

Donc

$$c' - a' = \frac{Ac+B}{Cc+D} - \frac{Aa+B}{Ca+D}$$

$$= \frac{(Ac+B)(Ca+D) - (Aa+B)(Cc+D)}{(Cc+D)(Ca+D)}$$

et, en effectuant

$$= \frac{(AD-BC)(c-a)}{(Cc+D)(Ca+D)}$$

On a de façon analogue, en remplaçant a par b :

$$c' - b' = \frac{(AD-BC)(c-b)}{(Cc+D)(Cb+D)}$$

et par suite :

$$\frac{c'-b'}{c'-a'} = \frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{Ca+D}{Cb+D}$$

On peut écrire aussi, en remplaçant c par d

$$\frac{d'-b'}{d'-a'} = \frac{d-b}{d-a} \cdot \frac{Ca+D}{Cb+D}$$

Il en découle naturellement :

$$(a'b'c'd') = \frac{\frac{d'-b'}{d'-a'}}{\frac{c'-b'}{c'-a'}} = \frac{\frac{d-b}{d-a}}{\frac{c-b}{c-a}} = (abcd)$$

C.Q.F.D.

(Remarque : ce calcul n'est pas valable si AD − BC = 0; mais ce cas a été exclu.)

Corollaires :

1. Soient $w = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$, $(AD - BC \neq 0)$ (1)

une homographie, et (a,a'), (b,b'), (c,c') trois paires de points correspondants. L'équation (1) de l'homographie peut encore s'écrire :

$$(z,a,b,c) = (w,a',b',c'). \tag{2}$$

C'est une conséquence immédiate de la conservation du birapport : soit z un point quelconque, w le point qui lui correspond. Nous savons que l'équation (2) doit être vérifiée pour la paire (z,w). Nous savons d'autre part que, z ayant été choisi, il n'existe qu'un seul w capable de donner au birapport (w,a',b',c') la valeur (z,a,b,c). L'équation (2) fait donc bien correspondre au point z l'image w que l'homographie (1) lui attribue.

2. Réciproquement soient a, b, c, a', b', c' six nombres complexes, a, b, c différents entre eux d'une part, a', b', c' d'autre part. L'équation

$$(z,a,b,c) = (w,a',b',c') \tag{2}$$

est alors l'équation d'une homographie qui fait correspondre a' à a, b' à b, c' à c.

En effet, en explicitant les deux membres de (2), on s'aperçoit immédiatement que si $z = a$, w prend la valeur a', etc.

Nous sommes ainsi en mesure d'écrire directement, sous la forme (2), l'équation d'une homographie dont on donne trois paires de points correspondants.

3. Toute homographie conserve les cercles (transforme les cercles au sens large, en cercles, au sens large) :

Pour tout z d'un cercle déterminé par les trois points a, b, c, on a :

$$(zabc) = \text{réel};$$

soit z' le transformé de z. On a :

$$(z'a'b'c') = (zabc) = \text{réel}.$$

Cela signifie tout simplement que z' se trouve sur un cercle passant par a', b' et c'.

4. Les homographies conservent les angles (sont des transformations conformes).

Pour l'angle de deux cercles, le fait est presque évident. Soient b et c les points communs à deux cercles C_1 et C_2, a_1 un troisième point sur C_1, a_2 un troisième point sur C_2. Nous avons vu que l'angle des deux cercles est donné par l'argument du rapport anharmonique

$$\alpha = \arg(a_1a_2bc).$$

Cet argument est conservé, puisque le rapport anharmonique l'est lui-même.

On en déduit que l'angle de deux courbes quelconques est également conservé, puisque cet angle est égal à l'angle de deux cercles tangents à ces courbes en leur point d'intersection.

5. Les homographies forment un groupe[1].

La chose est immédiate :

la transformation inverse de l'homographie $(z,a,b,c) = (z',a',b',c')$ (c'est-à-dire la transformation qui fait correspondre au point z' le point z dont il était l'image) est donnée par la même équation $(z',a',b',c') = (z,a,b,c)$.

Soit d'autre part H_1 une première homographie qui transforme a en a', b en b', c en c'. Elle est déterminée par ces trois paires de points correspondants.

Soit H_2 une seconde homographie qui transforme a' en a'', b' en b'' et c' en c''.

Elle est aussi déterminée.

H_1 s'exprime par l'équation $(z'a'b'c') = (zabc)$

H_2 par $(z''a''b''c'') = (z'a'b'c')$.

Il en résulte $(z''a''b''c'') = (zabc)$.

C'est bien l'équation d'une troisième homographie qui fait correspondre z'' à z (en même temps que a'' à a, b'' à b et c'' à c).

132. HOMOGRAPHIES PARTICULIÈRES. Nous allons distinguer, dans ce paragraphe, un certain sous-groupe du groupe total des homographies; nous appellerons ce sous-groupe le groupe des *homographies-H*.

Commençons par choisir une circonférence; pour fixer les idées, ce sera la circonférence de rayon 1 et de centre O. Nous la désignerons par ω et par Ω la surface circulaire qu'elle limite, sans y comprendre les points de ω.

Il existe des homographies ayant la propriété de transformer Ω en lui-même : ce sont ces homographies que nous appellerons les homographies-H.

[1] On dit qu'un ensemble de transformations (par exemple l'ensemble des déplacements du plan) forme un groupe, s'il a les propriétés suivantes: *a)* toute transformation T appartenant à l'ensemble admet une transformation inverse qui appartient aussi à l'ensemble; *b)* si deux transformations T_1, T_2 appartiennent toutes les deux à l'ensemble, la transformation résultante obtenue en effectuant d'abord T_1, puis T_2 appartient aussi à l'ensemble.

Si un ensemble de transformations appartenant toutes à un groupe G de transformations forment elles-mêmes un groupe, on dit que ce dernier est un *sous-groupe* de G. Exemple : le sous-groupe des translations du groupe des déplacements du plan.

Voici des exemples de telles homographies :

l'homographie-identité $w = z$

les homographies $w = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot z$,

qui sont des rotations du plan, d'angle φ et de centre O.

Si une homographie transforme Ω en lui-même, elle transforme aussi la circonférence ω en elle-même. Mais la réciproque n'est pas vraie : une homographie transformant ω en elle-même peut fort bien transformer Ω en l'extérieur de ω; un exemple en est l'homographie $w = \frac{1}{z}$. (En fait, pour qu'une homographie qui conserve ω transforme Ω en lui-même, il faut et il suffit qu'elle conserve le sens de rotation sur ω.)

Les homographies-H forment un groupe, sous-groupe du groupe de toutes les homographies : en effet, si une homographie transforme Ω en lui-même, il en est de même pour l'homographie inverse; et si deux homographies H_1 et H_2 transforment Ω en lui-même, on en pourra dire autant de l'homographie résultante obtenue en effectuant d'abord H_1, puis H_2.

La propriété fondamentale du groupe des homographies-H.

Rappelons l'une des propriétés caractéristiques du groupe des déplacements d'un plan (sur lui-même). Envisageons, à deux endroits quelconques du plan, deux figures formées chacune d'un point et d'une direction par ce point (la première formée du point A et de la direction α, la seconde du point X et de la direction ξ) (fig. 89); il existe, un déplacement bien déterminé et un seul qui applique la première figure sur la seconde : A sur X et α sur ξ.

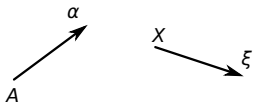


FIG. 89

Le groupe des homographies, nous allons le montrer, possède la même propriété sur le domaine Ω.

Notons tout d'abord la propriété suivante, dont nous aurons à faire souvent usage :

une homographie-H transforme tout cercle orthogonal à ω en un cercle ayant la même propriété.

Cela résulte immédiatement du fait qu'une telle transformation conserve à la fois :

la propriété d'être un cercle (au sens large),

les angles, donc l'orthogonalité,

et enfin ω, donc l'orthogonalité sur ω.

Nous démontrons la proposition suivante :

Soient X et A deux points quelconques de Ω, ξ et α des directions par X et par A respectivement (fig. 90). Il existe une homographie-H et une seule qui applique la figure (X,ξ) sur (A,α).

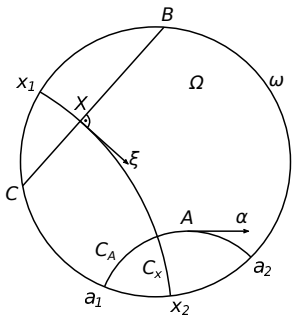


FIG. 90

Remarquons d'abord que, par tout point X et touchant une droite quelconque en ce point, il passe exactement un cercle orthogonal à ω : élevons, en effet, la perpendiculaire en X à cette droite, et soient B et C les points où elle coupe ω. Parmi les cercles du faisceau passant par B et C, deux sont orthogonaux au cercle cherché : ω et la droite BC. Ce cercle est donc l'un des cercles d'APOLLONIUS dans le faisceau dont B et C sont les cercles-point, celui pour lequel le rapport caractéristique (v. n° 129) est égal à $\frac{XB}{XC}$.

Ce cercle est univoquement déterminé.

Soit C_X ce cercle, et soient x_1 et x_2 ses points d'intersection avec ω. De même, il passe par A un seul cercle C_A orthogonal à ω et tangent en A à la direction α; soient a_1 et a_2 ses points d'intersection avec ω.

Une homographie-H appliquant X sur A et la direction ξ en X sur la direction α en A doit nécessairement appliquer le cercle C_X sur le cercle C_A; nous savons en effet que toute homographie-H transforme le cercle C_X en un autre cercle orthogonal à ω, or C_A est le seul cercle orthogonal à ω qui passe par A dans la direction α.

Supposons les points d'intersection de C_X et C_A avec ω dénotés de telle façon que la direction ξ soit celle de x_1 vers x_2 dans Ω, et la direction α celle de a_1 vers a_2 dans Ω. Notre homographie-H cherchée devra alors appliquer x_1 sur a_1, x_2 sur a_2 et X sur A. Mais ces trois paires de points correspondants déterminent une homographie de façon univoque. Notre démonstration sera terminée lorsque nous aurons montré que c'est une homographie-H. La chose est presque évidente : cette homographie, qui conserve les angles et les cercles, applique le cercle orthogonal à C_X par x_1 et x_2 — c'est-à-dire ω — sur le cercle orthogonal à C_A par a_1 et a_2 — c'est-à-dire ω : elle applique donc ω sur ω. D'autre part elle applique Ω sur Ω, puisqu'elle applique le point X de Ω sur le point A de Ω (et non sur un point extérieur). Notre homographie est donc bien une homographie-H, d'ailleurs univoquement déterminée.

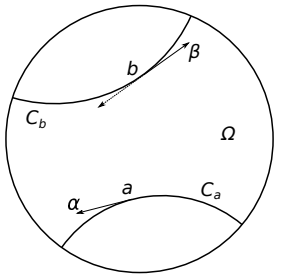


FIG. 91

Corollaire : soient a et b deux points de Ω, C_a un cercle orthogonal à ω passant par a, C_b un cercle orthogonal à ω passant par b. Il existe exactement

deux homographies-H appliquant a sur b et C_a sur C_b; à une orientation donnée sur C_a, l'une fait correspondre l'un des sens de cheminement possibles sur C_b, et la seconde l'autre (fig. 91).

En effet, le choix d'une orientation sur C_a définit une direction α tangente en a à C_a; le choix d'une orientation sur C_b définit une direction β tangente en b à C_b; d'après ce qui précède, une homographie-H est entièrement déterminée par l'exigence d'appliquer a sur b et α sur β; les deux homographies-H correspondent alors aux deux choix possibles de β.

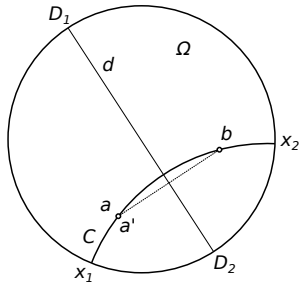


FIG. 92

En particulier : soient a et b deux points de Ω. Il existe une homographie-H et une seule qui permute a et b (c'est-à-dire qui applique a sur b et b sur a) (fig. 92).

Démonstration : remarquons tout d'abord qu'il existe un seul cercle orthogonal à ω et passant par a et b; nous appellerons ce cercle C[1]. Nous savons que toute homographie-H transforme un cercle orthogonal à ω en un cercle orthogonal à ω. En particulier donc, une homographie-H interchangeant a et b doit transformer le cercle C en lui-même.

D'après ce qui précède, il n'existe que *deux* homographies-H appliquant a sur b et le cercle C sur lui-même. L'une d'entre elles, celle qui conserve l'orientation sur C, ne peut certainement pas appliquer le point b sur le point a, puisque ceci implique un renversement d'orientation sur C (le sens de a vers b, dans Ω, devant être transformé dans le sens de b vers a, dans Ω).

Soit alors U l'homographie-H qui applique a sur b en retournant l'orientation sur C. Nous allons montrer que celle-ci — la seule qui entre en ligne de compte — applique effectivement le point b sur le point a :

Soient x_1 et x_2 les points d'intersection de C avec Ω, a' le transformé de b par U. Nous voulons montrer que $a' = a$. U applique x_1 sur x_2 et x_2 sur x_1, puisque U retourne l'orientation sur C; d'autre part U applique a sur b, et b sur a'; en raison de la conservation du birapport nous avons :

$$(x_1x_2ab) = (x_2x_1ba').$$

Mais on vérifie aisément, sur la définition du birapport, que :

$$(x_1x_2ab) = (x_2x_1ba).$$

[1] Soit d la médiatrice du segment ab, D_1 et D_2 les points où cette médiatrice coupe ω. C'est alors le cercle d'APOLLONIUS de ω ayant son centre sur d et dont le rapport caractéristique est égal à aD_1/aD_2. On obtient un diamètre de ce cercle en partageant le segment D_1D_2 intérieurement et extérieurement dans le rapport indiqué.

On a donc :

$$(x_2x_1ba) = (x_2x_1ba'),$$

d'où l'on tire :

$$a' = a,$$ C.Q.F.D.

II. *LE VOCABULAIRE*

133. LES DEUX COLONNES. L'expérience dont nous avons plusieurs fois parlé consistera en une certaine transcription de la géométrie euclidienne. (Nous avons déjà expliqué au chapitre IV comment on peut obtenir un modèle par transcription.) Celle dont il va être question substitue aux dénominations usuelles de la géométrie élémentaire de nouvelles dénominations extraites, elles aussi, du vocabulaire de la géométrie élémentaire. Par exemple, certains arcs de cercles de la géométrie élémentaire perdront le nom « d'arcs de cercles » pour prendre celui de « droites ». C'est là une mesure qui, à première vue, peut paraître arbitraire. Pour une part, elle l'est certainement. Mais cette transcription est faite dans un but déterminé qui, une fois atteint, rendra la chose parfaitement claire.

Pour éviter la possibilité d'une confusion entre les anciennes dénominations et les nouvelles, nous ferons suivre ces dernières d'un *h*, première lettre du mot « hyperbolique » qui s'expliquera par la suite. Ainsi, les arcs de cercles dont nous venons de parler prendront le nom de droites-*h*.

Nous allons maintenant établir systématiquement le dictionnaire de la transcription. Dans une première colonne (colonne de gauche) figureront des notions et des énoncés de la géométrie élémentaire, avec leurs significations habituelles et dans une seconde colonne (colonne de droite), les mêmes notions et les mêmes énoncés dans le langage-*h*.

1. Le cercle Ω (donc sans les points de ω)	*sera dit*	le plan-*h*.
2. Un point de Ω	*sera dit*	un point-*h*.
3. Un arc de cercle (au sens large[1]) intérieur à Ω, limité par ω, et orthogonal à ω	*sera dit*	une droite-*h*.

(Ces arcs de cercles particuliers seront appelés par la suite arcs-Γ; parmi eux figurent donc aussi les diamètres de ω.) (Fig. 93.)

[1] Rappelons qu'au sens large, une droite doit être considérée comme un cercle.

4. L'incidence entre arcs-Γ et points de Ω	*restera*	l'incidence des éléments-*h* correspondants.

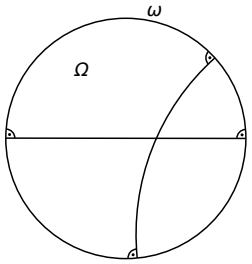


FIG. 93

Interrompons ici la constitution du dictionnaire; nous la reprendrons dans un instant. Ce dont nous disposons permet déjà de traduire quelques « phrases ».

Dans la colonne de gauche, nous allons inscrire quelques énoncés de la géométrie élémentaire. Ce seront d'ailleurs, pour une part, des propriétés si simples que nous pourrons nous dispenser de les démontrer. Mais ils ne seront pas pris au hasard; bien au contraire ! Nous voulons les choisir tels que leur traduction dans la langue-*h* soit formellement identique à l'ensemble des axiomes de l'incidence dont il fut question au chapitre III.

Voici ces énoncés et leurs correspondants :

L'incidence dans le plan h

Par deux points différents de Ω, il passe au moins un arc-Γ.	I_1. Par deux points-*h* différents, il passe au moins une droite-*h*.
Par deux points différents de Ω, il passe au plus un arc-Γ.	I_2. Par deux points-*h* différents, il passe au plus une droite-*h*.
Sur tout arc-Γ, il y a au moins deux points différents.	I_3. Sur toute droite-*h*, il y a au moins deux points-*h* différents.
Il existe au moins trois points de Ω qui ne sont pas sur un même arc-Γ.	I_4. Il existe au moins trois points-*h* qui ne sont pas sur une même droite-*h*.

Comme nous en avions exprimé l'intention, nous avons fait apparaître à droite quatre énoncés grammaticalement identiques (si l'on fait abstraction de la lettre *h*) aux quatre axiomes du premier groupe, du groupe de l'incidence. Nous allons en faire de même pour le second groupe, pour le groupe des axiomes de l'ordination. Nous ne croyons pas inutile de le faire même deux fois, conformément aux deux essais proposés au chapitre III.

Mais il nous faut tout d'abord introduire quelques nouveaux mots dans notre dictionnaire en voie de formation.

Nous parlerons de l'ordre de succession des points-*h* sur un arc-Γ, de segments d'arcs-Γ déterminés par leurs extrémités, et de l'orientation de tels segments : on comprendra certainement sans autres explications de quoi il s'agit.

5. Un segment orienté d'un arc-Γ	*sera dit*	un segment orienté de droite-*h*.
6. Deux segments « de même sens » sur un arc-Γ	*deviendront*	deux segments de-même-sens-*h* sur une droite-*h*.
Sur un arc-Γ la relation « de même sens » sera notée par : p_Γ		Sur une droite-*h*, la relation de-même-sens-*h* sera notée par : p_h
7. A, B et C étant trois points d'un arc-Γ, B peut se trouver (sur cet arc) « entre » les deux autres. Notons-le par le symbole $(ABC)_\Gamma$.	*Nous dirons que*	B est entre-*h* A et C sur une droite-*h*. On le notera par le symbole $(ABC)_h$.
8. L'ordre de succession des points sur un arc-Γ	*définira*	l'ordre de succession des points sur une droite-*h*, l'ordre linéaire-*h*.

Nous pouvons passer maintenant aux énoncés dont la traduction nous fournira les phrases formellement identiques aux axiomes du groupe II.

134. L'ORDINATION SUR UNE DROITE-*h*

(Premier essai)

La relation « de même sens », sur un arc-Γ est symétrique, transitive et réflexive.

En d'autres termes, la relation p_Γ satisfait aux trois axiomes de l'équivalence.

La relation p_h satisfait aux trois axiomes suivants « de l'équivalence » :

II'_1. $AB p_h CD \rightarrow CD p_h AB$

II'_2. $\left.\begin{matrix} AB p_h CD \\ CD p_h EF \end{matrix}\right\} \rightarrow AB p_h EF$

II'_3. $AB p_h AB$.

L'ordre de succession des points sur un arc-Γ est linéaire, au sens large. (Voir chapitre III, n° 80.) La relation p_Γ sur un arc-Γ satisfait donc aux mêmes conditions que la relation *p* sur une droite.

La relation p_h satisfait aux exigences « identiques » aux axiomes II'_4, II'_5, II'_6 et II'_7 du chapitre III.

D'un seul coup, la traduction nous livre tout le groupe des « axiomes » que nous désirons.

(Deuxième essai)

La relation « entre » sur un arc-Γ satisfait, elle aussi, exactement aux mêmes exigences (axiomatiques) que la relation « entre » sur une droite.

La relation entre-*h* satisfait aux mêmes « axiomes » II_1, II_2, II_3 et II_4, que la relation entre.

La traduction se fait en bloc.

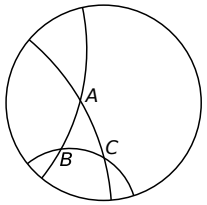


FIG. 94

Nous n'avons pas eu grand mal à faire apparaître à droite les énoncés formellement identiques aux axiomes de l'ordination sur une droite[1].

L'ordination dans le plan-h

Pour passer à l'ordination dans le plan-*h*, il suffit d'écrire à droite l'équivalent grammatical de l'axiome de PASCH, et de le « re »-transcrire dans la colonne de gauche.

Il nous faut naturellement introduire à cet endroit la notion du triangle avec ses sommets, côtés, etc. dans notre dictionnaire :

Appelons triangle-Γ un triangle curviligne déterminé par trois points A, B, C de Ω, ses sommets, et dont les côtés sont les arcs-Γ joignant ses sommets deux à deux (fig. 94).

Un triangle-*h* est déterminé par ses trois sommets A, B, C. Ses côtés sont les segments-*h* joignant ses sommets deux à deux.

Énonçons maintenant (à droite) l'axiome formellement identique à l'axiome de PASCH :

Un arc-Γ qui coupe le côté AB d'un triangle-Γ ABC, et qui ne passe pas par C, coupe l'un au moins des deux autres côtés AC et BC.

II‴. Une droite-*h* qui coupe le côté AB d'un triangle-*h* ABC, et qui ne passe pas par C, coupe l'un au moins des deux autres côtés AC et BC[2].

[1] On résume mathématiquement ce qui précède (à gauche) par l'énoncé suivant : du point de vue des propriétés d'ordination, un arc-Γ sans ses extrémités ne se distingue en rien d'une droite (un arc-Γ est topologiquement équivalent à une droite).

[2] Le lecteur critique remarquera que II‴ n'est pas exactement la « transcription-*h* » de l'axiome appelé « axiome de PASCH » au chapitre III, qui était : axiome II″ : Une droite qui coupe le côté AB d'un triangle ABC, et ne passe pas par C, coupe *soit le côté* BC, *soit le côté* AC.

En fait, dans l'édification de la géométrie euclidienne, il suffit de poser l'axiome de PASCH sous la forme affaiblie II‴ « ... coupe *l'un au moins* des deux autres côtés AC et BC »; II″ devient alors

Nous ne démontrons pas l'énoncé de gauche, qui est d'ailleurs assez évident par lui-même.

135. LA CONGRUENCE. Désirant pousser aussi loin que possible l'identification formelle entre le système d'axiomes de la géométrie élémentaire et le système des énoncés de la colonne de droite, nous voulons maintenant retrouver les axiomes des groupes III′, III″ et III‴ sur la congruence. Rappelons que III′ porte sur l'égalité des segments (énoncés d'abord pour l'égalité entre segments d'une même droite, les axiomes du groupe III′ avaient été ensuite étendus à l'égalité entre segments dans le plan, au n° 93 du chapitre III) et III″ sur l'égalité des angles, alors que III‴ équivaut, pour l'essentiel, au premier cas d'égalité des triangles.

Nous avons déjà défini les segments-*h*. Nous définissons les angles-*h* de la façon la plus simple que l'on puisse imaginer :

L'angle de deux arcs-Γ *sera par définition* l'angle-*h* des deux droites-*h* correspondantes.

Pour pouvoir retrouver les groupes d'axiomes III′ et III″, il nous faut encore définir l'égalité-*h* pour les segments-*h* d'une part, pour les angles-*h* d'autre part. Nous commençons par l'égalité des angles dans le plan-*h*, parce qu'elle nous livre immédiatement tout le groupe III″.

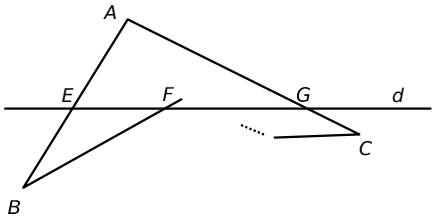


FIG. 95

une *proposition* démontrable (par l'absurde) comme suit:

Soit *d* une droite qui coupe les *trois* côtés AB, BC et CA du triangle ABC, respectivement aux points E, F et G (fig. 95). Considérons le triangle AEG : la droite BC coupe le côté EG en F, mais ne rencontre ni le segment AE ni le segment AG. (En effet, par hypothèse, BC coupe le support de AE en B; ce point d'intersection est unique; d'autre part, par hypothèse, E est situé entre A et B; B n'est alors pas situé entre A et E; nous pouvons observer ainsi le jeu de nos axiomes.) La droite BC n'obéit donc pas à notre version affaiblie de l'axiome de PASCH. L'hypothèse que *d* coupe les trois côtés du triangle à la fois est donc fausse; si *d* coupe le côté AB, *d* coupe donc *soit* AC, *soit* BC, comme l'exige II″.

L'égalité entre angles d'arcs-Γ *sera par définition* l'égalité-*h* entre angles-*h*.

L'égalité entre angles d'arcs-Γ satisfait visiblement aux mêmes axiomes III''_{1-6} que l'égalité entre angles de droites. (C'est évident pour III''_{1-5}; de son côté III''_6 découle de la remarque que, par tout point de Ω il passe un arc-Γ dans toute direction, et un seul.)

III''_{1-6}. L'égalité-*h* entre angles-*h* satisfait aux axiomes III''_{1-6} du chapitre III.

Il sera sensiblement plus difficile de définir l'égalité-*h* entre segments-*h*. Reportons-nous, pour nous guider, à la définition « naïve » de l'égalité entre segments, dans la géométrie élémentaire :

Deux segments sont égaux si on peut les appliquer l'un sur l'autre.

Nous pourrions donner ici une définition tout analogue, si nous savions comment définir l'application-*h* d'un segment-*h* sur un autre. La première idée qui vient à l'esprit est d'essayer l'application ordinaire d'un segment d'arc-Γ sur un autre. Mais cette idée se révèle tout de suite impraticable. En effet, alors que des segments de droites ne se distinguent les uns des autres que par leurs positions et par leurs longueurs, les segments d'arcs-Γ se caractérisent en plus par les rayons des arcs-Γ sur lesquels ils sont placés. Le report d'un segment-*h* donné sur une droite-*h* donnée ne serait donc possible que dans des cas particuliers. Dans ces conditions, l'analogie entre la colonne de droite et la colonne de gauche s'évanouirait.

Il nous faut analyser d'un peu plus près ce qu'il faut entendre, en géométrie élémentaire, par « appliquer un segment sur un autre ».

En fait, lorsque nous appliquons un segment de droite sur un autre, c'est tout le plan que nous appliquons sur lui-même. Nous opérons, comme on dit, un « déplacement du plan », grâce auquel le segment lui-même est déplacé.

Un tel déplacement du plan est une transformation ayant (en tout cas) les propriétés suivantes :

1. Un déplacement du plan conserve les droites (la transformée d'une droite est de nouveau une droite).

2. Un déplacement du plan conserve les angles en grandeur et en orientation.

3. Soient AB et CD deux segments. Seul l'un des deux énoncés suivants est juste :

a) il n'existe aucun déplacement du plan appliquant AB sur CD (les deux segments sont alors inégaux);

b) il existe deux et seulement deux déplacements du plan appliquant AB sur CD (les deux segments sont dans ce cas égaux; l'un des déplacements applique A sur C et B sur D; l'autre applique A sur D et B sur C).

Ces remarques ramènent notre attention sur les homographies-H dont nous avons parlé à la fin de la section précédente. Aussi proposons-nous la définition suivante :

Une homographie-H dans Ω *sera dite* un déplacement-*h* du plan-*h*.

Nous l'avons vu, une homographie-H applique tout segment d'arc-Γ sur un segment d'arc-Γ.

Par définition : deux segments-*h* AB et CD pouvant être appliqués l'un sur l'autre par un déplacement-*h* seront dits *congruents-h*, ou *égaux-h*. Nous écrirons : $AB \overset{h}{=} CD$,

Les homographies-H forment un groupe de transformations.

III'_{1-3}. La congruence-*h* entre segments-*h* satisfait aux « axiomes de l'équivalence[1] ».

Il existe une homographie-H appliquant le segment AB d'arc-Γ sur le segment BA (cf. n° 132).

III'_4. L'égalité-*h* $AB \overset{h}{=} BA$ est valable pour tout segment-*h* AB.

Comme nous l'avons vu au n° 132, il existe deux homographies-H : H_1 et H_2 appliquant un arc-Γ D_1 sur un arc-Γ D_2, et un point A de D_1 sur un point A′ de D_2. Toutes les deux conservent l'ordre linéaire sur D_1; mais elles le font apparaître orienté sur D_2 une fois dans un sens et une fois dans le sens opposé. (L'une applique ce qui est « à gauche » de A sur ce qui est « à gauche » de A′, et l'autre sur ce qui est « à droite ».) Soient alors A, B, C, trois points sur D_1, tels que $(ABC)_\Gamma$, et A′, B′, C′ trois points sur D_2 tels que $(A'B'C')_\Gamma$ (fig. 96).

III'_6. Tout segment AB peut être reporté univoquement dans les deux sens sur une droite-*h* à partir d'un point A′ quelconque de cette droite.

[1] Cf. n° 91, ch. III.

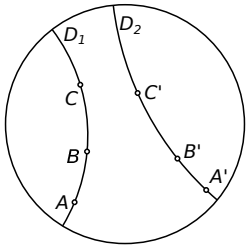


FIG. 96

Nous savons qu'il existe deux homographies-H, et deux seulement appliquant D_1 sur D_2 et B sur B′. L'une seulement de ces deux homographies fait correspondre à l'orientation définie sur D_1 par l'ordre de succession A, B, C l'orientation définie sur D_2 par l'ordre de succession A′, B′, C′. Appelons cette homographie U. S'il existe une homographie-H appliquant A sur A′ et B sur B′, ce ne peut être que U. De même, s'il existe une homographie-H appliquant B sur B′ et C sur C′, ce doit être encore U. Dans ce cas U applique donc A sur A′ et C sur C′:

Si A, B, C sont trois points se suivant dans cet ordre sur un arc-Γ, et A′, B′, C′ trois point se suivant dans cet ordre sur un arc-Γ, et s'il existe une homographie-H appliquant le segment d'arc-Γ AB sur A′B′, et une homographie-H appliquant BC sur B′C′, il existe une homographie-H appliquant AC sur A′C′ (et ces trois homographies-H sont identiques).

III′$_5$. Si B est entre A et C sur une droite-*h*, et B′ entre A′ et C′ sur une autre ou sur la même droite-*h*, et si AB $\overset{h}{=}$ A′B′ et BC $\overset{h}{=}$ B′C′, alors AC $\overset{h}{=}$ A′C′.

On peut définir maintenant une addition des segments-*h* et développer toute la théorie qui s'y rattache.

Reste à mettre en relation l'égalité des angles et l'égalité des segments.

Écrivons-en l'énoncé à droite et la retranscription à gauche.

Si deux triangles-Γ ABC et A′B′C′ sont tels que $\alpha = \alpha'$, et s'il existe une homographie-H qui applique AB sur A′B′, et une homographie-H qui applique AC sur A′C′, alors $\beta = \beta'$ (fig. 97).

III‴. Dans deux triangles-*h* ABC et A′B′C′, les égalités AB $\overset{h}{=}$ A′B′, AC $\overset{h}{=}$ A′C′ et $\sphericalangle$ CAB $\overset{h}{=}$ $\sphericalangle$ C′A′B′ entraînent l'égalité $\sphericalangle$ ABC $\overset{h}{=}$ $\sphericalangle$ A′B′C′.

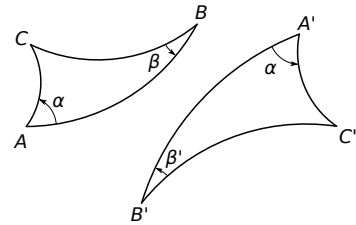


FIG. 97

L'énoncé de gauche n'est aucunement évident. C'est une propriété qui demande au contraire à être démontrée.

Commençons par le cas ou les triangles ABC et A′B′C′ ont la même orientation.

La démonstration consistera simplement à indiquer une homographie-H capable d'appliquer le triangle-Γ ABC sur le triangle-Γ A′B′C′.

On a par hypothèse,

$$AB \overset{h}{=} A'B'.$$

Cela signifie qu'il existe une (et une seule) homographie-H appliquant A sur A′ et B sur B′. Comme cette homographie conserve les angles en grandeur et en orientation, elle applique l'arc-Γ AC orienté de A vers C (qui fait l'angle α avec AB) sur l'arc-Γ A′C′ orienté de A′ vers C′ (qui fait l'angle α avec A′B′). Cette homographie-H est la seule appliquant A sur A′ et l'arc-Γ de A vers C sur l'arc-Γ de A′ vers C′. Elle doit donc appliquer C sur C′, puisque par hypothèse il existe une homographie-H appliquant le segment d'arc-Γ AC sur le segment d'arc-Γ A′C′. Cette homographie-H applique donc le triangle-Γ ABC sur le triangle-Γ A′B′C′. Or elle conserve les angles. Par conséquent $\beta = \beta'$.

Dans le cas où les triangles-Γ ABC et A′B′C′ ont des orientations inverses l'une de l'autre, il suffit d'introduire, comme figure de passage entre ABC et A′B′C′ le triangle A″B″C″ symétrique de A′B′C′ par rapport à un diamètre quelconque de Ω : Les triangles ABC et A″B″C″ ont même orientation et le théorème qui vient d'être établi leur est applicable. La symétrie assure ensuite le passage à A′B′C′.

C.Q.F.D.

136. L'ORDRE CONTINU. Il est presque inutile d'insister sur le fait que les énoncés « de continuité » qu'on introduirait à droite trouveraient immédiatement leur justification à gauche, dans des propriétés de continuité que chacun sait valables. Montrons-le cependant, pour l'énoncé dit « de la suite linéaire bornée ». Le voici :

Une suite infinie et ordonnée de points A_i (situés sur un arc-Γ) converge vers un point limite L possédant les deux propriétés caractéristiques suivantes :	Soit une suite infinie linéairement ordonnée-*h* de points-*h* A_i. Ou bien cette suite n'est pas bornée-*h*[1]; elle ne possède alors pas de point-*h* pour limite et se rapproche indéfiniment de ω (rappelons que les points de ω ne sont pas des points-*h* !). Ou bien cette suite est bornée-*h*. Elle converge alors vers un point limite L possédant les deux propriétés caractéristiques suivantes :
1° Dans l'ordre suivant lequel les A_i se suivent, L (qui est situé sur l'arc-Γ ou sur ω) vient après tous les A_i.	1° Dans l'ordre suivant lequel les A_i se suivent, L vient après tous les A_i.
2° Il n'existe pas d'autre point L′, ayant la propriété 1° qui vienne avant le point L.	2° Dans cet ordre, il n'existe pas d'autre point L′, ayant la propriété 1° qui vienne avant le point L.

L'énoncé de gauche est certainement juste.

Remarquons, en passant, qu'il ne serait pas sans intérêt de transcrire (de droite à gauche) l'énoncé du postulat d'ARCHIMÈDE.

Pour avoir à droite la base axiomatique complète, il ne nous manque plus que le postulat d'EUCLIDE. Pourrons-nous aussi le faire apparaître ?

137. LES PARALLÈLES. Essayons d'introduire (à droite) comme définition du parallélisme l'énoncé formellement identique à l'une des propriétés caractéristiques des parallèles :

Deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles.

Portons cette définition (à titre d'essai) dans notre transcription.

[1] Une suite linéairement ordonnée-*h* et non bornée-*h* correspond par définition à gauche à une suite ordonnée sur un arc-Γ ayant un point-limite à une extrémité de cet arc, c'est-à-dire sur ω.

Deux arcs-Γ sans point d'intersection	*seront dits :* Deux droites-*h* parallèles-*h*.

Soit maintenant un arc-Γ C quelconque et A un point qui lui est extérieur (fig. 98). Combien d'arcs-Γ peut-on mener par A, qui ne coupent pas C ? La figure nous présente deux arcs-Γ qui touchent C sur ω. Ces deux arcs-Γ séparent, en A, les arcs-Γ qui coupent C de ceux qui ne le coupent pas. Il y en a, des uns et des autres, une infinité.

Voici donc l'énoncé qui apparaît à droite :

Par un point pris hors d'une droite-*h*, on peut mener *une infinité* de parallèles-*h* à cette droite.

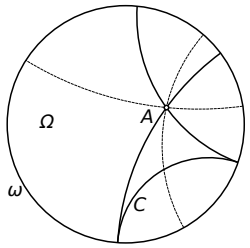


FIG. 98

Pour compléter l'ensemble des énoncés axiomatiques, il aurait suffi de l'axiome d'EUCLIDE. C'est un énoncé complètement différent, irréductible au postulat des parallèles, qui se présente pour finir.

C'est naturellement pour aboutir à cet échec que toute la transcription a été entreprise. Quelle en est la signification ?

Mais n'est-il pas possible de définir autrement les parallèles ? Revenons il la figure 98. Elle nous suggère la définition et le « postulat » suivants :

Deux arcs-Γ qui se touchent en un point de ω	*seront dits* des droites-*h* parallèles-*h*.
Par le point A, il existe exactement deux arcs-Γ qui touchent C sur ω.	Par un point A pris hors d'une droite-*h*, il passe exactement deux parallèles-*h* à cette droite.

C'est un nouveau « postulat des parallèles » qui « sort » à droite. Comme le premier, il diffère de façon frappante du postulat d'EUCLIDE; il lui est également irréductible.

III. *L'INDÉPENDANCE DU POSTULAT D'EUCLIDE*

138. L'INDÉPENDANCE DU CINQUIÈME POSTULAT.

Dans la colonne de droite, c'est tout un édifice verbal qui s'est constitué peu il peu. Au début, le fait seul de substituer une dénomination nouvelle à une dénomination déjà établie devait éveiller l'idée d'un jeu factice et sans portée. Mais la transcription gagnant en étendue et aussi en profondeur, ce premier sentiment n'a pu manquer de s'affaiblir progressivement. Et maintenant, la question suivante se précise et s'impose :

Jusqu'ici, le langage-*h* n'est qu'une simple transcription. Il ne jouit d'aucune autonomie. Ne serait-il pas possible de lui reconnaître une certaine indépendance ? Toute la transcription n'a-t-elle pas été présentée de façon à le suggérer ?

Examinons donc sur quelle base l'autonomie partielle ou complète du langage-*h* pourrait se fonder.

Ne soyons pas trop exigeants pour commencer. N'allons pas encore jusqu'à nous demander si les énoncés de la colonne de droite peuvent être soumis à une dialectique déductive autonome. Ne cherchons pas encore à faire disparaître le lien de signification qui unit la colonne de droite à la colonne de gauche. Contentons-nous d'examiner tout d'abord s'il est possible, par l'intermédiaire de la transcription, d'ordonner déductivement les énoncés de la colonne-*h*.

La réponse ne présente aucune difficulté. Supposons qu'on ait choisi à droite un certain ensemble d'énoncés et qu'on demande d'exposer quelles en seront les conséquences logiques. Il suffit de retrouver, dans la colonne de gauche, les énoncés de géométrie élémentaire correspondants. Ceux-ci engendrent, par le moyen de la dialectique habituelle de la déduction, un certain nombre de conséquences géométriques. Soit L l'une quelconque d'entre elles. Transcrite à droite, on pourra l'envisager comme une des conséquences logiques du groupe d'énoncés-*h* que nous y avions choisi.

Dans cette façon de procéder, tout le travail de la déduction se fait à gauche. L'ordre déductif qui apparaît à droite est un ordre purement induit. S'il fallait en rester là, le résultat ainsi obtenu n'aurait pas grand intérêt.

Nous nous sommes contentés de transcrire de gauche à droite les résultats du raisonnement déductif, pourquoi ne pas transcrire aussi le détail du raisonnement ? Il n'y a rien qui s'y oppose. On tendrait ainsi à droite, entre les hypothèses et les conséquences, une trame déductive qu'on serait peut-être tenté d'appeler, tout d'abord, un simulacre de démonstration. Mais en suivant, par la pensée, telle ou telle démonstration ainsi induite, il pourrait arriver que nous ne fussions pas frappés par son apparence factice, mais bien au contraire, par sa parfaite analogie avec une déduction authentique.

La question suivante se pose alors : n'est-il pas possible de regarder ce que nous appelions un simulacre de démonstration comme une véritable déduction ?

La chose est, en effet, possible. Nous allons l'expliquer tout à l'heure. Tous les éléments nécessaires à cette explication ont été mis au point au chapitre IV[1]. C'est, d'ailleurs, un résultat décisif que nous aurons ainsi obtenu.

Nous avons été amenés à inscrire dans la colonne de droite des énoncés qui, du point de vue de la langue, diffèrent souvent beaucoup des énoncés de gauche qui leur ont donné naissance. Qu'y a-t-il de commun, par exemple, entre les deux phrases suivantes :

« Deux droites-*h* sont parallèles-*h* » et « Deux demi-cercles-Γ se touchent sur le cercle ω » ? Saurions-nous découvrir leur parenté, si nous ne les avions pas inscrites nous-mêmes, en face l'une de l'autre ? Il y a cependant un horizon de réalité dans lequel ces deux phrases sont parfaitement identiques. C'est, naturellement, l'horizon axiomatique qui se constitue (comme nous l'avons expliqué) lorsqu'on dépouille les êtres géométriques de leur signification intuitive, ou du moins d'une forte part de celle-ci. Il reste alors des objets qui ne se distinguent plus les uns des autres par telle ou telle qualité sensible ou par telle ou telle propriété physique, mais simplement par le fait de pouvoir être individualisés au sein de catégories différentes les unes des autres. Il reste aussi des relations entre ces objets, des relations dépouillées de presque tout caractère intuitif et phénoménal. Et c'est sur ces objets dépouillés et sur ces relations schématisées que la dialectique de la déduction opère, dialectique qui n'est qu'une mise en œuvre de la théorie générale des objets et des relations.

À ce niveau de schématisation, dans cet horizon axiomatique, les énoncés inscrits à gauche et à droite en face les uns des autres, ne se distinguent pas les uns des autres. La transcription que nous avons opérée ne les a pas modifiés, elle n'a fait que répéter à droite ce qu'elle trouvait à gauche.

De ce point de vue, enfin, ce que nous appelions un simulacre de démonstration, dans la colonne de droite, n'est que la répétition fidèle et conforme de la démonstration véritable que nous trouvions à gauche.

En un mot, il suffit d'interpréter les énoncés de droite dans un horizon de réalité schématique ou axiomatique pour qu'ils fournissent à la déduction une base de départ et un champ d'activité normaux et par conséquent tout à fait autonomes.

En un mot : *Toute organisation déductive de la colonne de gauche induit à droite une organisation dont le caractère déductif autonome est mis en lumière par le recours à l'horizon axiomatique.*

Il en résulte qu'il ne saurait y avoir deux énoncés contradictoires correspondants à droite s'il n'existe pas deux énoncés contradictoires correspondants à gauche. La non-contradiction de la géométrie élémentaire n'a jamais été mise

[1] Que le lecteur veuille bien se reporter aux p. 285-296 du chapitre IV, et spécialement aux nº 111 (*L'horizon de la dialectique de la déduction*) et 112 (*Les moyens de la dialectique*).

en doute jusqu'ici. (C'est une question sur laquelle nous aurons à revenir.) Il en est donc de même de la non-contradiction de la colonne de droite.

Remarquons maintenant — c'est le point crucial — que nous pouvons introduire une seconde organisation déductive dans la colonne de droite. Du point de vue axiomatique, que nous conservions la lettre *h* dans les énoncés de la colonne de droite ou que nous décidions de la supprimer, cela ne fait aucune différence. Nous allons maintenant la laisser tomber. Et c'est maintenant que se présente en toute clarté le contenu de la colonne de droite :

À droite, nous avons l'ensemble de tous les axiomes de la géométrie élémentaire, tels que nous les avons utilisés dans l'édification axiomatique de cette géométrie élémentaire, *mais avec une exception, celle de l'axiome des parallèles*.

La place de cet axiome n'est pas restée vide; elle est maintenant occupée par un énoncé incompatible avec le postulat d'EUCLIDE, par l'axiome dit « des deux parallèles) (ou de LOBATSCHEFSKI). Cet énoncé, on l'aura reconnu, était précisément celui qui pouvait seul entrer en compétition avec l'axiome d'EUCLIDE, dans le théorème de l'alternative.

Le moment est venu de rapprocher ce « théorème de l'alternative », démontré tout au début de ce chapitre, du résultat que nous venons d'obtenir.

Laissant de côté l'axiome d'EUCLIDE, et opérant à partir de la base axiomatique ainsi tronquée, nous avions reconnu que seules deux éventualités pouvaient être prises en considération :

a) ou bien c'est le postulat d'EUCLIDE qui est valable,

b) ou bien c'est celui de LOBATSCHEFSKI.

Ces deux éventualités sont-elles également réalisables ? — nous demandions-nous. Longtemps, les géomètres ont cru à l'impossibilité de réaliser la seconde. N'avaient-ils pas raison ?

Le résultat auquel nous venons d'aboutir est la réponse à cette question, réponse aussi nette que possible. L'axiome de LOBATSCHEFSKI est précisément le dernier qui figure dans notre colonne de droite. Nous venons d'exposer comment, *dans un horizon axiomatique*, les énoncés de la colonne de droite peuvent être rendus autonomes et débarrassés du qualificatif « *h* ». Ces énoncés et leurs conséquences fournissent donc (dans la seconde organisation déductive dont nous avons parlé) une « réalisation » de l'éventualité *b)*, réalisation aussi valable que celle que la géométrie élémentaire axiomatisée fournit de l'éventualité euclidienne.

En bref : Dans un horizon axiomatique, les deux éventualités sont également réalisables; elles sont l'une et l'autre compatibles avec la base axiomatique tronquée. Mais, comme elles s'excluent réciproquement (dans la première de nos deux organisations déductives), elles ne peuvent, ni l'une ni l'autre, en être une conséquence nécessaire.

L'axiome d'EUCLIDE et l'axiome de LOBATSCHETSKI sont l'un et l'autre « axiomatiquement indépendants » de la base axiomatique tronquée.

L'expérience que nous annoncions est ainsi terminée. Il reste à en dégager la signification.

Pour être mieux en mesure de le faire, il nous faut encore compléter, étoffer la réalisation de l'éventualité non euclidienne, de ce que nous allons appeler la « géométrie non euclidienne hyperbolique ». La façon la plus commode de le faire est de revenir à notre transcription et d'en faire sortir les compléments dont nous avons besoin. C'est ce qui sera fait à la section suivante.

Mais on pourrait aussi se libérer, nous l'avons dit, de toute liaison avec la colonne de gauche. Les énoncés figurant d'ores et déjà dans la colonne de droite forment non seulement une base axiomatique suffisante de la géométrie hyperbolique, ils en forment même une base surabondante[1].

IV. *LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE*

Pour nous faire une meilleure idée de la géométrie hyperbolique, nous allons donc revenir au modèle de POINCARÉ et nous allons le compléter sur un certain nombre de points. Nous allons y introduire, en particulier, la mesure des angles-*h* et des longueurs-*h* et une certaine classification des déplacements-*h*.

Nous commençons à cet effet par compléter sur un certain nombre de points les notions dont nous disposons.

139. LE BIRAPPORT DE QUATRE NOMBRES COMPLEXES *(suite du n° 130)*.

Le lecteur vérifiera sans peine, sur la définition du birapport, les identités suivantes : quels que soient x, y, z, etc., on a toujours

$$(xyzz) = 1 \tag{1}$$
$$(xyxz) = 0 \tag{2}$$
$$(xyzt) = (yxtz) \tag{3}$$
$$(xyzt) \cdot (xytu) = (xyzu). \tag{4}$$

De (4) et (1) nous tirons, en posant $u = z$ dans (4)

$$(xyzt) \cdot (xytz) = (xyzz) = 1$$

[1] On comprend maintenant pourquoi les tentatives de démontrer le postulat d'EUCLIDE par l'absurde, tentatives toujours reprises et toujours infructueuses, ne pouvaient pas aboutir. L'axiome de LOBATSCHEFSKI n'est pas, il est vrai, une conséquence de la base axiomatique tronquée, mais il n'est pas incompatible avec cette dernière. La base axiomatique (BH) obtenue en substituant l'axiome de LOBATSCHEFSKI à l'axiome d'EUCLIDE n'engendrera pas plus de contradiction que la base euclidienne (BE). Il n'est donc pas surprenant que l'espoir de rencontrer cette contradiction ait été constamment déçu.

donc :

$$(xyzt) = \frac{1}{(xytz)}.$$

Considérons maintenant un arc-Γ, D (fig. 99), et soient a, b ses points d'intersection avec ω, c et d deux points quelconques de D. Nous avons vu au n° 130 que le birapport $(abcd)$ est réel positif. Soit ρ ce birapport; il est à lui-même son propre module :

$$\rho = (abcd) = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a}$$

$$= \frac{|d-b|}{|d-a|} : \frac{|c-b|}{|c-a|}.$$

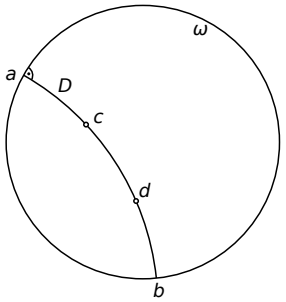


FIG. 99

Lorsque le point d parcourt D de a jusqu'en b, le numérateur $\frac{|d-b|}{|d-a|}$ décroît de $+\infty$ jusqu'à 0, et ρ décroît donc également de $+\infty$ à 0 (c restant fixe) :

De ce qui précède, nous tirons donc que lorsque d parcourt l'arc-Γ D de a jusqu'en b, le birapport $(abcd)$ décroît de $+\infty$ à 0; il est égal à 1 pour $d = c$.

140. HOMOGRAPHIES ET FAISCEAUX ORTHOGONAUX DE CERCLES. Nous avons vu au n° 131 qu'une homographie est déterminée par trois paires de points correspondants; si aux points a, b, c correspondent respectivement les points a', b', c', nous savons que l'équation de l'homographie peut s'écrire sous la forme

$$(abcz) = (a'b'c'z').$$

Si nous posons en particulier $a' = a$, $b' = b$, nous obtenons une homographie laissant fixes les points a et b; ces deux points sont, comme on dit, des *points doubles* de cette homographie. Dans ce cas on a donc :

$$(abcz) = (abc'z'),$$

c'est-à-dire

$$\frac{a-c}{a-z} : \frac{b-c}{b-z} = \frac{a-c'}{a-z'} : \frac{b-c'}{b-z'}.$$

On en déduit

$$\frac{a-c}{a-c'} : \frac{b-c}{b-c'} = \frac{a-z}{a-z'} : \frac{b-z}{b-z'}, \text{ c'est-à-dire } (abcc') = (abzz').$$

On a donc

$$(abzz') = (abcc') = \text{constante} = \Phi.$$

Donc : à une homographie admettant comme points doubles les points a et b correspond un nombre Φ, sa caractéristique, tel que $(abzz') = \Phi$ pour toutes les paires de points correspondants z, z'. Réciproquement, on le voit aisément, une équation $(abzz') = \Phi$, où a, b, Φ sont des nombres complexes quelconques, $a \neq b$, définit une homographie possédant les points doubles a et b.

Considérons alors deux homographies possédant les mêmes points doubles a, b :

l'équation de la première : $(abzz') = \Phi_1$
l'équation de la seconde : $(abzz') = \Phi_2$.

Si nous effectuons ces deux homographies l'une après l'autre, nous trouvons une homographie ayant encore les mêmes points doubles a, b, puisque ceux-ci restent invariants par chacune de ces transformations. La première fait correspondre au point z le point z' donné par

$$(abzz') = \Phi_1;$$

la deuxième fait correspondre à ce point z' le point z'' tel que

$$(abz'z'') = \Phi_2.$$

Mais nous avons vu que

$$(abzz') \cdot (abz'z'') = (abzz'').$$

Nous avons donc en fin de compte :

$$\underline{(abzz'') = \Phi_1 \cdot \Phi_2}.$$

Ceci est donc l'équation de l'homographie résultante.

Nous avons donc : les homographies possédant les deux points doubles a et b forment un groupe. À la succession de deux de ces homographies correspond le produit de leurs caractéristiques.

Soit alors U une homographie de ce groupe, de caractéristique Φ, et soit ρ le module de Φ, φ son argument. Nous avons vu au n° 128 que Φ peut s'écrire sous la forme

$$\Phi = \rho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

D'après ce qui précède, U peut se décomposer en une succession de *deux homographies*, l'une de caractéristique réelle ρ : $(abzz') = \rho$, l'autre de caractéristique $(\cos\varphi + i \sin\varphi)$:

$$(abz'z'') = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Donc : toute homographie de points doubles *a*, *b* est équivalente au produit de deux homographies de points doubles *a*, *b*, l'une de caractéristique réelle, l'autre de caractéristique unitaire[1].

Il nous reste à examiner ces deux types d'homographies :

a) Soit U une homographie de points doubles *a*, *b* et de caractéristique réelle ρ. L'équation de cette homographie peut donc s'écrire :

$$(abzz') = \rho.$$

D'après ce que nous avons vu au n° 130, ceci signifie que les points *a*, *b*, *z*, *z'*, de birapport réel, se trouvent *sur un même cercle*; en d'autres termes, à un point *z* quelconque U fait correspondre un point *z'* situé *sur le même cercle passant par* a *et* b *que* z. U *transforme donc chacun des cercles* (au sens large) *passant par* a *et* b en *lui-même*.

b) Soit U une homographie de points doubles *a*, *b* et de caractéristique unitaire. Nous avons donc : $|(abzz')| = 1$.

D'après ce que nous avons vu au n° 130, ceci signifie que les points *z* et *z'* se trouvent sur le même cercle d'APOLLONIUS du segment $\overline{ab}$; en d'autres termes, à un point *z* quelconque U fait correspondre un point *z'* situé sur *le même cercle d'APOLLONIUS du segment* $\overline{\text{ab}}$ *que* z. *U transforme donc chacun de ces cercles (au sens large) d'APOLLONIUS en lui-même*.

En résumé : Une homographie maintenant les points *a* et *b* fixes peut toujours se décomposer en une succession de deux homographies, la première transformant en eux-mêmes tous les cercles passant par *a* et *b*, et la seconde tous les cercles d'APOLLONIUS du segment $\overline{ab}$.

Remarquons encore ceci : Une homographie possédant les points doubles *a*, *b* et transformant en lui-même *un* cercle C passant par *a* et *b* est du type *a)*, et transforme donc en eux-mêmes tous les cercles passant par *a* et *b*.

Soit en effet *z* un point de C, *z'* le point qui lui correspond par notre homographie. Les points *a*, *b*, *z*, *z'* se trouvent sur un même cercle, le birapport (*a*,*b*,*z*,*z'*) est donc *réel*. Mais ce birapport n'est autre que la *caractéristique* de notre homographie. Celle-ci a donc une caractéristique réelle, elle est du type *a)*.

[1] Un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\cos\varphi + i \sin\varphi$ est dit unitaire, car son module est égal à 1.

On voit exactement de la même façon : Une homographie possédant les points doubles *a*, *b* et transformant en lui-même un cercle d'APOLLONIUS de $\overline{ab}$, transforme en eux-mêmes *tous* les cercles d'APOLLONIUS du segment $\overline{ab}$.

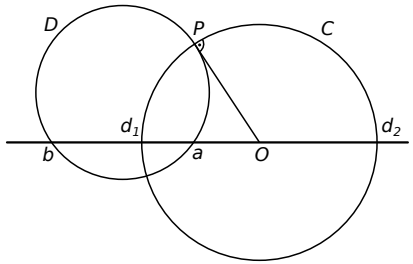


FIG. 100

Considérons, pour terminer, un cercle d'APOLLONIUS d'un segment $\overline{ab}$, C. Soient d_1 et d_2 les points d'intersection de ce cercle avec la droite *ab*, O le centre de C, R son rayon (fig. 100).

D'après la propriété caractéristique des cercles d'APOLLONIUS nous avons en particulier :

$$\frac{\overline{d_1a}}{\overline{d_1b}} = \frac{\overline{d_2a}}{\overline{d_2b}}. \qquad (1)$$

Mais

$$\overline{d_1a} = R - \overline{Oa},\ \overline{d_1b} = \overline{Ob} - R, \text{ etc.}$$

L'équation (1) donne donc

$$\frac{R - \overline{Oa}}{\overline{Ob} - R} = \frac{R + \overline{Oa}}{R + \overline{Ob}},$$

d'où l'on tire en effectuant :

$$\overline{Oa} \cdot \overline{Ob} = R^2$$

Deux points *a*, *b* situés sur la même demi-droite issue de O et satisfaisant à cette relation seront dits inverses par rapport au cercle C. La transformation faisant correspondre à un point son inverse est une *inversion* par rapport au cercle C.

Réciproquement si nous avons un cercle C et un point a quelconque (mais différent du centre de C[1]), et si nous appelons *b* le point inverse de *a* par rapport à C, alors C est un cercle d'APOLLONIUS du segment $\overline{ab}$.

[1] Pour définir l'inverse du centre O il faudrait introduire *le* point à l'infini $z = \infty$ du plan de la variable complexe. Nous avons préféré éviter systématiquement le recours à ce point.

Soit alors D un cercle quelconque passant par *a* et *b*, P le point de contact d'une tangente à ce cercle issue de O. D'après un théorème bien connu de géométrie élémentaire, on a :

$$\overline{OP}^2 = \overline{Oa}\cdot\overline{Ob}, \text{ donc } \overline{OP}^2 = R^2, \ \overline{OP}^2 = R:$$

le point P se trouve sur le cercle C : P est l'un des deux points d'intersection des cercles C et D; ces deux cercles se coupent donc à angle droit : le faisceau des cercles passant par *a* et *b* n'est donc autre qu'un *faisceau de cercles orthogonaux à C*.

Corollaire 1 : soit *a* un point quelconque différent du centre de C. Le faisceau des cercles passant par *a* et orthogonaux à C n'est autre que le faisceau des cercles passant par *a* et par son inverse *b*.

Corollaire 2 : les deux faisceaux formés d'une part des cercles passant par deux points *a*, *b*, de l'autre des cercles d'APOLLONIUS du segment $\underline{ab}$, sont des faisceaux orthogonaux : tout cercle de l'un est orthogonal à tous les cercles de l'autre.

141. LA MESURE DES ANGLES ET DES LONGUEURS EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE.

Les angles-*h* ayant été posés tout simplement égaux aux angles de la géométrie élémentaire, il est tout naturel de définir leur mesure par la mesure ordinaire des angles qui les définissent.

La mesure des segments-*h* n'est pas aussi facile à imaginer. Rappelons pour commencer quelles sont les caractéristiques de la mesure des segments en géométrie élémentaire. Ayant assuré axiomatiquement l'égalité de deux segments et le report des segments sur une droite à partir d'un point quelconque, on passe à la définition d'un certain nombre de notions imitées de l'arithmétique, telles que celle de la somme de deux segments, du rapport de deux segments, etc. Il est ensuite possible d'associer un nombre à chaque segment, sa mesure, de telle façon que l'égalité de deux segments soit équivalente à l'égalité de leurs mesures, que le report *n*-fois répété d'un segment revienne à la multiplication par *n* de sa mesure, que la mesure de la somme de deux segments soit égale à la somme de leurs mesures, etc. La mesure permet, en un mot, de définir un modèle arithmétique des opérations à effectuer sur les segments.

La mesure d'un segment AB est un nombre positif, qui devient arbitrairement grand, pourvu que B s'éloigne suffisamment de A. Elle est nulle, si B coïncide avec A.

Si sur une droite on choisit une origine O, et si l'on choisit une des demi-droites résultantes comme « positive », et l'autre comme « négative », on peut associer à chaque point P de la demi-droite positive le nombre $+\overline{OP}$, à chaque point Q de la demi-droite négative le nombre $-\overline{OQ}$, où $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$ sont les mesures des segments OP et OQ. On établit alors une correspondance biunivoque entre les points de la droite et les nombres réels. En particulier, le fait qu'un segment peut être reporté un nombre arbitrairement grand de fois sur la droite (c'est-à-dire le fait que la droite est illimitée dans les deux sens) a son image dans le fait qu'il existe des nombres réels positifs et négatifs de valeur arbitrairement grande.

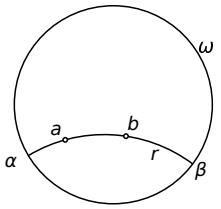


FIG. 101

Revenons maintenant à notre modèle. Envisageons un segment-*h* quelconque *ab* et soient α et β les points où l'arc-Γ qui le porte coupe le cercle ω (fig. 101).

Formons le logarithme du birapport $(\alpha\beta ab)$[1]. Par définition, sa valeur absolue sera la mesure-*h* du segment-*h* *ab*.

Nous la désignerons par

$$L[ab].$$

Nous aurons donc :

$$L[ab] = \left|ln\ (\alpha\beta ab)\right|.$$

La mesure ici définie a-t-elle les propriétés que nous en attendons ?

Nous avons vu au n° 130 que le rapport anharmonique $(\alpha\beta ab)$ est réel positif; le logarithme est donc en tous cas défini, positif ou négatif. (Ce double signe aura ses avantages par la suite.) La mesure en est la valeur absolue; elle est donc essentiellement positive (ou nulle).

Les propriétés de la mesure — nous dirons aussi de la distance hyperbolique *ab* — vont découler l'une après l'autre des propriétés correspondantes du birapport $(\alpha\beta ab)$.

1. En toute première ligne il faut naturellement que des segments-*h* égaux-*h* aient des mesures-*h* égales. D'après la définition de l'égalité-*h* de deux segments-*h* cela signifie que la mesure-*h* proposée doit rester invariante pour tous les déplacements-*h* du plan-*h*. Mais il est immédiatement clair qu'elle est invariante pour tous les déplacements-*h*, car un de ces déplacements est toujours réalisé par une homographie-H. Celle-ci transformant les arcs-Γ en arcs-Γ et ω en elle-même, elle transformera donc les quatre points $\alpha ab\beta$ en $\alpha' a' b' \beta'$, α' et β' sur ω comme α et β. Mais l'homographie-H conserve aussi les rapports

[1] Rappelons que le logarithme est une fonction définie pour les valeurs positives de son argument, et jouissant des propriétés suivantes, les seules dont nous nous servirons par la suite : $ln\ 1 = 0$, $ln\ x > 0$ si $x > 1$, $ln\ x < 0$ si $x < 1$; lorsque x croît de 1 à $+\infty$, $ln\ x$ croît de 0 à $+\infty$; lorsque x décroît de 1 à 0, $ln\ x$ décroît de 0 à $-\infty$; enfin on a toujours: $ln(x\cdot y) = ln\ x + ln\ y$, $ln(x/y) = \ln x - ln\ y$; en particulier donc $ln(1/x) = ln\ 1 - ln\ x = -ln\ x$.

anharmoniques. On aura donc :

$$(\alpha\beta ab) = (\alpha'\beta' a'b').$$

Or cette équation équivaut précisément à :

$$\mathrm{L}[ab] = \mathrm{L}[a'b'].$$

2. Nous avons vu que $(\alpha\beta aa) = 1$, donc :

$$ln(\alpha\beta aa) = 0,\ \mathrm{L}[aa] = 0 :$$

la mesure du segment-*h* nul est nulle.

3. Nous avons vu que $(\alpha\beta ab) = \dfrac{1}{(\alpha\beta ba)}$ donc :

$$ln(\alpha\beta ab) = -ln(\alpha\beta ba).$$

On a donc :

$$\underline{\mathrm{L}[ab] = \mathrm{L}[ba]}$$

la mesure d'un segment-*h* ne dépend pas de son orientation.

4. Nous avons mentionné que $(\alpha\beta ab) = (\beta\alpha ba) = \dfrac{1}{(\beta\alpha ab)}$, donc :

$$ln(\alpha\beta ab) = -ln(\beta\alpha ab),$$
$$|ln(\alpha\beta ab)| = |ln(\beta\alpha ab)| :$$

la mesure d'un segment-*h* *ab* ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les points α et β.

Nous savons que lorsque *b* décrit l'arc-Γ de *a* jusqu'en β, le birapport $(\alpha\beta ab)$ décroît de 1 à 0, le logarithme de ce birapport décroît donc de 0 à $-\infty$: lorsque *b* décrit la droite-*h* de *a* jusqu'en β, L[*ab*] croît de 0 à $+\infty$.

Lorsque *b* décrit l'arc-Γ de *a* jusqu'en α, le birapport $(\alpha\beta ab)$ croît de 1 à $+\infty$, son logarithme croit de 0 à $+\infty$, L[*ab*] croît donc de 0 à $+\infty$:

lorsque *b* s'éloigne de *a* sur une droite-*h*, d'un côté ou de l'autre, la distance hyperbolique L[*ab*] croît de 0 jusqu'au delà de toute limite. En particulier donc, à tout point *b* situé d'un côté de *a* sur une droite-*h* correspond un point *c* situé de l'autre côté de *a* et tel que

$$\mathrm{L}[ab] = \mathrm{L}[ac].$$

5. Soient enfin *abc* trois points se suivant sur un arc-Γ dans cet ordre. On a :

$$[\alpha\beta ac] = [\alpha\beta ab] \cdot [\alpha\beta bc].$$

Passant aux logarithmes et remarquant que, pour les points *abc* placés comme nous l'avons supposé, les trois logarithmes ont le même signe, on obtient l'équation suivante entre les mesures :

$$\mathrm{L}[ac] = \mathrm{L}[ab] + \mathrm{L}[bc].$$

6. On pourrait aussi définir la mesure du *segment orienté ab* par $ln[\alpha\beta ab]$; cette mesure serait alors algébrique, positive ou négative, et l'on aurait identiquement, si nous désignons cette mesure par M :

$$\mathrm{M}[ac] = \mathrm{M}[ab] + \mathrm{M}[bc]$$

quelles que soient les positions respectives de *a*, *b*, *c* sur la droite-*h* considérée. En choisissant une origine O sur cette droite-*h*, nous pourrions alors faire de celle-ci un axe de coordonnées, en définissant la coordonnée d'un point *a* de cette droite par la mesure algébrique du segment orienté O*a*, M[O*a*].

7. On pourrait aussi établir l'inégalité triangulaire suivante, valable pour trois points quelconques du plan-*h* :

$$\mathrm{L}[a,b] \leq \mathrm{L}[a,c] + \mathrm{L}[c,b].$$

Nous renoncerons à en donner la démonstration ici.

Ce qui vient d'être dit suffit certainement. La mesure des segments hyperboliques satisfait aux mêmes exigences caractéristiques que la mesure des segments euclidiens.

142. LES CERCLES-*h*. En géométrie euclidienne, on peut donner les deux définitions suivantes d'un cercle, la première faisant intervenir la congruence des angles et la seconde celle des segments :

a) Un cercle de centre O est une trajectoire orthogonale du faisceau de toutes les droites passant par le point O. (C'est, en d'autres termes, une courbe qui coupe toutes ces droites sous un angle droit.)

b) Un cercle de centre O est le lieu géométrique des points situés à une même distance R de O. R est le rayon de ce cercle.

On peut naturellement démontrer que ces deux définitions sont équivalentes. Nous allons voir que la situation est exactement la même dans le plan-*h*.

Prenons donc la première de nos deux définitions comme étant celle d'un cercle-*h*. Cherchons à réaliser dans notre modèle la figure correspondante (fig. 102).

Supposons que O ne soit pas le centre du cercle ω et soit $\bar{\mathrm{O}}$ le point inverse de O par rapport à ω. Le faisceau de toutes les droites-*h* passant par O n'est autre, dans notre modèle, que le faisceau des arcs-Γ passant par O. Les supports de ces arcs forment le faisceau des cercles passant par O et orthogonaux à ω. Nous savons que tous ces cercles passent aussi par $\bar{\mathrm{O}}$. Leurs trajetoires orthogo-

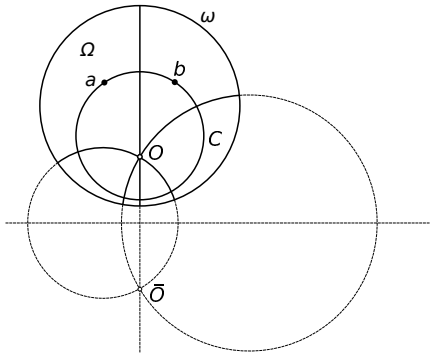


FIG. 102

nales sont, comme nous l'avons vu, les cercles d'APOLLONIUS du segment OŌ. Ce sont ceux de ces cercles qui sont intérieurs à ω que nous devons donc appeler les cercles-*h* de centre O.

Ces cercles-*h* ont-ils la propriété *b)* ? C'est-à-dire tous les points d'un cercle-*h* de centre O sont-ils à la même distance hyperbolique de O ?

Pour nous en rendre compte, considérons l'un de ces cercles-*h*, C et soient *a* et *b* deux points quelconques de C. Il existe une homographie ayant O et Ō pour points doubles, et transformant *a* en *b*. Soit Φ la caractéristique de cette homographie. Nous avons vu que :

$$(O\bar{O}ab) = \Phi.$$

Mais *a* et *b* se trouvent sur le même cercle d'APOLLONIUS de OŌ, on a donc :

$$|(O\bar{O}a| = |(O\bar{O}b)|, \text{ (cf. n° 129)}$$

c'est-à-dire :

$$|(O\bar{O}ab)| = 1 :$$

Φ *est unitaire*.

Notre homographie est donc du type étudié plus haut : elle transforme chaque cercle d'APOLLONIUS de OŌ en lui-même; en particulier donc elle applique ω sur lui-même, et conserve l'intérieur de ω; c'est donc une homographie-H : il existe donc une homographie-H — c'est-à-dire un déplacement-*h* — conservant O et appliquant *a* sur *b*; ce déplacement-*h* applique le segment-*h* O*a* sur le segment-*h* O*b* :

$$L[Oa] = L[Ob]. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Réciproquement on voit sans autre que si :

$$L[Oa] = L[Ob],$$

alors *a* et *b* se trouvent sur un même cercle-*h* (au sens de la définition *a)*).

Il nous reste à examiner le cas où O est le centre de ω; mais ce cas est trivial :

le faisceau des arcs-Γ passant par O n'est autre que le faisceau des diamètres de ω; un cercle-*h* de centre O est donc un cercle ordinaire de centre O. La propriété *b)* est trivialement remplie; en effet :

soient α, β les points d'intersection d'un diamètre avec ω, A un point quelconque de ce diamètre, $a = \overline{OA}$: (αβOA) est réel positif, et l'on a

$$(\alpha\beta OA) = \frac{\overline{A\beta}}{\overline{A\alpha}} : \frac{\overline{O\beta}}{\overline{O\alpha}} = \frac{1+a}{1-a} : 1 = \frac{1+a}{1-a}.$$

(Rappelons en effet que ω a été choisi avec le rayon 1.) Ce birapport ne dépend donc que de *a*; il est le même pour tous les points du cercle considéré; ceux-ci sont à la même distance euclidienne *a*, et donc aussi à la même distance hyperbolique $\left| ln \frac{1+a}{1-a} \right|$, de O,

C.Q.F.D.

Ces définitions *a)* et *b)* sont donc bien équivalentes.

143. LA PERPENDICULAIRE ET LES OBLIQUES. La perpendiculaire est-elle aussi plus courte que les obliques dans la géométrie hyperbolique ? Certes, car c'est un résultat qu'on peut établir sans axiome des parallèles, à l'aide seulement de la base axiomatique « tronquée ». Nous pourrions nous dispenser de le démontrer ici. Il n'est cependant pas sans intérêt d'examiner comment il se présente dans le modèle.

1. Soient donc *a* une droite-*h* représentée par un arc-Γ C, et A un point (de Ω) qui ne soit pas sur C. Comment abaisser de A la perpendiculaire-*h* sur *a* ? Elle nous sera donnée par un arc-Γ D passant par A et orthogonal à C; nommons-la *p*.

La construction de cet arc-Γ est très simple :

Supposons d'abord que A ne soit pas le centre de ω. D'après ce que nous avons vu plus haut, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle passant par A soit orthogonal à C est qu'il passe aussi par le point A′, inverse de A par rapport à C. Le cercle cherché doit donc passer par A′, mais de même aussi par A″, inverse de A par rapport à ω (fig. 103). Ce cercle est donc univoquement déterminé par les trois points A, A′, A″; il est le support de l'arc-Γ que nous appellerons la perpendiculaire-*h* issue de A sur la droite-*h* *a*. Dans le cas où A est le centre de ω, c'est encore plus simple : la perpendiculaire-*h* est le diamètre de ω orthogonal à C.

2. Menons maintenant l'oblique-*h* AP′. Comment faire voir que

$$L[AP'] > L[AP],$$

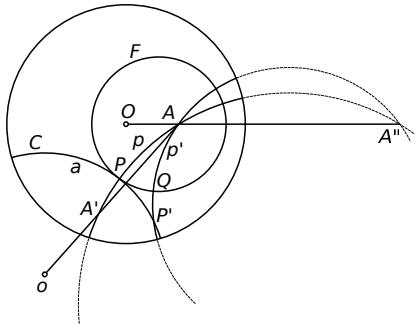


FIG. 103

où P est le pied de la perpendiculaire-*h* de A sur *a* ?

Traçons le cercle-*h*, de centre A et de rayon-*h* égal à L[AP]. Dans le modèle, c'est un cercle F du faisceau orthogonal à tout le faisceau des cercles-Γ passant par A (et par son inverse A″ par rapport à ω).

On remarquera que le raisonnement peut être maintenant poursuivi exactement comme en géométrie élémentaire : il suffit, pour qu'il soit absolument correct, de n'oublier nulle part le qualificatif « *h* ». Voici la suite du raisonnement :

Au point P, la droite-*h* *a* et le cercle-*h* que nous venons de construire sont tous les deux orthogonaux à la perpendiculaire-*h* de A sur *a*; ils sont donc tangents entre eux. La droite-*h* *a* est donc complètement à l'extérieur de ce cercle-*h*. L'oblique-*h* AP′ coupe donc ce cercle en un point Q situé *entre* A et P′; mais alors nous savons que

$$L[AP'] > L[AQ]. \text{ Or } L[AQ] = L[AP]$$
$$\text{donc } L[AP'] > L[AP],$$

C.Q.F.D.

144. LES DÉPLACEMENTS-*h*. On sait qu'en géométrie euclidienne, on démontre que tout déplacement est soit une rotation, soit une translation. Une rotation est un déplacement ayant un point fixe dans le fini; elle laisse invariants les cercles ayant ce point fixe pour centre. Une translation est un déplacement ne laissant fixe aucun point dans le fini, mais faisant glisser sur elles-mêmes tout un faisceau de droites parallèles. Un théorème plus ou moins analogue est-il valable en géométrie hyperbolique ?

Il y a deux types de déplacements-h que nous pouvons indiquer immédiatement :

1. *Les rotations*-h :

Nous appelons ainsi les déplacements-*h* ayant un point fixe *a* dans le fini-*h*, c'est-à-dire dans Ω. Pour justifier cette dénomination, il nous faut naturellement montrer que ces transformations ont bien les propriétés à attendre d'une rotation.

Supposons pour commencer que *a* n'est pas le centre de ω, et soit *b* le point inverse de *a* par rapport à ω.

Nous avons vu que tout cercle passant par *a* et orthogonal à ω passe aussi par *b*. Une homographie-H ayant *a* pour point fixe transforme tout cercle de ce

type en un autre cercle du même type; le point *b* étant situé sur tous ces cercles, une homographie-H ayant *a* pour point fixe doit donc avoir également *b* pour point fixe.

Mais alors une rotation-*h* est une homographie du type étudié au n° 140; elle a les points fixes *a* et *b*, et transforme en lui-même le cercle ω, qui est un cercle d'APOLLONIUS du segment *a*, *b*.

Elle transforme donc en eux-mêmes tous les cercles d'APOLLONIUS du segment *a*, *b*, en particulier ω. Pour autant que ceux-ci soient situés *dans* Ω, nous savons qu'ils ne sont autres que les cercles-*h* de centre *a* :

une rotation-h *de point fixe* a *conserve les cercles*-h *de centres*-a.

D'autre part, trivialement, une rotation-*h* transforme une droite-*h* passant par *a* en une autre droite-*h* passant par *a*; soient d_1 et d_2 deux de ces droites-*h* (fig. 104), d'_1 et d'_2 leurs transformées; à cause de la conservation des angles l'angle entre d_1 et d_2 est égal à l'angle entre d'_1 et d'_2; mais ceci implique que l'angle entre d_1 et d'_1 soit égal à l'angle entre d_2 et d'_2 : *une rotation*-h *fait tourner du même angle toutes les droites*-h *passant par* a.

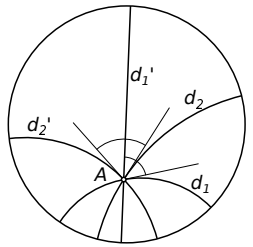


FIG. 104

Les rotations-*h* ont donc bien les propriétés caractéristiques des rotations. Il nous reste à examiner le cas où le point fixe *a* est le centre de ω; dans ce cas le faisceau des droites-*h* issues de *a* se confond avec le faisceau des droites euclidiennes par *a*, les cercles-*h* de centre *a* ne sont autres que les cercles euclidiens de centre *a*, et il est à prévoir que les rotations-*h* de point fixe *a* ne sont autres que les rotations ordinaires de centre *a*. Nous le vérifierons plus bas.

2. *Les translations*-h :

Nous appelons ainsi les déplacements-*h* tels que les homographies-H correspondantes aient deux points fixes sur ω. Dans ce cas-ci, l'analogie avec le cas euclidien n'est pas aussi étroite que dans le cas des rotations. Il s'introduit une différence caractéristique :

Une translation-*h* ayant les points fixes *a* et *b* sur ω est une homographie de points fixes *a* et *b* qui transforme le cercle ω par *a* et *b* en lui-même. D'après ce que nous avons vu au n° 140, une telle homographie transforme en eux-mêmes tous les cercles passant par *a* et *b*.

Ne considérons, de ces cercles, que les arcs intérieurs à Ω. Un seul de ces arcs est un arc-Γ, c'est-à-dire une droite-*h*. Les autres sont des courbes nouvelles; quel est leur équivalent euclidien ?

Appelons *d* la droite-*h* passant par *a* et *b* (fig. 105); soit D un arc de cercle différent de *d*, limité par *a* et *b*. Considérons une translation-*h* T. A un point quelconque *u* de *d*, T fait correspondre un autre point *v* de *d*; à la droite-*h*

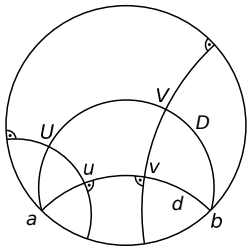


FIG. 105

perpendiculaire en *u* à *d* correspond par T la droite-*h* perpendiculaire en *v* à *d*. Soient U et V les points d'intersection de ces deux droites avec D.

Comme T transforme également D en lui-même, T doit faire correspondre au point U le point V. Mais T est un déplacement-*h*, et conserve donc les longueurs-*h* :

$$\underline{L[uU] = L[vV]}.$$

L'arc D n'est donc autre que le lieu des points situés à une même distance de la droite-*h* *d*[1]. C'est donc ce que l'on appelle une équidistante. En géométrie euclidienne, nous savons qu'une translation le long d'une droite transforme en elles-mêmes toutes les parallèles à cette droite, qui sont en même temps des équidistantes de cette droite. En géométrie hyperbolique, les parallèles-*h* ne sont plus identiques aux équidistantes-*h*; et nous venons de voir qu'une translation-*h* le long d'une droite-*h* transforme en elles-mêmes les équidistantes de cette droite, mais non les parallèles. (Toutefois, elle transforme toute parallèle en une autre parallèle.)

Il reste à examiner si ces deux cas sont les seuls qui puissent se présenter.

Rappelons qu'une homographie a été définie à l'origine comme une transformation de la forme

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} \qquad AD - BC \neq 0.$$

De façon générale on obtient les points fixes d'une homographie en posant dans cette équation :

$$w = z,$$

ce qui donne l'équation

$$z = \frac{Az + B}{Cz + D}, \text{ d'où :}$$

$$Cz^2 + (D - A)z - B = 0.$$

Cette équation du second degré a au plus deux racines :

une homographie a au plus deux *points fixes*.

Elle peut n'en avoir qu'un, ou aucun.

[1] Remarque : On vérifie sans peine que si *u* et *v* sont deux points *quelconques* de *d*, il existe une translation-*h* faisant correspondre le point *v* au point *u*. Ce n'est autre que l'homographie de points doubles *a* et *b* faisant correspondre *v* à *u*.

Examinons tout d'abord ce dernier cas : l'homographie n'a pas de points fixes si l'on a :

$$C = 0,\ D = A.$$

Dans ce cas cette homographie se réduit à

$$w = \frac{Az + B}{A} = z + \frac{B}{A}.$$

C'est une translation, qui ne peut conserver le cercle Ω que si B = 0, cas trivial :

Une homographie-H qui n'est pas l'identité possède au moins un point double.

Mais nous avons vu ci-dessus que si une homographie-H possède un point double intérieur à ω et différent du centre de ω, elle en possède un second, inverse du premier par rapport à ω.

Donc :

si une homographie-H ne possède qu'*un* point fixe, ou bien ce point fixe est situé sur ω, ou bien c'est le *centre* de ω.

Examinons encore ce dernier cas :

Pour qu'une homographie ait le point fixe $z = O$, on doit avoir B = 0. Pour que ce point fixe soit unique, il faut que C = 0. L'équation de l'homographie se réduit alors à :

$$w = \frac{Az}{D} = \frac{A}{D}z.$$

Soit :

$$\frac{A}{D} = \rho\ (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Cette homographie est alors le résultat d'une rotation d'angle φ suivie d'une homothétie de rapport ρ. Pour que ce soit une homographie-H, il faut que ρ soit égal à 1 (afin que ω soit conservé) :

Une homographie-H admettant le point O comme unique point double n'est autre qu'une rotation euclidienne — comme nous l'avions laissé prévoir.

Le seul cas qui reste à examiner est le suivant : est-il possible qu'une homographie-H (qui ne soit pas l'identité) possède *deux* points doubles, dont l'un au centre de ω ?

Nous allons montrer que c'est impossible :

Supposons en effet qu'un deuxième point double se trouve en dehors de ω; nous obtenons alors un troisième point double en prenant l'inverse du précédent par rapport à ω. Mais nous avons vu qu'une homographie (non triviale) ne peut avoir plus de *deux* points doubles.

Supposons donc que le deuxième point double se trouve sur ω. Nous

obtenons alors un troisième point fixe en prenant le point diamétralement opposé au précédent; en effet notre homographie doit conserver à la fois le diamètre (qui est l'unique droite-*h* passant par les deux points fixes) et le cercle ω, donc aussi le point d'intersection des deux : on a encore contradiction.

En résumé nous voyons donc qu'il y a trois types de déplacements-*h* :

1. Les *rotations*-h, qui font tourner le plan-*h* autour d'un point-*h*.

2. Les *translations*-h, qui font glisser sur elles-mêmes une droite-*h* et toutes les équidistantes de celle-ci. (Les équidistantes ne sont pas des droites-*h* !)

3. Des déplacements-*h* sans analogue euclidien, qui ont *un* point fixe sur ω.

145. QUELQUES DIFFÉRENCES CARACTÉRISTIQUES ENTRE LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE ET LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE. Ayant souligné un grand nombre d'analogies plus ou moins étroites entre la géométrie élémentaire et la géométrie hyperbolique, nous allons maintenant compléter le tableau en indiquant (sans démonstration) quelques propriétés caractéristiques par lesquelles les deux géométries diffèrent nettement.

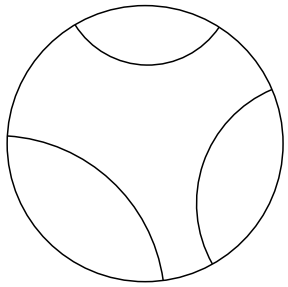


FIG. 106

1. Il peut arriver en géométrie hyperbolique que trois droites qui ne se coupent pas soient placées de telle façon que chacune d'elles soit située entre les deux autres (fig. 106).

2. Comme en géométrie euclidienne, deux droites qui se coupent ne possèdent pas.de perpendiculaire commune; mais, contrairement à ce qui a lieu en géométrie euclidienne, deux droites *parallèles* (c'est-à-dire telles que les arcs-Γ correspondants aient un point commun *sur* ω) ne possèdent pas non plus de perpendiculaire commune. Par contre, il existe des perpendiculaires communes à deux droites non sécantes et non parallèles.

3. En géométrie hyperbolique, il n'existe pas de triangles semblables inégaux. Deux triangles ayant leurs trois angles respectivement égaux sont congruents (c'est-à-dire que leurs côtés sont respectivement égaux-*h*).

4. En géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle ne vaut pas deux droits; elle est inférieure à deux droits, sans être d'ailleurs la même pour tous les triangles. On peut dire sommairement qu'elle est d'autant plus petite qu'un triangle est plus grand. Un cas limite est

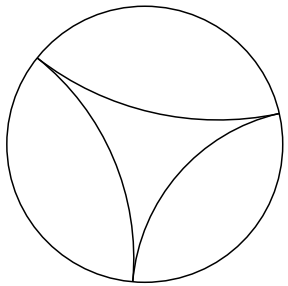


FIG. 107

celui d'un triangle ayant ses trois sommets à l'infini-*h*, c'est-à-dire sur ω. La somme de ses angles est nulle (fig. 107).

C. L'autonomie de la géométrie hyperbolique

146. MISE EN CAUSE DE L'INTUITION. Par la double intervention du modèle de POINCARÉ et de l'horizon axiomatique, la question historique de l'indépendance du Ve postulat a donc trouvé sa solution. Du même coup, l'indépendance du postulat de LOBATSCHEFSKI se trouve également assurée. Dans le cadre de la géométrie, c'est là, naturellement, un résultat du plus grand intérêt. Nous n'aurions cependant pas pris la peine de l'établir si soigneusement, s'il n'ouvrait pas la voie à des considérations d'une portée bien plus grande encore.

Dans l'horizon axiomatique, rien n'empêche de remplacer l'axiome d'EUCLIDE par l'axiome de LOBATSCHEFSKI. La base axiomatique ainsi modifiée offre à la dialectique de la déduction une matière sur laquelle elle a normalement prise et à partir de laquelle elle peut régulièrement dérouler les chaînes de conséquences. Pour bien comprendre que la chose est possible, il fallait constituer l'horizon axiomatique et en faire, en quelque sorte, la scène de l'activité déductive. Cette scène nous est maintenant acquise. Nous pouvons nous appuyer sur ce qui « fait la réalité » de l'horizon axiomatique.

Que pouvons-nous attendre d'une telle édification ? Arrêtons-nous un instant à examiner quelques questions qui pourraient encore porter une certaine ombre sur le chemin dans lequel nous allons nous engager.

a) Est-il bien sûr que la dialectique de la déduction puisse opérer normalement à partir de la nouvelle base axiomatique, c'est-à-dire sans avoir à craindre de jamais rencontrer une contradiction ?

Cette question est une mise en garde. Certes, en portant « la scène de l'activité logique » dans l'horizon axiomatique, nous assurons la déduction contre le risque de la contradiction, mais cette assurance n'est pas absolue, elle n'est que relative. Relative à quoi ? demandera-t-on. Dans l'horizon axiomatique, les démarches déductives à partir de la nouvelle base axiomatique se révèlent identiques à un certain ensemble de déductions qui peuvent être toutes faites déjà dans le cadre de la géométrie élémentaire. L'assurance dont nous parlons est donc relative à la sécurité de la géométrie élémentaire. Dans la mesure même de la justesse de la méthode axiomatique (telle que nous l'avons exposée), nous pouvons être sûrs que toute contradiction à laquelle l'édification de la géométrie hyperbolique se heurterait devrait faire éclater une contradiction correspondante dans la géométrie élémentaire. En un mot : la non-contradiction

de la géométrie hyperbolique a la non-contradiction de la géométrie euclidienne pour garantie. C'est jusque-là et pas plus loin que va notre assurance.

b) Il y a certainement un sens à dire que la base axiomatique euclidienne est complète : elle permet de retrouver (c'est une constatation que chacun peut faire) tous les traits essentiels de la géométrie élémentaire qu'on s'est proposé d'axiomatiser.

Y a-t-il un sens à demander si la base axiomatique modifiée est, elle aussi, complète ?

La question peut être posée tout d'abord dans le cadre assez artificiel de la transcription qui nous a mis en possession du modèle de POINCARÉ. Tous les énoncés que la dialectique de la déduction peut nous fournir à partir de la base axiomatique modifiée peuvent aussi être obtenus, la chose est certaine, par l'intermédiaire de la transcription. La dialectique de la déduction ne réussira pas à inscrire dans la colonne de droite un seul énoncé « essentiellement nouveau ». Mais là n'est pas notre question. Sommes-nous également sûrs que la dialectique de la déduction soit capable de nous fournir sans omission tous les énoncés que la transcription met à notre disposition ? Pour l'instant, cette question restera sans réponse. La situation, dans la colonne de gauche, n'est pas organisée axiomatiquement de façon claire. Rien ne nous permet encore de décider si, par retranscription de la droite vers la gauche, la nouvelle base axiomatique engendre ou non, dans la colonne de gauche, une base axiomatique complète (de la géométrie euclidienne).

On peut se demander si cette dispute axiomatique entre les deux colonnes de notre modèle vaut la peine d'être poursuivie. Nous reconnaîtrons bientôt qu'elle n'a rien de factice.

Mais c'est plutôt à une autre façon d'être complet que nous pensions tout à l'heure. Dans ce chapitre, tout s'inspire d'une intention qui se fait (et qui se fera encore) de plus en plus pressante, celle de suggérer une analogie aussi étroite que possible entre la géométrie hyperbolique et la géométrie élémentaire. Si cette analogie doit être prise au sérieux, nous ne pourrons pas éviter de nous demander si la géométrie hyperbolique comporte bien tous les caractères que nous exigeons *normalement* d'une géométrie, et si la base axiomatique que nous aurons choisie nous restituera fidèlement tous ces caractères.

Chose assez remarquable, c'est en dénouant la dispute axiomatique entre les deux colonnes de notre modèle que nous pourrons donner, à la fois, un sens précis et une réponse satisfaisante à la seconde variante de notre question.

c) Dans le cas de la géométrie élémentaire, même après axiomatisation et constitution de l'horizon axiomatique, l'exercice de la déduction reste informé et guidé par l'intuition géométrique, par l'intuition que l'axiomatisation s'est donné pour but de préciser. Si l'on se rabat totalement sur l'horizon axiomatique, l'activité déductive n'aura-t-elle pas un « bandeau sur les yeux » ? N'est-elle pas condamnée à s'avancer comme à tâtons dans un univers logique que les buts de la déduction n'éclairent plus ? L'édification d'une géométrie reste-t-elle possible dans de telles conditions ?

Certes, la situation de l'axiomaticien ne serait pas enviable s'il devait être totalement privé de tout recours à l'intuition géométrique, sous quelque forme que ce soit — et s'il lui était uniquement permis de faire appel à l'intuition logique qui reste valable dans l'univers de l'« objet quelconque ». Mais l'axiomaticien, et même l'axiomaticien de la géométrie hyperbolique, est-il vraiment réduit à une position aussi extrême et aussi incommode ? Qu'il nous suffise de rappeler ici le rôle des *fenêtres interdites* dans la fable axiomaticienne de la « Maison aux mille fenêtres ». Ces fenêtres n'étaient pas *totalement* interdites, il n'était pas totalement défendu de s'en approcher pour jeter un coup d'œil vers l'extérieur. Ce qui était strictement interdit, c'était de faire usage des renseignements ainsi obtenus dans la *reconstruction systématique* (axiomatique) du paysage extérieur.

De façon assez analogue, l'intuition géométrique sous toutes ses formes passe au rang d'« information interdite », lorsque l'activité déductive vient elle-même se placer dans l'horizon axiomatique. Mais, cette fois aussi, le mot *interdit* ne doit pas être pris dans son sens le plus fort. La connaissance interdite n'est pas écartée d'un seul coup et sans esprit de retour. Il suffit qu'on puisse la passer sous silence dans l'exposé strict de la réédification axiomatique.

Ce qui vient d'être dit du caractère « interdit » de l'information intuitive n'est pas définitif. Ce n'est qu'une première indication. Nous reprendrons dans la section suivante tout le problème de l'intuition dans ses rapports avec la géométrie hyperbolique. C'est un problème central sur lequel il nous faudra nous attarder. Il ne s'agissait, pour l'instant, que d'une réponse provisoire, provisoire — mais suffisante pour dissiper le doute qui s'exprimait par notre troisième question.

La question *b)* est restée en suspens. Nous allons maintenant esquisser comment on peut lui donner une réponse satisfaisante. Le chemin passe, nous l'avons déjà dit, par l'axiomatisation effective et autonome de la géométrie hyperbolique. Nous ne pourrons pas nous dispenser de mettre, encore une fois, la main à la pâte axiomatique. Mais il ne sera pas nécessaire de refaire l'ouvrage tout entier. Pour ce que nous avons à faire saisir, il suffira d'en refaire une partie seulement et de décrire comment le tout pourrait être achevé.

À propos de la géométrie élémentaire déjà, nous disions que, pour bien comprendre une axiomatisation, il faut l'avoir (au moins partiellement) pratiquée. Valable pour une axiomatisation que l'intuition spatiale soutient encore ouvertement dans toutes ses démarches, cette affirmation est doublement justifiée pour une axiomatisation qui prétend entrer, sur certains points, en conflit avec l'intuition.

La seule façon véritablement convaincante de prouver que la géométrie hyperbolique admet une édification axiomatique autonome, c'est de l'axiomatiser. Mais ne laissons pas croire que le travail axiomatique auquel nous allons nous livrer est d'un genre tout neuf et totalement inédit. Toutes les conséquences que nous avons déjà déduites de la base axiomatique « tronquée », ou même d'une partie seulement de celle-ci (comme au chapitre III) peuvent être régulièrement intégrées dans l'axiomatisation autonome de la géométrie hyperbolique. Il en est de même de la démonstration du théorème de l'alternative, par laquelle ce chapitre a précisément commencé.

On ne manquera pas de remarquer que tous ces préliminaires axiomatiques datent d'un « stade » où il n'était pas encore question de géométrie hyperbolique, où l'idée d'une telle géométrie n'était qu'en préparation, où le climat géométrique était encore euclidien d'outre en outre : Tous ces préliminaires ont donc été guidés et inspirés par notre intuition naturelle. N'y a-t-il pas là un vice de forme, une raison d'en récuser la validité ? Pas du tout ! Répétons-le, car nous venons de le dire en réponse à la question *c)* de tout à l'heure : l'information naturelle et l'intuition géométrique qui a passé par l'école euclidienne n'ont pas à être totalement refoulées. Il suffit de les faire passer en arrière-plan, en qualité d'« information interdite ».

Jusqu'ici, nous n'avions pas à « biaiser » quant à notre dépendance de l'intuition. Notre fidélité restait intacte. Nous allons donc maintenant prendre la liberté d'essayer du nouveau, en nous écartant plus ou moins des voies que l'intuition nous indique naturellement. Mais cette liberté de nous retourner contre l'intuition est-elle si nouvelle, si révolutionnaire ? N'en fait-on pas usage, le plus régulièrement du monde, chaque fois qu'on imagine un raisonnement par l'absurde ?

Il y a enfin d'autres « fenêtres interdites » encore par lesquelles (malgré leur nom) l'information « non officielle » passe largement : ce sont les modèles, le modèle de POINCARÉ que nous avons pris la peine d'« étoffer », le modèle de KLEIN dont il sera question plus tard, entre autres.

Nous ne pénétrons donc pas le bandeau sur les yeux dans notre nouveau domaine d'axiomatisation. C'est pourquoi, d'ailleurs, nous n'hésiterons pas à entreprendre l'axiomatisation du chapitre de la géométrie hyperbolique où les différences avec la géométrie euclidienne sont le plus immédiatement visibles, le chapitre des parallèles. La base axiomatique de cette édification autonome comprend donc (répétons-le pour éviter toute équivoque) tous les axiomes de la base euclidienne du chapitre III, excepté l'axiome des parallèles d'EUCLIDE qui doit être remplacé par l'axiome de LOBATSCHEFSKI.

147. REMARQUES SUR LES MOYENS DE LA DÉMONSTRATION. Quelques remarques, pour commencer, sur les moyens de démonstration dont nous disposons à cet endroit. Nous l'avons déjà dit au cours de la démonstration du théorème de l'alternative : nous avons le droit de nous servir de tout ce qui appartient à la base axiomatique tronquée, et de tout ce qui en est conséquence; de tout ce qui en est conséquence *déjà établie*, bien entendu.

Au chapitre III, nous avons insisté à diverses reprises sur le fait suivant : l'édification axiomatique de la géométrie élémentaire équivaut à une « reconstruction » de l'ensemble de nos notions et de nos « connaissances intuitives » : la fable de la maison aux mille fenêtres avait précisément pour but de le faire comprendre. En renonçant à l'axiome d'EUCLIDE, nous laissons naturellement échapper une partie de nos moyens intuitifs, mais une partie seulement. Nous n'aurons plus le droit, par exemple, de parler de *directions* parallèles, ou de figures semblables. Mais nous savons, pour l'avoir reconnu au chapitre III, que tout ce qui concerne les propriétés d'ordination sur la droite et dans le plan reste assuré par la base axiomatique tronquée (même si l'on en retranchait encore les axiomes du groupe III, les axiomes assurant la congruence). Il en est ainsi, en particulier, de l'ordre des points sur une droite, de la relation « entre », de la répartition des points d'un plan en deux demi-plans séparés par une droite, de la différence entre points intérieurs et points extérieurs à un angle ou à un triangle, de l'ordre de succession des points sur le pourtour d'un triangle, de l'orientation des triangles, etc.

En faisant entrer les axiomes du groupe III dans le, jeu, nous assurons les propriétés fondamentales de l'orthogonalité, de la congruence, de la symétrie axiale, de la symétrie centrale, et des rotations : Pour les déplacements en général, la propriété fondamentale suivante reste valable : Il existe un déplacement (et un seulement) qui amène un point A quelconque et un rayon *a* quelconque issu de ce point sur un point B quelconque et un rayon *b* quelconque issu de B. En particulier, il existe un déplacement déterminé qui amène un point quelconque A d'une droite *g* sur un autre point quelconque B de cette droite en faisant « glisser » cette dernière sur elle-même (fig. 108). Nous appelons ce déplacement un glissement (du plan) le long de *g* : en l'absence du postulat d'EUCLIDE, on ne peut pas affirmer que ce soit un « déplacement parallèle ». Ce qu'on peut affirmer, c'est uniquement que les figures issues l'une de l'autre par ce glissement sont congruentes, comme pour tout autre déplacement. Si ce glissement amène le

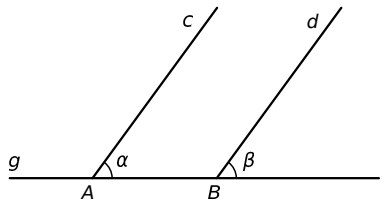


FIG. 108

rayon *c* par A sur le rayon *d* par B (*g* glissant sur elle-même) l'angle α que fait *c* avec *g* est donc égal à l'angle β que fait *d* avec la même droite *g*.

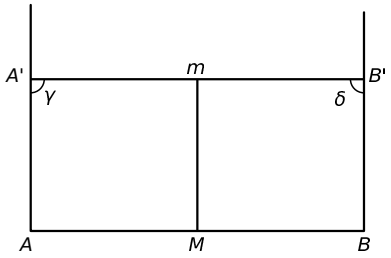


FIG. 109

Il nous arrivera d'user du fait que deux figures « symétriquement construites » doivent être congruentes. En voici un exemple (fig. 109).

Supposons que les segments AA′ et BB′, élevés perpendiculairement sur AB, soient égaux entre eux. Menons le segment A′B′. Nous prétendons que les angles γ et δ (de la fig. 109) sont égaux. Pour le faire voir, il suffit d'élever la perpendiculaire *m* sur AB au milieu M de ce segment. La construction qui nous mène en A′ sur le chemin MAA′ est symétrique de celle qui nous mène en B′ sur le chemin MBB′ : les points A′ et B′ ont donc des positions symétriques, par rapport à l'axe *m*. Il en résulte que le segment A′B′ est perpendiculaire à *m*, et que les angles γ et δ sont égaux.

La démonstration ainsi conduite pourrait naturellement se détailler encore davantage et se réduire (comme on le fait en géométrie élémentaire) à l'application progressive des cas d'égalité des triangles, application qui est parfaitement assurée par les axiomes de la base tronquée.

En faisant entrer le groupe IV dans le jeu axiomatique, on reprend enfin possession de la mesure des segments et des angles, en plein accord avec nos vues intuitives sur les longueurs et les grandeurs.

Il n'y aura donc aucune ambiguïté axiomatique dans les recours à l'intuition que nous allons nous permettre. Notre analyse du chapitre III leur a d'ores et déjà rendu leur légitimité axiomatique, même en l'absence du postulat des parallèles. On pourra cependant se demander pourquoi nous allons rendre aussi souvent et aussi systématiquement une forme intuitive à des raisonnements que nous pourrions présenter aussi sous une forme strictement axiomatique. Est-ce par commodité, ou pour gagner du temps ? Les vraies raisons sont autres. Notre étude s'avançant, le fait d'avoir pu conserver le contact avec l'intuition géométrique au sens le plus élémentaire (dans les raisonnements que nous allons faire à partir de la base axiomatique altérée) prendra une réelle importance. Nous ne manquerons pas de revenir sur ce point.

148. ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES PARALLÈLES HYPERBOLIQUES. Reprenons l'examen de l'éventualité hyperbolique du théorème de l'alternative. Soit à nouveau A le point d'où l'on mène les deux parallèles, *b* et *c*, à la droite *a*.

Menons une sécante *s*, par A, qui coupe *a* au point B (fig. 110). La notion de parallélisme peut maintenant être précisée comme suit :

Partageons la parallèle *b* en deux rayons *b′* et *b″* issus de A (et orientés en sens opposés). Partageons de même *a* en deux rayons opposés, *a′* et *a″*, issus de B. On peut naturellement choisir les notations de façon que *a′* et *b′* soient du même côté de la droite AB, *a″* et *b″* a étant de l'autre côté, et que l'angle formé par *b′* avec le segment AB ne contienne que des sécantes (par A), l'angle formé par *b″* avec le même segment contenant à la fois des sécantes et des non-sécantes.

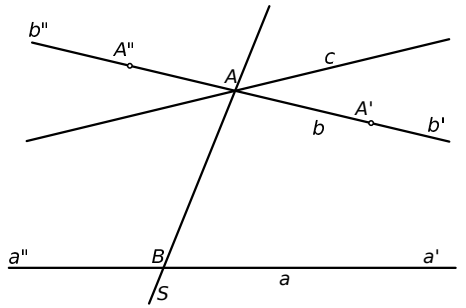


FIG. 110

Ces distinctions une fois faites, nous dirons que :

le rayon *b′* est parallèle au rayon *a′*,
le rayon *b″* est antiparallèle au rayon *a′*,
le rayon *b′* est parallèle à la droite *a*,
la droite *a* est parallèle au rayon *b′*.
Nous avons ainsi défini cinq notions :
celles de droite parallèle à une droite,
droite parallèle à un rayon,
rayon parallèle à une droite,
rayon parallèle à un rayon,
rayon antiparallèle à un rayon.

En géométrie hyperbolique, ces notions jouissent des propriétés suivantes :

1. Par un point, il passe un et un seul rayon parallèle et un et un seul rayon antiparallèle à un rayon donné; ces deux rayons sont dans le prolongement l'un de l'autre.

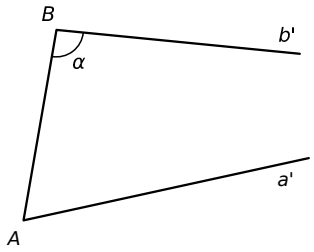


FIG. 111

Soit alors *a′* un rayon issu d'un point A, B un point non situé sur *a′* ni dans son prolongement. Soit *b′* le rayon parallèle à *a′* issu de B. *b′* peut être caractérisé par la propriété suivante : il ne coupe pas *a′*, et sépare, en B, les rayons sécants des rayons non sécants. Plus précisément : les rayons sécants de *a′* issus de

B remplissent l'angle α formé par BA avec b' (fig. 111). Nous nous servirons souvent de cette propriété.

2. Par un point passent deux rayons parallèles à une droite donnée; ils limitent A un angle ne contenant que des sécantes de cette droite, sans être eux-mêmes sécants. — Cette propriété les *caractérise*. — Par un point passent également deux droites parallèles à une droite donnée; ce sont les supports des deux rayons dont il vient d'être question.

3. Par un point passe une et une seule droite parallèle à un rayon donné. C'est le support du rayon parallèle et du rayon antiparallèle.

En géométrie euclidienne, la définition du parallélisme complétée par le Ve postulat d'EUCLIDE entraîne immédiatement les trois conséquences suivantes :

1. Soit a' un rayon, A un point non situé sur a'. Nous savons que par A il passe une et une seule droite parallèle à a'; appelons-la b. Soit A′ un autre point sur b. Par A′ aussi il passe une et une seule parallèle à a', et cette parallèle est encore la même droite b[1].

2. Si b' est un rayon parallèle au rayon a', a' est aussi parallèle à b'; (la relation de parallélisme entre rayons est symétrique ou commutative);

3. Si b' est parallèle à a' et a' parallèle à c', b' est aussi parallèle à c'; (la relation de parallélisme est transitive).

Ces trois propriétés sont-elles aussi valables pour les parallèles hyperboliques ? Elles sont certainement réalisées dans le modèle de POINCARÉ; elles doivent par conséquent se présenter comme des énoncés justes en géométrie hyperbolique. Mais ces énoncés sont-ils aussi des conséquences de la base axiomatique modifiée ? La réponse, nous allons le voir, est affirmative pour tous les trois. Pour le premier, la démonstration est tout à fait simple; pour les deux autres, nous aurons besoin d'un certain nombre de théorèmes préliminaires.

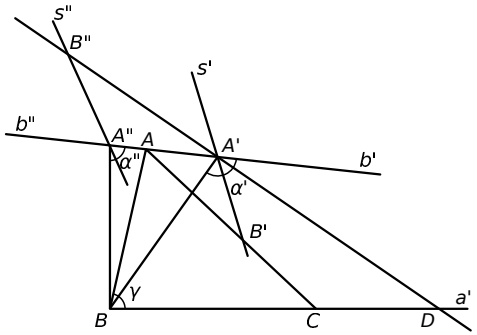


FIG. 112

Voici la démonstration du premier point :

[1] Il est nécessaire de mentionner explicitement cette propriété d'apparence triviale; rappelons en effet qu'en géométrie hyperbolique, on définit tout d'abord les *parallèles issues d'un point* à une droite, et on les définit par la propriété de séparer, *en ce point*, les sécantes des non-sécantes; il n'est pas évident qu'elles possèdent la même propriété en leurs autres points. Nous le démontrons un peu plus bas.

Soient (fig. 112) par A, b' le rayon parallèle et b'' le rayon antiparallèle au rayon a' par B, et soient encore A′ un point quelconque sur b' et A″ un point quelconque sur b''. (Le raisonnement n'est pas exactement le même dans les deux cas.) Il suffit de montrer que les angles α′ et α″ ne contiennent que des sécantes de a'.

Soit s' par A′, dans α′, et B′ sur s'.

Le rayon AB′ coupe a' (par hypothèse), en un point C. L'axiome de PASCH exige que s' coupe le côté BC du triangle ABC[1].

Soit s'' par A″ dans α″, et B″ sur s'', de l'autre côté du point A″. La droite B″A′ est dans α′, c'est donc une sécante; soit D son point sur a'. L'axiome de PASCH et ses conséquences exigent que s'' coupe le côté AB du triangle A″AB, et donc aussi le côté BD du triangle ABD.

L'énoncé 1 est ainsi démontré.

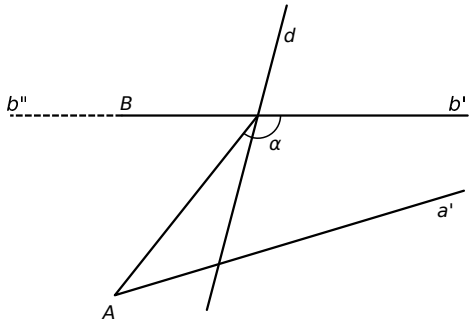


FIG. 113

Corollaire : Soit b' un rayon parallèle à un rayon a', les extrémités des deux rayons se trouvent *du même côté de* d (fig. 113).

Démonstration :

Le rayon b'', prolongement du rayon b', ne coupe certainement pas le rayon a' D'après ce qui a été dit plus haut, il doit donc se trouver à l'extérieur de l'angle α, ce qui signifie que l'extrémité B de b' doit se trouver du même côté de d que A, extrémité de a'.

Il ne semble pas que l'axiome de PASCH puisse assurer aussi aisément les points 2 et 3.

Jusqu'à nouvel ordre, nous aurons à tenir les deux relations de parallélisme possibles entre deux rayons x et y

x est parallèle à y ($x \parallel y$)
y est parallèle à x ($y \parallel x$)

pour différentes.

Pour ce qui concerne la propriété de transitivité, nous nous bornerons à remarquer, pour l'instant, qu'elle n'est pas plus assurée que celle de commutativité.

[1] s' ne peut pas couper le côté AB puisque s' est séparé de AB par A′B.

Renonçant à ne faire intervenir que des propriétés d'incidence et d'ordre plan (ou linéaire), nous allons immédiatement passer à des énoncés reliant le parallélisme aux propriétés de congruence et d'orthogonalité.

Les remarques faites au paragraphe précédent vont maintenant prendre leur importance.

Il sera, enfin, commode d'adopter la notation et la convention de langage suivantes :

Soient b' et c' les deux rayons issus du point A et parallèles à la droite a : nous désignerons par $\sphericalangle(A,a)$ l'angle des rayons b' et c' et nous dirons que *c'est l'angle sous lequel on voit la droite* a *du point* A (fig. 114).

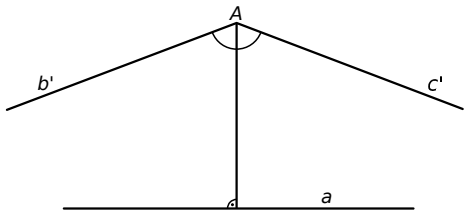


FIG. 114

Théorème : La perpendiculaire abaissée du point A sur la droite a est la bissectrice de l'angle $\sphericalangle(A,a)$.

La perpendiculaire est un axe de symétrie de la figure formée par A, a et les droites passant par A : en effet, la symétrique de toute sécante (qu'elle soit d'un côté ou de l'autre de la perpendiculaire) est également une sécante. Il en découle naturellement que la symétrique de toute non-sécante est aussi une non-sécante, et finalement que la symétrique de chaque parallèle est l'autre parallèle.

Théorème : Si A est à la même distance de la droite a que B de la droite b, les angles sous lesquels on voit a de A et b de B sont égaux (fig. 115).

Abaissons la perpendiculaire AP, de A sur a, et la perpendiculaire BQ, de B sur b. Si AP = BQ, il existe un déplacement amenant b sur a, Q sur P, et B sur A. Ce déplacement amène tout triangle tel que BQQ′ sur un triangle congruent APP′. Toute sécante de b par B est donc amenée sur une sécante de a par A, les angles compris entre ces sécantes et les perpendiculaires AP et BQ étant, par conséquent, égaux.

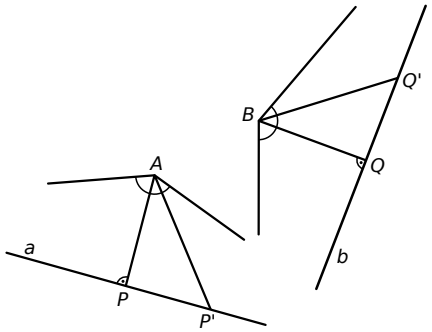


FIG. 115

On en peut dire autant des non-sécantes et des parallèles, ce qui démontre l'énoncé.

La *réciproque* de ce théorème est-elle juste aussi ? Elle s'énonce ainsi :

Si les angles $\sphericalangle(A,a)$ et $\sphericalangle(B,b)$ sont égaux, les distances de A à a, et de B à b sont égales.

À supposer que les perpendiculaires AP et BQ soient inégales (que, par exemple, BQ soit plus longue que AP), il existerait un déplacement amenant les angles $\sphericalangle(A,a)$ et $\sphericalangle(B,b)$ l'un sur l'autre.

La figure ainsi obtenue réaliserait la propriété suivante : d'un point d'une droite, il est possible de mener une même parallèle à deux normales à cette droite. Nous verrons dans un instant que cet énoncé est faux.

Théorème A : Deux perpendiculaires à une même droite ne peuvent pas être parallèles (fig. 116).

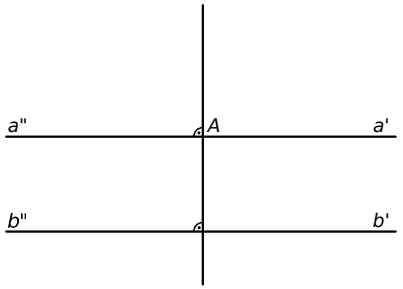


FIG. 116

Si a' était parallèle à b' d'un côté de leur normale commune, par symétrie a'' le serait à b'' de l'autre côté.

Il ne passerait donc par le pied A de la première normale qu'une parallèle à la seconde, ce qui est contraire à l'axiome de LOBATSCHEFSKI.

Il est d'ailleurs clair que deux normales à une même droite ne peuvent pas être concourantes.

Théorème B : Deux droites, faisant avec une troisième droite deux angles égaux semblablement placés, ne sont ni concourantes ni parallèles (fig. 117).

Les deux angles égaux α et α' sont semblablement placés s'ils peuvent être glissés l'un sur l'autre, c'est-à-dire s'il existe un déplacement du plan amenant la droite AB sur elle-même et le rayon a sur le rayon a'.

Soient A et B les sommets des deux angles et M le milieu du segment AB. On abaisse la perpendiculaire MC sur a. On reporte BD = AC en sens opposé. Les triangles MAC et MBD sont égaux comme ayant « un angle égal ($\alpha = \alpha'$) compris entre deux côtés égaux MA = MB, AC = BD) ». Les deux angles en M sont donc égaux — ce qui signifie que MD est dans le prolongement de MC — et l'angle en D, qui est égal à l'angle en C, est droit. CD est donc perpendiculaire commune des deux droites a et a', ce

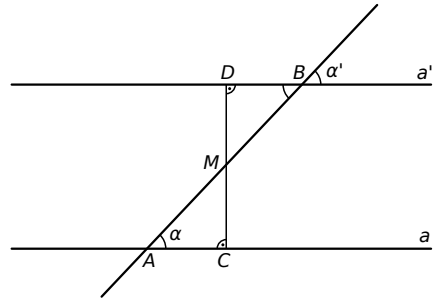


FIG. 117

qui nous ramène au théorème précédent.

Reprenons maintenant le cas de la figure 116, démontrons-le.

Théorème C : Par un point A de la droite *h*, il ne peut pas passer de parallèle commune à deux normales à *h* (fig. 118).

Il suffit évidemment pour cela de montrer que si *a* et *a** sont deux rayons de même sens orthogonaux à *h*, alors par un point A* de *h*, il ne passe pas de rayon parallèle simultanément aux deux rayons *a* et *a**. Soit *b** le rayon parallèle en A* à *a**. Démontrons que *b** n'est pas parallèle à *a* :

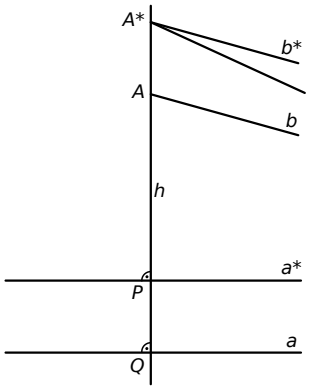


FIG. 118

Faisons glisser la figure formée de la parallèle par A* et de la normale par P le long de la droite *h*, jusqu'à ce que P vienne en Q.

A* vient alors en A et la parallèle *b** en *b*; position dans laquelle elle fait (avec *h*) en A le même angle que *b** en A*.

b et *b**, nous venons de le voir (théorème B), ne sont pas parallèles. D'autre part nous savons qu'elles ne sont pas sécantes. On peut donc mener le rayon parallèle à *b* par A* (du même côté de *h* que *b*). Ce rayon est séparé de *a* par *b*, ce n'est donc pas une sécante de *a*. Il sépare lui-même *b** de *a*, car il se trouve entre *b** et *b*, et par conséquent *b** n'est pas parallèle à *a*.

Variante : Le théorème précédent reste juste si l'on remplace les deux normales *a* et *a** par deux droites faisant le même angle avec *h* : la démonstration reste la même.

Le théorème précédent reste-t-il juste si le point A n'est plus situé sur la droite *h* ?

Il suffit de joindre A au milieu du segment PQ pour être ramené à la variante du théorème C.

Et le même artifice convient d'ailleurs aussi au cas où, dans cette variante elle-même, A ne se trouve pas sur la droite *h*.

En bref, l'énoncé suivant est donc valable sans restriction :

Théorème D : Un rayon ne peut pas être parallèle à deux droites faisant des angles égaux (et semblablement placés) avec une troisième droite.

Théorème E : Un rayon ne peut pas être parallèle à deux rayons issus d'un même point.

Nous démontrons ce théorème par l'absurde :

soient donc *b* et *c* deux rayons issus de B, *a* un rayon issu de A et parallèle simultanément à *b* et à *c* (fig. 119). Les trois rayons se trouvent, comme nous

le savons, d'un même côté de la droite AB. Soit D un point quelconque sur *c*. Menons de D, du même côté de *c* que *b*, le rayon *d* faisant avec *c* le même angle que *b*. Nous allons montrer que *a* doit être simultanément parallèle à *b* et à *d*, ce qui, comme nous le savons, est impossible.

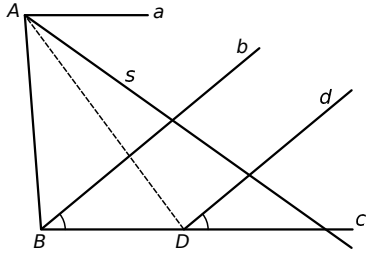


FIG. 119

En effet, d'une part *a* est parallèle à *b*, et *b* sépare donc *a* de *d*. Donc *a* ne coupe pas *d*. D'autre part tout rayon compris entre AB et *a* coupe *c*, puisque *a* est parallèle à *c*. La même chose est donc vraie en particulier des rayons compris entre AD et *a*. Ceux-ci doivent alors couper également *d*, puisque *d* se trouve entre *a* et *c*. Mais ceci signifie que *a* est parallèle à *d*. Notre théorème est ainsi démontré.

Ce théorème assure la commutativité de la relation de parallélisme.

Soit en effet *b* par le point A, et *a* par le point B, tels que *b* soit parallèle à *a* (fig. 120).

Si l'on n'avait pas aussi *a* parallèle à *b*, c'est-à-dire si *a* était non-sécante de *b* sans être parallèle à *b*, on pourrait mener de B le rayon *c* parallèle à *b*. Ce rayon *c* se trouverait du même côté de AB que *a*; il séparerait, d'autre part, *a* de *b*. Toute sécante de *a* issue de A couperait aussi *c*. On aurait donc aussi *b* parallèle à *c*.

b serait ainsi parallèle à deux rayons issus de B, ce qui est impossible (théorème E).

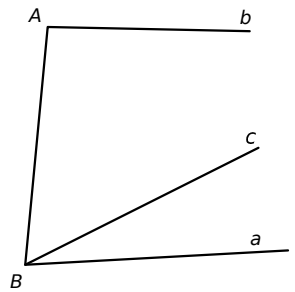


FIG. 120

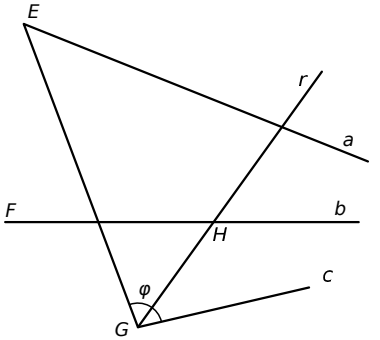


FIG. 121

a est donc le rayon parallèle à *b* par A. Ainsi $b \parallel a$ entraîne $a \parallel b$.

Il est maintenant très facile d'établir aussi la transitivité du parallélisme.

Soient *a* par E, *b* par F et *c* par G, de telle façon que l'on ait les relations $a \parallel b$, et $b \parallel c$. On doit démontrer $a \parallel c$ (fig. 121).

Nous n'examinerons ici que le cas de la figure.

Il suffit de montrer que tout rayon r par G, dans l'angle φ, coupe a.

Mais ce rayon coupe b (en H), puisque $b \parallel c$, et que par conséquent $c \parallel b$ (commutativité du parallélisme). Prolongé, il coupe a, puisque $a \parallel b$, et par conséquent $b \parallel a$.

On a bien aussi $c \parallel a$ et par conséquent $a \parallel c$.

Il en découle naturellement, comme en géométrie euclidienne, que tous les rayons parallèles à un rayon (et tous les rayons auxquels un même rayon est parallèle) forment un « faisceau » de rayons tous parallèles entre eux.

Une première partie de la théorie axiomatique des parallèles hyperboliques est ainsi terminée.

149. Quelques propriétés caractéristiques de la géométrie hyperbolique.

Examinons de plus près l'angle sous lequel on voit une droite d'un point donné. Du point A, abaissons la perpendiculaire AP sur la droite a. À toute distance AP correspond un angle déterminé $\sphericalangle(A,a)$ qui n'est fonction que de cette distance (fig. 122). Soit P* un point entre A et P. Élevons en ce point la perpendiculaire a^* sur AP. Cette perpendiculaire coupe-t-elle les parallèles b et c menées de A à a ?

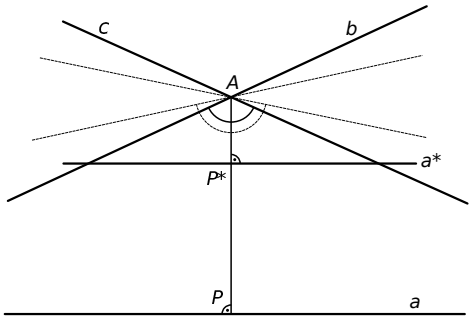


FIG. 122

Tout rayon par A dans l'angle $\sphericalangle(A,a)$ coupe a, et par conséquent aussi a^*.

Il n'y a donc, pour b et c, que l'alternative suivante : si ce ne sont pas des parallèles, ce sont des sécantes de a^*.

La première éventualité est d'ailleurs exclue, puisque b et c ne sauraient être à la fois parallèles à a et à a^*.

a^* coupe donc les deux côtés de l'angle $\sphericalangle(A,a)$, d'où l'inégalité suivante :

$$\sphericalangle(A,a) < \sphericalangle(A,a^*).$$

En d'autres termes :

L'angle sous lequel une droite est vue d'un point est une *fonction décroissante* de la distance de ce point à la droite.

La fonction dont il est ici question est univoque : à toute distance correspond un angle bien déterminé. L'inverse est-il aussi vrai ? Correspond-il aussi à tout angle une distance bien déterminée ? Les propriétés de continuité,

conséquences elles-mêmes de la base axiomatique tronquée, permettent de s'en assurer[1].

Ce fait peut encore être présenté de la façon suivante : Appelons triangle ouvert la figure formée par un segment de droite et deux rayons parallèles issus des extrémités de ce segment (fig. 111). Le nom se justifie par le fait qu'un triangle ouvert est obtenu à partir d'un triangle ordinaire en faisant s'éloigner indéfiniment l'un des sommets de celui-ci, et passant à la limite.

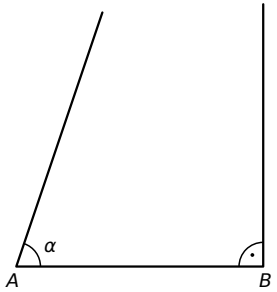


FIG. 123

En particulier un triangle ouvert sera dit *rectangle* si l'un de ses angles est droit (fig. 123).

D'après ce que nous avons vu plus haut, si un triangle ouvert est rectangle en B, l'angle en A, α, ne dépend que de la longueur du segment AB et est univoquement déterminé par celui-ci. (Nous savons d'ailleurs que l'angle α *décroît* lorsque la longueur de AB croît.) Il en suit donc :

Théorème F : Pour que deux triangles rectangles ouverts soient congruents, il faut et il suffit que leurs bases soient égales, *ou bien* que leurs angles soient égaux.

En particulier, nous pouvons donc dire brièvement : *le* triangle rectangle ouvert d'angle α — ce triangle étant déterminé à un déplacement et une symétrie près.

Cette propriété des triangles rectangles ouverts est la clef d'un certain nombre de théorèmes caractéristiques de la géométrie hyperbolique. Nous allons en citer quelques-uns, *bien que nous n'ayons pas ici l'intention d'édifier axiomatiquement la géométrie hyperbolique de façon aussi complète que nous l'avons fait pour la géométrie euclidienne au chapitre III*. Il nous paraît utile de donner encore ces quelques exemples de la façon dont la déduction peut opérer dans un horizon axiomatique autonome.

Théorème : Soient a et b deux droites non sécantes et non parallèles. Il existe une droite orthogonale à a et parallèle à b.

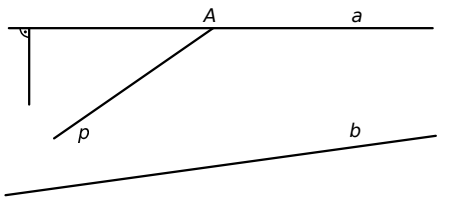


FIG. 124

Démonstration : Choisissons un point A quelconque sur a (fig. 124); par A la parallèle p à b est différente de a, puisque a n'est pas parallèle à b. La droite cher-

[1] La relation numérique entre la perpendiculaire de longueur p et l'angle $\sphericalangle(A,a) = 2\alpha$ est la suivante : $Shp = cotg\ \alpha$, si l'on choisit convenablement l'unité de longueur.

chée est alors le troisième côté du triangle rectangle ouvert dont deux côtés sont formés par p et par a et dont les deux sommets sont situés sur a. Ce côté est en effet parallèle à p, et donc, en vertu de la transitivité du parallélisme, à b. Cette parallèle est unique en vertu du théorème F.

Théorème G : Deux rayons non parallèles déterminent exactement une droite qui leur est parallèle à tous les deux (à l'un dans un sens, à l'autre dans le sens opposé).

Démonstration : Supposons d'abord que les deux rayons, a, b, soient issus d'un même point O (fig. 125), et soit d la bissectrice de l'angle h qu'ils forment en O.

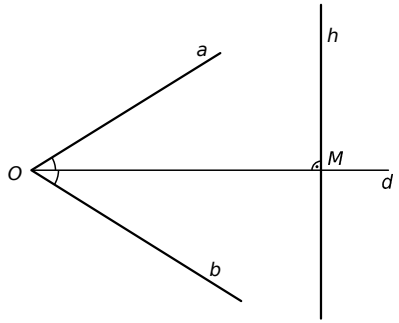


FIG. 125

D'après ce que nous avons vu plus haut, il existe sur la bissectrice un et un seul point M tel que la perpendiculaire h en M à d forme avec a un triangle rectangle ouvert (c'est-à-dire soit parallèle à a). Mais cette même droite h est aussi parallèle à b, puisque les angles $\sphericalangle\, a\mathrm{O}d$ et $\sphericalangle\, b\mathrm{O}d$ sont égaux, et que la longueur OM ne dépend que de la grandeur de ces angles.

Il existe donc une parallèle commune. Cette parallèle est unique : nous savons en effet que la bissectrice de l'angle $\sphericalangle\, a\mathrm{O}b$ tombe sur la perpendiculaire issue de O sur la parallèle commune. Or la longueur de cette perpendiculaire est univoquement déterminée.

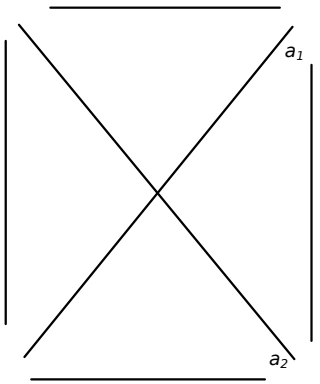


FIG. 126

Si les deux rayons ne se coupent pas, il suffit de leur mener des rayons parallèles par un point A quelconque pour être ramené au cas précédent : *la* parallèle à ces derniers est aussi la parallèle aux premiers.

Remplaçons les deux rayons de l'énoncé précédent par deux droites portant chacune deux rayons opposés. On peut grouper ces 4 rayons en 4 paires de rayons non en ligne droite : Il y a donc (en général) quatre droites parallèles à deux droites données.

Si les deux droites se coupent, aucune des parallèles n'en rencontre une autre (fig. 126).

Si elles ne se coupent pas (sans toutefois être parallèles), on peut démontrer que deux des quatre parallèles se croisent (fig. 127).

Si, enfin, les deux droites a et b sont parallèles en tant que supports des rayons parallèles a' et b', il existe une et une seule parallèle commune c telle que les rayons c' et a'', et c'' et b'', soient respectivement parallèles (fig. 128).

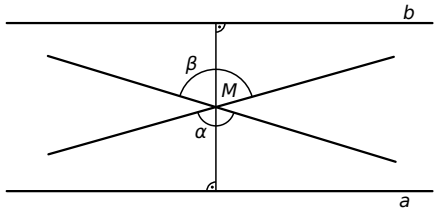


FIG. 127

Nous savons que, par un point, en géométrie hyperbolique comme en géométrie euclidienne, il n'existe qu'une perpendiculaire à une droite donnée. Il ne peut donc exister de perpendiculaire commune p à deux *sécantes* (sinon, on aurait abaissé deux perpendiculaires différentes sur p depuis le point d'intersection de ces deux sécantes).

D'autre part, en géométrie euclidienne, nous savons qu'il existe une infinité de perpendiculaires communes à deux parallèles. Nous avons vu qu'en géométrie hyperbolique, il n'existe *pas* de perpendiculaire commune à deux droites parallèles (nous avons démontré en effet que deux perpendiculaires à une même droite ne peuvent être parallèles, théorème A).

Théorème H : Deux droites non parallèles et sans point commun ont une perpendiculaire commune.

Reprenons la figure formée de deux droites sans point commun et de leurs quatre parallèles (fig. 127). Deux de celles-ci se croisent au point M. Les angles α et β en M sont égaux comme opposés par le sommet.

Mais les rayons issus de M perpendiculaires à a et b sont les bissectrices de ces angles. Ils sont donc dans le prolongement l'un de l'autre, et forment donc une perpendiculaire commune.

Peut-il exister d'autres perpendiculaires communes qui, bien entendu, ne passeraient pas par M ?

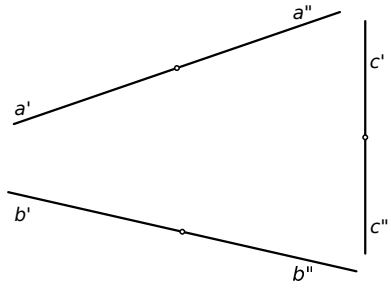


FIG. 128

Nous allons montrer qu'il n'existe qu'une seule perpendiculaire commune à deux droites non sécantes et non parallèles. Supposons en effet qu'il y en ait deux, coupant les deux droites en A et B respectivement A′ et B′ (fig. 129). Reportons la distance BB′ de l'autre côté de B′, jusqu'au point B″, et élevons la perpendiculaire en B″ à a_2. Elle coupe a_1 en A″, et A″ se trouve de l'autre côté de A′ que A. Les triangles

rectangles A′BB′ et A′B″B′ sont égaux comme ayant « un angle (droit) égal compris entre deux côtés égaux (BB′ = B′B″; A′B′ = A′B′) ». Par conséquent A′B = A′B″, β = β′, α = α′. Les compléments de ces angles sont donc aussi égaux, d'où nous concluons que les deux triangles AA′B et A′A″B″ sont égaux comme ayant « un côté égal compris entre deux angles égaux ». En définitive donc AB = A″B″, et l'angle ∢ AA″B″ est droit.

Menons alors par A et A″ les rayons parallèles du même côté à a_2. Ces rayons sont parallèles entre eux, et les angles φ et ψ qu'ils font respectivement avec AB et A″B″ sont égaux, puisque ces angles ne dépendent que des longueurs des segments AB et A″B″ et que ces segments sont égaux. Mais d'autre part a_1 est perpendiculaire à AB et à A″B″. Les angles φ′ et ψ′ sont donc les compléments de φ et ψ. Ils sont donc eux aussi égaux. Nous aurions donc deux rayons parallèles faisant le même angle avec une même droite. Mais, ceci, nous le savons, est impossible.

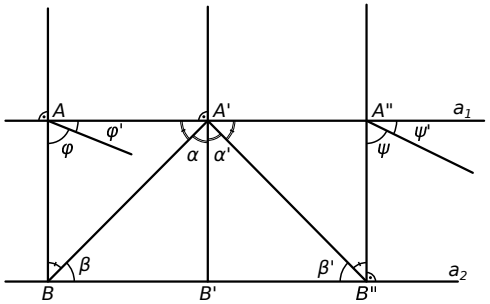


FIG. 129

Encore une fois, reprenons la figure 127. Elle n'est pas seulement symétrique par rapport au centre M, elle l'est encore par rapport à la perpendiculaire commune. Sur chacune des droites il y a donc toujours au moins deux points à la même distance de l'autre droite.

Théorème J : Il ne peut y avoir, sur une droite, trois points à la même distance d'une autre droite.

On remarquera tout d'abord que si deux points A et A′ de l'une des droites sont à des distances AB et A′B′ égales, de l'autre, la perpendiculaire élevée sur la seconde au milieu du segment BB′ est un axe de symétrie de la figure et par conséquent une perpendiculaire commune[1].

Supposons alors que les trois points A, A′, A″ de a soient à la même distance de *b* (fig. 130). Soient B, B′, B″ les pieds des perpendiculaires issues de ces points sur *b*. D'après ce que nous venons de voir, les médiatrices des segments BB′ et B′B″ seraient toutes les deux des perpendiculaires communes de *a* et de *b*. Mais nous savons qu'il n'existe qu'*une* perpendiculaire commune, d'où contradiction.

[1] C'est un fait que l'on peut démontrer facilement par des considérations analogues à celles faites plus haut. Il suffit naturellement de montrer que α = β (fig. 130).

Soit AB un segment « intercepté » par deux droites sans point commun sur une de leurs sécantes communes. Nous le nommerons aussi une *corde* tendue entre les deux droites.

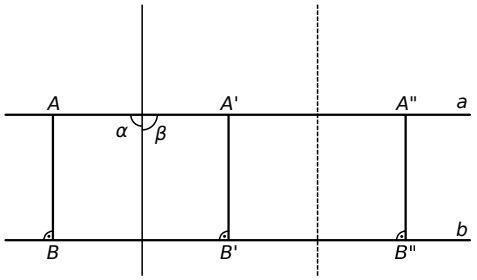


FIG. 130

Il ne peut donc exister qu'une corde tendue perpendiculairement à deux droites non concourantes et non parallèles.

Considérons les cordes attachées en un point fixe A de l'une, *f*, des droites et en un point variable B, de la seconde, *g* (fig. 131). On peut toujours abaisser la perpendiculaire AP de A sur *g* : l'une des cordes attachées en A est donc perpendiculaire à *g*. Les autres sont des obliques : on démontre comme en géométrie élémentaire que la perpendiculaire est plus courte que toute oblique.

Théorème K : La plus courte des cordes tendues entre deux droites non parallèles sans point commun est la perpendiculaire commune.

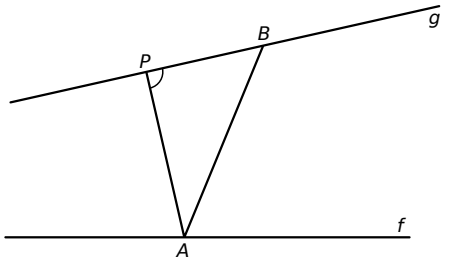


FIG. 131

D'après ce qui précède, il suffit de comparer entre elles les cordes perpendiculaires à l'une des droites, à *g*, par exemple.

Soit donc AB la corde doublement perpendiculaire et A′B′ une autre corde perpendiculaire sur *g*. Nommons δ la distance $\overline{BB'}$ (fig. 132). Introduisons encore les perpendiculaires PQ et P′Q′ symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire commune et telles que

$$Q'B = BQ = \frac{\delta}{2},$$

la perpendiculaire, de pied T, parallèle à *f* et finalement la perpendiculaire RS telle que TS = δ.

Faisons maintenant glisser toute la figure le long de la glissière *g*, chaque

point de celle-ci avançant d'un segment de longueur δ (vers la gauche)[1]. A′ vient en un point A* de la perpendiculaire commune (dont on ne sait pas encore s'il est au-dessus ou au-dessous de A), P vient en P′ et R en un point R′ de la parallèle par T. La droite *f* vient donc en *f′* par R′ et P′. Elle passe au-dessous de *f* en A, et viendra donc couper BA prolongée (en A*) au-dessous de A.

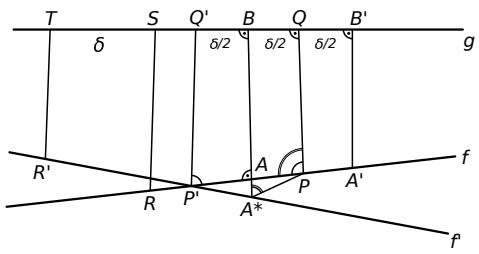


FIG. 132

Ainsi : A*B = A′B′ > AB.

Le théorème est démontré. Citons deux corollaires, ayant l'un et l'autre une certaine importance historique.

Corollaire 1. Dans un « trapèze » tel que le quadrilatère PQQ′P′, dont les côtés PQ et P′Q′ sont égaux et à angle droit avec la base QQ′, les angles supérieurs (en P et P′) sont aigus.

Ces angles sont naturellement égaux.

Il en est de même des angles en P et en A* du quadrilatère A*BQP. Mais PA* est une oblique (puisque la perpendiculaire est PA). L'angle en A* est donc aigu. Il en est de même, à plus forte raison, de l'angle en P du quadrilatère birectangle et isocèle PQQ′P′.

Corollaire 2. Le quatrième angle d'un quadrilatère dont trois angles sont droits, est aigu.

Les angles en A, B et Q du quadrilatère ABQP sont droits. Le côté PQ est plus long que le côté AB.

Portons-le sur A*B (A* au-dessous de A).

Le quadrilatère A*BQP répond aux conditions du corollaire 1. Son angle en P est aigu; c'est donc, à plus forte raison, le cas aussi du quatrième angle du quadrilatère trirectangle ABQP.

Théorème L : La somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits.

Pour démontrer ce théorème, nous nous servirons du *lemme* suivant :

si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, ils sont égaux.

Remarquons que nous ne pouvons pas conclure directement à l'égalité de l'autre angle aigu, étant donné qu'en géométrie hyperbolique la somme des

[1] C'est-à-dire opérons le déplacement qui amène *g* sur *g* et B′ sur B.

angles d'un triangle dépend du triangle considéré.

Nous démontrons le lemme en montrant qu'un triangle rectangle est univoquement déterminé, à un déplacement et une symétrie près, par son hypoténuse et l'un de ses angles aigus, par exemple γ. Soit en effet BC l'hypoténuse donnée (fig. 133); reportons en C l'angle γ donné; nous obtenons une droite sur laquelle nous pouvons abaisser de B une et une seule perpendiculaire. Celle-ci détermine le triangle en question de façon univoque (à une symétrie près).

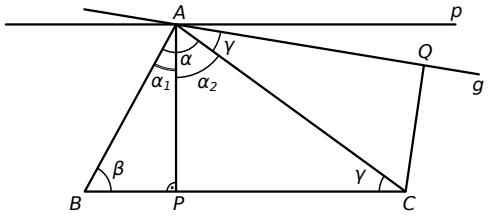


FIG. 133

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Soit ABC un triangle quelconque, α, β, γ ses angles en A, B et C (fig. 133). Abaissons la hauteur AP du sommet A sur la base BC[1], et soient α_1, α_2 les deux angles qu'elle forme en A avec les côtés du triangle. On a

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

d'où

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta + \alpha_2 + \gamma.$$

D'autre part, la somme des angles du triangle APB est $\alpha_1 + \beta + 90°$, celle des angles du triangle ABC est $\alpha_2 + \gamma + 90°$. Si notre théorème était démontré pour ces deux triangles, on aurait :

$$\alpha_1 + \beta + 90° < 180° \quad \text{ou} \quad \alpha_1 + \beta < 90°$$
$$\alpha_2 + \beta + 90° < 180° \quad \text{ou} \quad \alpha_2 + \beta < 90°$$

d'où en additionnant

$$\alpha_1 + \beta + \alpha_2 + \gamma = \alpha + \beta + \gamma < 180°.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème pour les triangles rectangles, par exemple le triangle APC.

Menons la perpendiculaire *p* à AP en A, et reportons l'angle γ en A à partir de AC du même côté que *p*. Nous allons montrer que

$$\alpha_2 + \gamma + 90° < 180°, \text{ ou encore que } \alpha_2 + \gamma < 90°.$$

Ceci signifie simplement qu'il faut montrer que la droite *g* tombe à l'intérieur

[1] Il y a toujours un sommet pour lequel le pied de la hauteur correspondante est *entre* les deux autres sommets.

de l'angle formé par p et le côté AC du triangle.

Or : 1. g ne peut pas se trouver à l'*extérieur* de cet angle. Abaissons en effet la perpendiculaire CQ de C sur g. Les triangles rectangles APC et ACQ sont congruents en vertu de notre lemme. On a donc AP = CQ. Si g était au delà de p, p couperait le segment CQ en un point Q′ compris entre C et Q. On aurait donc $\overline{CQ'} < \overline{CQ}$ et donc $\overline{CQ'} < \overline{AP}$. Mais AP est, en tant que perpendiculaire commune, la plus courte distance entre p et la droite BC, d'où contradiction.

2. Il faut encore montrer que g ne peut être identique à p. Si g était identique à p, on aurait $\alpha_2 + \gamma = 90°$, et donc, comme $\alpha_2 = \sphericalangle$ QCA en raison de la congruence des triangles APC et ACQ, $\sphericalangle$ QCP = $\alpha_2 + \gamma = 90°$.

Les deux non-sécantes p et BC auraient donc deux perpendiculaires communes, ce qui, comme nous le savons, est impossible.

g doit donc se trouver en deçà de p.

C.Q.F.D.

150. RÔLE RÉDUIT ET RÔLE SECRET DE L'INTUITION. Nous avions l'intention de montrer comment la géométrie hyperbolique peut être construite déductivement, en partant d'une base axiomatique aussi exactement formulée que celle de la géométrie euclidienne, pour aller rejoindre les théorèmes classiques où la différence avec la géométrie élémentaire est nettement marquée. La chose est faite et, à cet égard, nous ne gagnerions rien d'essentiel à en prolonger l'expérience.

(Plus haut, il nous est arrivé d'insister sur les points de ressemblance entre la géométrie hyperbolique et la géométrie classique. Nous appuyons maintenant sur les différences. Qu'on veuille bien ne pas s'en étonner : notre souci est ici de comprendre comment la déduction géométrique peut être libérée de l'hypothèque trop pesante d'une intuition spatiale non analysée. Or, ce n'est pas sur les points où elle progresse parallèlement à la géométrie élémentaire, mais bien là où elle s'en écarte que l'autonomie de la géométrie hyperbolique peut être mise le plus valablement à l'épreuve.)

Nous avons donc montré par le fait, en la pratiquant, que la déduction peut s'exercer sans à-coup dans le cadre hyperbolique. Sur un point cependant, ce qui vient d'être fait n'est pas encore concluant. Nous nous demandions si, en retraduisant de la colonne de droite dans la colonne de gauche les énoncés hyperboliques qui s'engendrent les uns les autres, nous finirions par retrouver, dans la colonne de gauche, une base axiomatique complète de la géométrie euclidienne. Ce point n'a pas encore été éclairci. Il le sera un peu plus loin.

Pour l'instant, c'est sur le rôle de l'intuition que nous allons encore une fois fixer notre attention. Au moment où nous axiomatisions la géométrie classique, nous limitions le rôle de l'intuition, mais nous ne le contestions pas encore.

Rien ne nous obligeait encore à le contester, pas même l'expérience de l'axiomatisation qui allait se développant. L'intuition restait garante des évidences fondamentales. Les axiomes n'avaient pas pour fonction de refouler l'intuition, mais d'en bien marquer les points d'insertion. L'axiomatisation, en un mot, représentait le moyen même d'une conception plus claire, d'une spécification plus aiguë de l'intuition.

La situation telle qu'elle se présente maintenant est fondamentalement différente. Il ne nous est plus possible de maintenir l'intuition dans son rôle incontesté de dernier arbitre. Elle n'est pas seule à orienter les démarches du géomètre-axiomaticien. Si elle en avait encore la prétention, l'édification *autonome* de la géométrie hyperbolique pourrait s'interpréter comme une ironique démonstration du contraire. Le géomètre n'est plus livré sans recours à l'intuition, et à la contrainte des évidences par lesquelles elle s'exprime. Un nouveau facteur est apparu, non pas un facteur extérieur ou étranger, mais bien un facteur interne (et presque endogène), celui de l'expérience même que représente le développement de la géométrie le long de ses lignes les plus authentiques.

La fonction de l'intuition doit être sérieusement mise en cause : c'est là, au point où nous en sommes, l'enseignement qui ressort le plus clairement des « événements géométriques » dont ce chapitre rend compte. Les faits sont là. Il ne servirait à rien de les ignorer : le procès de l'intuition du géomètre est ouvert.

Mais l'intuition géométrique a-t-elle complètement perdu la partie ? Son rôle est-il terminé, et doit-elle être totalement déchue de ses fonctions ?

Les questions ne viennent certes pas à l'improviste. Plusieurs fois déjà, nous les avons entrevues, effleurées et préparées. Ici, cependant, elles marquent un *nouveau tournant de notre étude*. Mais ne vont-elles pas décourager ou irriter certains esprits que l'impatience de conclure aura peu à peu gagnés ? Peut-être n'y verront-ils que l'annonce d'une nouvelle tergiversation ou que le signe d'une impossibilité de dénouer la situation ?

« Il n'y a pas de compromis possible, diront-ils. Comment pourrait-on mettre l'intuition en doute sur un point et lui conserver sa fonction de garantie dernière sur un autre point. Elle ne mérite confiance que si elle ne peut pas être soupçonnée. Il ne peut pas y avoir de crise partielle de l'évidence. Il ne peut y avoir qu'une crise totale, ou pas de crise du tout. En mathématiques (et la géométrie ne fait pas exception) la vérité ne se donne pas à demi.

» L'expérience dont il a été ici question révèle-t-elle vraiment que l'évidence géométrique peut être légitimement contestée, et l'intuition prise à revers ? Dans ce cas, l'analyse de la situation est terminée. Le rôle de l'intuition en tant qu'instance de légitimité, est également terminé. Peu importe le rôle secondaire ou accessoire qui finira par lui rester. Pour ce qui concerne

la question des fondements, il faut passer à une autre perspective. »

Que répondre ? Tout d'abord ceci : Il ne faut pas espérer que le procès en révision (et non en exclusion) de l'évidence puisse être définitivement évité, en passant simplement à autre chose. Le problème de la connaissance logico-mathématique révèle partout les mêmes caractères essentiels : nous avons eu l'occasion de le dire déjà à propos de la dialectique de la déduction et de la théorie générale de l'objet, au chapitre IV. Ce n'est pas ailleurs, c'est ici-même que le problème peut et doit être traité. La géométrie est précisément le terrain de l'expérience privilégiée susceptible de nous éclairer.

Revenons donc à notre question :

l'intuition géométrique a-t-elle vraiment perdu la partie ?

Précisons bien que nous n'entendons pas parler seulement de l'intuition qui reste active et intacte dans l'horizon axiomatique, de l'intuition qui reste la garantie des évidences sur lesquelles se fonde la théorie générale de l'objet et sans lesquelles la dialectique de la déduction ne pourrait pas s'exercer. Cette intuition réduite reste fortement installée dans ses positions, notre analyse ne l'a pas mise directement en cause. Elle en a plutôt accentué ce qu'on pourrait appeler le rôle inaliénable. Et si les évidences de ce niveau pouvaient être, elles aussi, entraînées dans la crise de l'évidence géométrique, ce ne serait pas en conséquence immédiate de notre analyse actuelle, mais plutôt par un rejaillissement des résultats de celle-ci sur le problème général de la connaissance. Dans l'horizon axiomatique l'intuition n'a pas pu perdre la partie puisque la partie n'y a pas été sérieusement engagée.

Au niveau géométrique, au contraire, c'est-à-dire au niveau des précédentes synthèses dialectiques, la partie s'est très rudement engagée. C'est là que l'intuition a été sérieusement touchée et qu'une partie au moins de ses prérogatives lui ont été arrachées. Quel rôle lui reste-t-il ? Les services qu'elle nous rend encore ne sont-ils pas tout à fait secondaires ? Ne voit-on pas venir le moment où nous pourrons nous en passer complètement ? Telles sont les questions auxquelles il nous faudrait maintenant répondre, auxquelles nous répondrons de façon bien moins sommaire que l'interlocuteur auquel nous donnions la parole il y a un instant.

Le lecteur qui aura suivi avec quelque attention l'axiomatisation précédente de la géométrie hyperbolique se sera peut-être étonné de l'allure de certaines de nos démonstrations. Il aura certainement remarqué que, loin de renoncer aux fenêtres interdites, nous en avons fait un usage constant. Nous avons multiplié l'emploi des figures, nous avons eu recours, avec une certaine préférence, aux déplacements en tant que moyens de démonstration (aux déplacements hyperboliques, bien entendu), à différentes reprises, nous avons employé sans hésitation les expressions « à droite » et « à gauche ». Nous avons parlé de droites qui se croisaient, de droites qui passaient d'un côté à l'autre d'une autre

droite, de points qui se trouvaient plus haut ou plus bas que tels autres, etc. Peu à peu, c'est presque la totalité du vocabulaire géométrique qui est rentré en usage, ici dans sa signification antérieure presque intacte, et là avec un sens très visiblement altéré. C'est en même temps l'intuition géométrique qui reprenait le terrain perdu, sans avoir besoin, sur certains points, de se renier le moins du monde, tandis que, sur d'autres points, elle devait faire preuve de souplesse et d'une très remarquable faculté d'adaptation. Peu à peu, elle reprenait même la conduite des opérations déductives.

Certes, aucune de ces initiatives ne pouvait être dispensée du contrôle axiomatique le plus sévère, contrôle effectué au sein et selon les normes de l'horizon axiomatique, mais la même discipline stricte devait être observée déjà lors de notre première axiomatisation, au moment où l'intuition n'était encore nullement mise en cause. On pouvait encore feindre d'entrer en compétition avec elle, avec l'espoir de la voir sortir intacte de toutes les épreuves. Le nouveau, c'est que le contrôle est maintenant autre chose qu'une formalité au cours de laquelle on ne constatera que des erreurs par omission et jamais des fautes contre la vérité. Le contrôle axiomatique a maintenant la priorité, c'est lui l'instance légitimante, l'instance de vérité à laquelle l'intuition doit apprendre à se plier... Mais, cette dernière affirmation, ne va-t-elle pas trop loin ? Nous avons encore d'autres possibilités de contrôle, sans devoir descendre complètement sur le plan axiomatique : ce sont les modèles, dont le modèle de POINCARÉ vient de nous fournir un exemple célèbre.

Ai-je, par exemple, à vérifier la relation existant entre la distance d'un point à une droite et l'angle sous lequel cette droite est vue de ce point, rien ne m'empêche de prendre le modèle pour lieu de ma vérification.

On me dira peut-être que, le modèle ayant été lui-même construit dans une géométrie que nous avions axiomatisée au préalable, la différence n'est pas grande. Elle l'est, cependant, car l'axiomatisation dont il s'agit ici est « l'axiomatisation de première instance », l'axiomatisation dont l'intuition géométrique sort précisée mais non altérée. Rien ne m'oblige même à me référer à la construction axiomatique du modèle. Dans sa contexture géométrique (qui, seule, intervient dans le contrôle), le modèle peut être établi en dehors de toute axiomatisation, dans le cadre géométrique et méthodologique, tel qu'il se présente après la première axiomatisation et avant la seconde synthèse dialectique. Sous cet angle, les choses prennent un aspect assez paradoxal : on y voit l'intuition géométrique installée en contrôle d'elle-même, mais non pas pour s'assurer qu'elle ne dévie pas des normes qui lui étaient fixées; elle contrôle, au contraire, au moyen de son ancienne vision des choses, la nouvelle vision qu'elle doit s'en former. Nouvelle vision qui, sur certains points bien marqués, s'écarte notablement de l'ancienne.

Revenons à notre question. L'expérience de l'édification de la géométrie

hyperbolique a-t-elle mis l'intuition géométrique hors d'action définitivement et irrémédiablement ?

Que l'intuition ne sorte pas intacte de cette expérience, c'est là un fait acquis, sur lequel il n'y a plus à revenir. Mais il faut se garder de simplifier à outrance la situation à laquelle on est ainsi conduit. L'intuition reste en jeu même dans l'axiomatisation de la nouvelle géométrie, plus ou moins explicitement et plus ou moins secrètement. Il ne se produit pas de rupture bien nette entre ce que l'intuition est avant l'expérience et ce qu'elle est devenue après l'expérience. Il s'installe, au contraire, un jeu assez souple (et assez ferme) entre une première conception et une conception révisée de la géométrie. Contradictoires, si on les place au même niveau en compétition l'une avec l'autre, elles ne le sont pas, si elles occupent leurs niveaux respectifs de dialectisation.

Il ne sert à rien de nier que la nouvelle reste pour une part fondée dans l'ancienne, que celle-ci subsiste, dans sa forme primitive, à peine retouchée, à côté de sa forme altérée. C'est là un fait méthodologique qu'on ne saurait négliger sans arbitraire.

151. NON-CONTRADICTION DE LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE.

Nous n'avons certainement pas choisi au hasard la base axiomatique à partir de laquelle nous avons esquissé la reconstruction autonome de la géométrie hyperbolique. Dans une perspective historique, ce choix se présente comme l'aboutissement d'une longue suite d'essais tendant à épurer la géométrie de toutes suppositions inutiles. Dans le cadre même de cette étude, le théorème de l'alternative suffit à le suggérer. Mais ce choix est-il nécessaire ? Cette base axiomatique est-elle la seule qui convienne, la seule à partir de laquelle la géométrie hyperbolique puisse être édifiée déductivement ? Il n'y a, au contraire, aucune difficulté à indiquer d'autres ensembles d'axiomes formant une base axiomatique équivalente à celle dont nous nous sommes servis.

MENGER a proposé, par exemple, un système d'axiomes de la géométrie hyperbolique dans lequel le nombre des notions primitives est extraordinairement réduit. Il n'y figure, à ce titre, que des notions projectives, pour l'essentiel, celles du point, de la droite, et de la relation d'incidence. Les autres notions indispensables pour édifier une géométrie peuvent être définies explicitement à l'aide de ces notions premières. La relation « entre », en particulier, s'y introduit par une définition fort subtilement choisie, mais dont la convenance est loin de s'imposer du premier coup.

Le nombre des axiomes est, lui aussi, fortement réduit en comparaison de ceux auxquels nous avons eu recours dans nos édifications axiomatiques. L'un ou l'autre d'entre eux demanderait d'ailleurs à être expliqué, les raisons qui en motivent l'énonciation n'étant pas claires d'elles-mêmes.

La différence entre ce second système d'axiomes et celui dont nous sommes partis est véritablement frappante. Les notions primitives, nous l'avons dit, ne figurent plus qu'en nombre extrêmement réduit dans le nouveau système. Nous n'y trouvons plus aucun axiome relatif à l'ordre linéaire ou à l'ordre plan, aucun axiome non plus concernant la congruence. Certes, l'équivalence de ce nouveau système et de l'ancien ne saute pas aux yeux. Nous renoncerons cependant à en donner ici la démonstration, qui exigerait passablement de temps et d'attention.

Pas plus que la première, cette autre base axiomatique n'a été choisie au hasard. Personne ne pensera qu'une réduction aussi considérable du nombre des notions primitives et des axiomes ait pu se faire sans essais répétés et sans une connaissance préalable de la géométrie hyperbolique et de ses modèles. On pourra même s'étonner que la dialectique de la déduction réussisse à reconstruire une « géométrie entière » à partir d'un matériel axiomatique aussi contracté.

Que voulons-nous suggérer par cette dernière remarque ? Nous aimerions qu'on se demande ce qui arriverait si l'on choisissait des axiomes au hasard, si l'on renonçait à se faire éclairer par la connaissance antérieure des modèles ou par une première édification axiomatique. La dialectique de la déduction trouverait-elle encore à s'exercer ? Les conditions d'un raisonnement normal se trouveraient-elles encore réalisées ?

Rien ne nous empêchera de *commencer* à raisonner selon les normes valables dans l'horizon axiomatique, mais selon toute probabilité, nous n'irons pas très loin : commencée au hasard ou dans l'arbitraire, l'aventure finira, tôt ou tard, dans la contradiction.

Rien ne nous assure, en effet, qu'un ensemble d'énoncés portant sur des notions communes et formulées sans tenir compte de certaines précautions ou de certaines informations soit de lui-même non contradictoire. La contradiction est un événement normal dans la rencontre d'idées que rien n'a, d'avance, accordées.

Jusqu'ici, le problème de la non-contradiction de la géométrie ne s'est pas posé pour nous avec une acuité particulière; c'est aussi que les énoncés géométriques ne se sont jamais présentés à nous sous la seule garantie de leur exactitude grammaticale ou syntactique. Si le choix d'une base axiomatique comporte une certaine liberté, il serait faux de le dire arbitraire. Les éléments réunis en une base axiomatique offrent des gages très sérieux d'un accord à la fois préalable et profond, à commencer par l'évidence des propositions de départ.

On s'étonnera peut-être de voir l'évidence et l'intuition (qui la soutient) évoquées comme garanties au moment même où nous prétendons que la crise

de l'évidence et de l'intuition s'est ouverte. Est-il utile de frôler ainsi le paradoxe ? Le paradoxe n'a d'autre but ici que d'attirer l'attention sur certaines distinctions qui doivent être faites, sur lesquelles il nous semble nécessaire de revenir et d'insister. Il n'y a pas à en douter, c'est bien l'évidence et l'intuition qui sont mises en cause par l'expérience géométrique dont nous tirons à ce moment les conséquences. Il est d'ores et déjà établi qu'elles ne sortent pas indemnes de cette épreuve. Mais, gardons-nous de considérer l'évidence comme un témoin de vérité qui aurait déçu notre confiance et qui, de ce fait, ne mériterait plus d'être cru. L'évidence ne doit pas être imaginée sous les traits d'une personne qui nous aurait fait de grandes promesses, qui nous aurait assuré qu'elle tenait le tout dernier mot concernant les vérités géométriques, dont les prétentions se seraient révélées exagérées, qui nous aurait ainsi trompés et à laquelle il serait désormais impossible de se fier en rien. L'idée qui faisait de l'évidence un témoin irrécusable et incorruptible, c'était la nôtre. Nous venons de nous apercevoir que cette idée n'est pas juste en tous points et nous cherchons un responsable : le responsable c'est nous-même. Le procès de l'évidence est ouvert, disions-nous, il aurait fallu dire : le procès de l'évidence en nous. L'accusé, ce n'est pas une évidence défaillante qui nous aurait volontairement induits en erreur, et l'idée que nous nous étions faite de l'évidence, mais c'est notre *théorie* de l'évidence. En un mot, ce qui ne sort pas intact de l'aventure, c'est notre propre vision du rôle de l'intuition. Nous avions pensé qu'elle nous était donnée comme une instance dernière aux jugements irrévocables, comme une instance absolue. Les faits viennent de nous démontrer que nous commettions une erreur. L'évidence n'est donc pas l'instance infaillible que nous avions imaginée; mais les faits ont-ils démontré que l'évidence est un simple trompe-l'œil ? Il n'en est pas un seul qui permette une telle interprétation. Tenir l'intuition géométrique pour nulle, ce serait tomber d'une erreur grave dans une erreur probablement plus grave encore. Rien ne vient justifier ici la fausse rigueur du « tout ou rien ».

Le problème de l'évidence, c'est donc de mieux savoir quelle est la valeur, et quelle est la portée de l'évidence. Ce n'est pas de choisir l'une ou l'autre de deux solutions, dont ni l'une ni l'autre ne convient, celle de l'évidence absolue que l'expérience réfute et celle de l'évidence fallacieuse que la pratique dément. C'est un problème de connaissance qui tourne vers nous sa face objective, un problème comme tant d'autres, où ce qui doit être étudié est un aspect de l'homme engagé dans la connaissance du monde. L'évidence en nous en tant qu'expression, pour nous, d'un certain mode et moyen de connaissance, peut être amenée devant nous, en quelque sorte sous le regard de notre esprit, pour y être examinée comme un phénomène mental ayant ses caractères propres. Le sentiment de certitude qui accompagne la prise en conscience de l'évidence se présente alors comme un fait dont il faut tenir compte, mais qui ne doit pas être arraché à son contexte. Dans ce contexte, c'est un sentiment (éprouvé par un homme) dont il n'est pas interdit de se demander jusqu'à quel point il est justifié.

Mais ce problème est-il véritablement abordable ? Cet examen peut-il être réellement entrepris avec les moyens dont nous disposons ? Cet examen n'est déjà plus à faire. Il nous suffira de rappeler deux étapes de notre étude où nous avons analysé le rôle de l'intuition avec un soin tout particulier : toute la partie du chapitre II consacrée à la discussion de l'aspect intuitif tout d'abord et, plus tard, au chapitre IV, l'examen détaillé des rapports existant entre les trois aspects avant la seconde synthèse dialectique. Dès le chapitre II, l'idée d'une intuition schématisante et cependant porteuse d'un sentiment de certitude absolue n'avait plus rien de paradoxal. Expression même de la structure mentale qui est biologiquement la nôtre, l'intuition formule, à l'échelle humaine, une information à la fois sommaire et sûre.

En considérant les choses sous cet angle, on peut comprendre qu'il puisse subsister une différence essentielle entre un choix d'énoncés plus ou moins arbitraire et un ensemble de propositions fondamentales suggérées par l'intuition. Celle-ci (si nous l'avons compris nous n'avons cependant pas expliqué pourquoi) saisit un aspect possible du monde réel et, même si elle ne nous transmet qu'une apparence schématisée, l'incarnation de cette possibilité dans notre organisation mentale reste garante de la non-contradiction de l'aspect théorique qui pourra lui correspondre.

D'un autre point de vue, en un certain sens complémentaire au premier, la non-contradiction de l'aspect théorique peut être envisagée comme une condition pour que notre organisation mentale puisse être ce qu'elle est, pour une condition donc de la possibilité de l'horizon intuitif, comme une condition enfin pour que l'aspect intuitif du monde puisse se constituer en nous.

L'un de ces deux points de vue est-il plus légitime que l'autre ? Cette question est fort probablement l'une des plus profondes qu'une méthodologie des sciences puisse se poser. Ce n'est d'ailleurs qu'une variante de la question fondamentale que nous étudions depuis le début de cet ouvrage. À chaque tournant la question de l'irréductibilité des trois aspects de la géométrie revient et se pose à nouveau avec une acuité toujours nouvelle. Chaque fois, d'ailleurs, la réponse est la même : rien ne permet de penser que l'élimination totale de l'un ou l'autre des trois aspects puisse jamais être menée à bonne fin.

Pour la variante que nous venons de rencontrer, la situation est tout à fait semblable : Il ne semble pas qu'une méthodologie des sciences puisse jamais être fondée sur une antériorité totale de l'empirique ou sur une antériorité totale du théorique. Le recours à un certain principe de dualité paraît inévitable.

Le problème de la non-contradiction de la géométrie pouvait donc rester à l'arrière-plan tant que nous ne prétendions pas renoncer à nous appuyer sur

l'intuition spatiale. La chose change naturellement du tout au tout, s'il doit s'agir d'une édification autonome dans l'horizon axiomatique. Si, par exemple, un système d'axiomes nous était présenté avec défense absolue de nous servir des « fenêtres interdites » et, par conséquent, sans que nous puissions rien savoir de la façon dont ces énoncés ont été obtenus et choisis, aurions-nous la moindre possibilité de reconnaître du premier coup s'ils sont contradictoires entre eux ou non ? Bien entendu, nous pourrions faire l'essai d'une déduction prolongée et s'éclairant peu à peu des résultats de sa propre activité. Nous reviendrons au paragraphe suivant sur cet aspect de la question.

Mais, pour ce qui concerne la géométrie hyperbolique, la question de la non-contradiction peut être tranchée d'un coup, ou du moins la question de la contradiction et de la complétude relativement à celle de la géométrie classique. Il suffit, pour cela, de réaliser un modèle hyperbolique de la géométrie euclidienne. Voici comment la construction de ce modèle se présentera :

Revenons à nos deux colonnes d'énoncés, la colonne euclidienne restant à gauche et la colonne hyperbolique à droite. Nous allons établir un nouveau dictionnaire, en partant, cette fois, de la colonne de droite. Il nous faudra donc commencer par effacer tout ce qui se trouve dans la colonne de gauche. À droite, au contraire, nous conservons tous les énoncés de la base axiomatique modifiée, de la base à partir de laquelle nous avons esquissé plus haut la reconstruction axiomatique autonome de la géométrie hyperbolique. Nous n'aurons plus à nous demander pourquoi et comment ces premiers énoncés y ont été introduits : ils y figurent maintenant dans leur propre droit. Ce droit s'étend à tous les énoncés qu'on peut en déduire et à aucun autre. En d'autres termes, le droit à être cité viendra, pour un énoncé quelconque, du fait même d'avoir été déduit. Pour établir notre dictionnaire, nous aurions naturellement à opérer un certain choix parmi les énoncés qui seraient ainsi mis à notre disposition.

Remarquons-le, c'est exactement de la même façon que nous avons procédé, à partir de la base axiomatique euclidienne, lors de la définition de notre premier dictionnaire, sans le dire aussi explicitement, il est vrai. Notre premier soin fut alors de définir, de gauche à droite, et en partant d'énoncés valables dans la colonne de gauche, les points-*h* et les droites-*h*, c'est-à-dire les éléments qui devaient ensuite jouer le rôle de point et de droite dans la géométrie hyperbolique. Notre premier soin doit être maintenant de définir les points-*e* et les droites-*e*, c'est-à-dire les éléments auxquels nous pouvons faire jouer le rôle de points et de droites au sens euclidien. Pour les points, la définition est aussi simple qu'elle peut l'être : Tout point (du plan hyperbolique) est aussi à considérer comme un point-*e*.

Pour les droites, quelques mots d'explication sont encore nécessaires. En géométrie hyperbolique, le lieu des points équidistants d'une droite (d'un même

côté) n'est pas une droite. Sur une droite *a*, il existe, au plus, deux points équidistants de toute autre droite, *b*, qui ne coupe pas la première. Le lieu d'un point situé à une distance *d* de *a* (toujours d'un même côté) est donc une courbe qui ne peut avoir plus de deux points en commun avec toute autre droite *b*.

Dans le modèle de POINCARÉ, les équidistantes d'une droite-*h a* (représentée par l'arc-Γ du même nom), sont des arcs de cercle, les arcs de cercle du faisceau défini par le cercle-Γ *a*, et par le cercle-absolu ω.

Dans la reconstruction axiomatique autonome de la géométrie hyperbolique, nous n'avons pas poussé la déduction jusqu'au point où les propriétés des équidistantes viennent prendre place entre les propriétés des droites et les propriétés des cercles. Qu'il nous suffise ici de savoir que cette déduction peut être faite.

Avons-nous la liberté de poser maintenant que toute équidistante doit être une droite-*e* ? Nous aurions trop de ces dernières. Mais fixons un point O et menons tout d'abord toutes les droites (hyperboliques) par ce point. Ces droites spéciales seront à considérer comme des droites-*e*. Envisageons ensuite toutes les équidistantes aux droites de ce premier faisceau (choisi d'ailleurs arbitrairement une fois pour toutes). (Les droites elles-mêmes peuvent être considérées comme des équidistantes spéciales, comme des équidistantes à la distance O.) Dans leur ensemble ces équidistantes définissent les droites-*e*.

Deux équidistantes d'une même droite hyperbolique seront, enfin, à considérer comme deux *parallèles*-e.

Il ne serait pas très difficile de montrer que les points-*e* et les droites-*e* ainsi définis satisfont à tous les axiomes des groupes de l'incidence, de l'ordre sur les droites et dans le plan, de la continuité, même à l'axiome euclidien des parallèles.

On peut enfin satisfaire aux axiomes de la congruence par les définitions suivantes : Les droites par O sont à la fois euclidiennes et hyperboliques. On définira l'angle euclidien de deux de ces droites comme étant simplement leur angle-*h*. Pour deux droites-*e* concourantes quelconques, leur angle (euclidien) sera, par définition, le même que celui que forment, en O, les parallèles qu'on peut leur mener par ce point.

La congruence euclidienne des segments peut être également définie en deux étapes : Pour les segments ayant une extrémité en O, la congruence euclidienne est à nouveau définie par la congruence hyperbolique.

L'égalité ou l'inégalité s'étendra ensuite aux autres segments par construction de parallélogrammes adéquats.

Nous nous contenterons de ces indications, laissant tomber toutes les démonstrations qui seraient encore nécessaires, et nous passerons aux conclusions.

Après la construction du premier modèle, nous nous demandions s'il pouvait exister des énoncés obtenus par transcription de la colonne euclidienne dans la

colonne hyperbolique qui ne seraient pas des conséquences de la base axiomatique modifiée. L'édification axiomatique autonome eût alors été incomplète. Par la construction du second modèle, la situation se retourne de bout en bout. Mais la jonction des deux modèles tranche définitivement la question dans le sens d'une complète équivalence des deux colonnes ou des deux édifications axiomatiques. L'équivalence est double : Elle concerne tout aussi bien la complétude que la non-contradiction. À toute contradiction qu'on pourrait relever dans l'une des deux géométries devrait correspondre une contradiction qui apparaîtrait dans l'autre. À toute lacune de l'une devrait correspondre une lacune de l'autre.

En fait, les deux géométries ne sont que deux façons de présenter, deux manières d'« habiller » un même ensemble de relations valables dans l'horizon axiomatique.

D. Expérimentation dans l'horizon axiomatique

152. LE CHOIX DES AXIOMES. Le mot « axiome » a très sensiblement changé de signification depuis le moment où la méthode axiomatique s'introduisait comme le moyen même d'une meilleure spécification des trois aspects de la géométrie. Tout au long du chapitre III et tant que dura l'axiomatisation de la géométrie élémentaire, l'unique fonction de l'axiome resta de formuler de façon particulièrement claire un certain nombre de jugements dont l'intuition garantissait le sens et la justesse.

Tout spécialement au cours de ce chapitre V, le rôle individuel de l'axiome s'est considérablement effacé; la garantie de l'évidence ne lui est plus individuellement indispensable pourvu qu'il s'intègre dans une base axiomatique qui rende, dans son ensemble, les services qu'on en attend. Mais la dégradation des significations primitives va encore beaucoup plus loin : le rôle de la base axiomatique dans son ensemble a également varié. Ce que nous en attendons maintenant n'est plus exactement ce que nous en attendions, lors de notre première axiomatisation. Nous sommes prêts à lui conserver le nom de base axiomatique, pourvu qu'elle puisse servir de fondement à une activité déductive normale, et d'autant plus que le résultat de cette activité comporte une certaine analogie avec la géométrie élémentaire classique. En un mot, nous avons pris la liberté d'user de tout le vocabulaire axiomatique avec une certaine indépendance, et de modifier, d'élargir, de libérer en conséquence toutes les significations correspondantes.

Dans le choix des axiomes, nous sommes maintenant capables d'une initiative qui ne s'arrête pas à la recherche d'« équivalences axiomatiques ». Nous sommes entrés en discussion avec notre information préalable, avec notre préformation.

Est-il possible d'*intégrer cette nouvelle situation dans la perspective générale de l'axiomatisation schématisante, elle-même moyen d'une connaissance ouverte ?*

L'une de nos notions fondamentales, celle d'horizon de réalité, se présente presque d'elle-même pour être mise à l'épreuve.

L'horizon axiomatique est, en effet, un horizon de réalité dont les éléments ont les caractères d'existence et d'autonomie indispensables pour qu'on puisse les envisager comme des « choses » déterminées. Certes, ces « choses » ne nous sont pas données comme des réalités dernières, mais cela ne peut et ne doit pas nous arrêter. Les « choses » les plus concrètes de notre horizon naturel ne nous sont pas données non plus comme des réalités dernières, et cela ne nous empêche pas d'avoir une prise active sur elles. L'idée de l'horizon de réalité a précisément pour fonction de recueillir et de maintenir les « caractères de réalité » sans lesquels il n'y aurait pas de sens à parler d'une réalité indépendante de nous-mêmes, mais en ne fermant pas prématurément une connaissance que la pratique exige ouverte.

L'idée d'expérimentation peut être liée d'abord à celle d'un monde extérieur et d'une réalité que nous y rencontrerions « telle qu'elle s'y trouve ». Cette idée est, en quelque sorte, interceptée par la notion d'horizon naturel de réalité. Elle s'étend sans obstacle à tout horizon de réalité. En parlant de la constitution des schémas, nous avons insisté sur l'idée d'une technique qui pourrait s'y exercer. Nous aurions pu tout aussi bien parler d'une expérimentation dans un schéma. De façon tout analogue, toute la technique de l'essai peut prendre tel ou tel horizon de réalité pour champ d'action; en fait, elle n'a jamais fait autre chose. Rien ne nous empêche de chercher à en faire autant dans l'horizon axiomatique.

Tout ce que nous avons dit concernant la liberté (que nous avons acquise) de retoucher tel ou tel axiome, de rajuster telle ou telle base axiomatique, peut se résumer en ces mots : Nous avons trouvé le moyen d'expérimenter avec les « réalités schématiques » de l'horizon axiomatique. Il suffit presque de l'avoir dit pour ne plus s'étonner de l'aisance avec laquelle nous manions et remanions les matériaux axiomatiques.

153. L'EXPÉRIMENTATION DANS LE SCHÉMA. Nous en avons déjà fait la remarque : le premier pas vers la conquête de la liberté de l'essai peut être aperçu dans la démonstration par *l'absurde*. On y demande d'imaginer quelque chose de faux, de l'introduire dans un horizon de connaissance éprouvé, de l'incorporer dans la dialectique déductive valable dans cet horizon dans l'espoir de le mettre en échec. Si la démonstration ne devait être qu'un enchaînement de vérités, la démonstration indirecte n'existerait pas. Mais elle existe, avec l'importance toute spéciale que lui confère la faculté de penser le faux.

De là à essayer des propositions en désaccord avec l'intuition; à essayer, en

concurrence les uns avec les autres, des axiomes incompatibles entre eux, il n'y a qu'un pas. On l'a franchi sans même y prendre garde. L'étonnant n'est donc pas qu'on l'ait fait, c'est qu'en le faisant, on ait trouvé une voie ouverte, qu'on ne se soit pas heurté à des contradictions barrant tous les chemins à l'exception d'un seul, celui que désigne l'intuition.

Nous avons souvent employé le terme d'expérience géométrique pour caractériser le contenu de ce chapitre V. Ce n'était pas seulement une comparaison plus ou moins juste : le mot « expérience » doit être pris avec son sens le plus strict, il faut simplement ajouter que le lieu de l'expérience n'est pas l'horizon géométrique ordinaire où les contraintes de l'évidence s'opposeraient à la liberté d'essai que l'expérience exige. C'est l'horizon axiomatique, l'horizon dans lequel l'axiomatisation schématisante a réalisé des notions dépouillées de leur contenu primitif d'intuition, les libérant ainsi pour une expérimentation capable de tourner l'intuition et — selon l'expression déjà employée — de la prendre à revers.

On voit avec quelle singulière facilité l'idée d'horizon de réalité, spécialement sous la forme de l'horizon axiomatique, vient maintenant assumer un rôle explicatif et simplificateur. La situation pouvait paraître confuse, au moment où, ayant constaté que le développement de la géométrie finit par mettre l'intuition en cause, nous nous demandions jusqu'à quel point l'évidence peut être reniée et dans quelle mesure elle doit être conservée. L'idée de l'horizon schématisant et de l'expérimentation dans le schéma éclaire, d'un coup, toute la situation :

La question de légitimité tout d'abord : la légitimité d'une édification non euclidienne se fonde sur l'autonomie d'existence de l'horizon axiomatique (« existence » étant pris au sens « ouvert ») et sur la liberté réelle que nous avons d'y faire des essais répétés et prolongés.

La question d'efficacité, ensuite : le succès de l'entreprise s'explique par le fait que, libres d'essayer selon les seules nécessités de l'horizon axiomatique, nous n'expérimentons cependant pas au hasard.

Nous restons libres aussi de tenir compte de toutes les suggestions venues du modèle de toute géométrie, de la géométrie élémentaire.

La question de priorité, enfin : la géométrie euclidienne est intimement liée à notre vision naturelle et inaliénable de l'espace qui tient à notre organisation biologique. Une vision non euclidienne pourrait-elle la relever dans ce rôle ? C'est une question sur laquelle nous reviendrons.

154. OUVERTURE DE L'IDÉE DE GÉOMÉTRIE. Examinons enfin les répercussions de notre expérience sur l'idée de géométrie elle-même. L'axiomatisation s'était tout d'abord présentée comme un moyen de conférer son statut définitif à l'aspect théorique de la géométrie. L'élimination des autres aspects, en particulier de l'information intuitive devait, si l'on en croyait certaines doctrines sur les rapports du rationnel

à l'intuitif et à l'expérimental, conduire à la forme parfaitement épurée de la géométrie rationnelle. Dès le début, nous avons d'ailleurs pris position contre cette *doctrine préalable*, non par simple préférence (où en aurions-nous pris le droit ?) mais pour nous mettre au bénéfice d'une doctrine préalable qui puisse s'accorder avec l'expérience.

Qu'une remarque méthodologique nous soit ici permise, avant de poursuivre : Est-il juste, est-il de bonne méthode, de se mettre préalablement au bénéfice d'une expérience qui ne prendra place que plus tard dans l'exposé des faits ? Dans la méthodologie de la connaissance ouverte, rappelons-le, on renonce à la fiction d'un fondement posé une fois pour toutes. On y revendique, au contraire, la liberté de tenir compte de l'expérience jusque dans les fondements. Cette liberté trouve précisément son expression dans l'idée d'une doctrine préalable idoine. Comment pourrait-on juger de l'idonéité d'une position de départ, si l'on n'avait pas refait tout le chemin qui va de la doctrine préalable jusqu'à la confrontation de ses conséquences avec les faits venus au jour dans l'expérience ? Et, l'ayant fait, à quoi servirait-il de feindre de ne pas l'avoir fait ? sinon à suggérer une idée tout à fait fausse de la nécessité inconditionnelle d'un point de départ dont la justesse s'imposerait d'elle-même. Quant à nous, nous avons à la fois le droit et le devoir d'examiner si l'expérience géométrique qui vient d'être refaite avec tout le soin nécessaire ébranle ou confirme notre doctrine préalable : elle la confirme. Cette confirmation rejaillit d'ailleurs sur la méthodologie de la connaissance ouverte dont font partie aussi bien l'idée de la doctrine préalable que notre doctrine préalable particulière concernant la géométrie.

Nous disions tout à l'heure que l'espoir de voir *la* géométrie rationnelle définitivement et univoquement constituée au sortir de l'épuration axiomatique ne se réalise pas. Sans doute, le passage de l'horizon naturel à l'horizon axiomatique nous fait franchir une étape vers une plus grande autonomie de l'aspect théorique, mais ce progrès doit être payé de conséquences qu'il eût été difficile de prévoir. Nous ne parlons pas, ici, du fait que l'épuration n'a pas atteint son terme, et que l'intuitif et l'expérimental continuent à jouer leur rôle actif, quoique réduit. C'est sur le versant théorique que le fait le plus saillant se présente : ce n'est pas une géométrie (*la* géométrie !) qui sort théoriquement affermie de l'épreuve axiomatique, ce sont *des* géométries. L'unicité de la vision géométrique ne nous est pas rendue intacte. En un mot, l'idée de géométrie s'est ouverte. Si univoque et parfaitement achevée en elle-même qu'elle ait pu nous paraître au début, elle ne vient pas moins se dédoubler : l'idée que nous avions primitivement de la géométrie rationnelle a donné naissance à deux « réalisations » concurrentes et logiquement inconciliables. Résultat vraiment remarquable : une expérimentation d'un genre inédit, l'expérimentation dans le schéma axiomatique, fait sauter la forme traditionnelle de l'idée de géométrie et rend à l'imagination mathématique la liberté de s'en emparer pour la modeler à nouveau.

Gardons-nous cependant d'étendre avec précipitation la portée de ce résultat. Ne mettons pas en doute que l'ouverture de l'idée de géométrie soit bien « l'événement sensationnel » que tout tendait à préparer, mais ne perdons pas de vue que, pour l'instant, l'aspect théorique est seul à être irrémédiablement touché.

C'est sur le plan théorique que l'idée de géométrie s'est ouverte. L'événement restera-t-il localisé, ou nous faudra-t-il aussi réviser l'idée de la géométrie intégrale, réalisée par la synthèse dialectique des trois aspects ? L'ouverture de l'aspect théorique nécessitera-t-elle une nouvelle synthèse dialectique, sous une nouvelle idée dominante ? C'est là une question à laquelle nous ne sommes pas encore préparés à répondre. Mais il est clair que c'est là la question centrale dont l'examen s'imposera tôt ou tard. Quelques éléments d'information nous manquent encore, qui devront nous être fournis par la comparaison des variantes théoriques entre elles. Dès que nous en disposerons, nous reviendrons au problème crucial de la synthèse des trois aspects.

Il nous reste cependant encore une remarque à faire à cet endroit.

L'ouverture de l'idée de géométrie ne consiste pas seulement en ceci, qu'une variante hyperbolique est venue prendre place à côté de l'original euclidien. L'expérimentation dans le schéma n'est pas terminée, elle n'a fait que commencer. La variante hyperbolique n'est qu'un premier résultat qui ouvre la voie à d'autres essais, à d'autres réussites. Sur le plan théorique, l'idée de géométrie est maintenant capable de se réaliser sous mille formes, dont certaines (les géométries non archimédiennes par exemple) s'éloignent très fortement de la forme euclidienne originelle.

Il ne peut être question pour nous de nous engager dans l'examen de toutes ces possibilités théoriques : nous y perdrions la trace de notre problème qui est et doit rester de citer l'expérience géométrique en témoignage dans le choix d'une théorie idoine de la connaissance scientifique. Mais l'ouverture de l'idée de géométrie (même restreinte au plan théorique) est un fait trop important pour que nous puissions renoncer à examiner encore une autre variante, dans laquelle l'expérimentation sur le schéma engendre des modifications encore plus profondes que dans la variante hyperbolique. Un autre modèle, le modèle de KLEIN, nous en donnera l'occasion.

CHAPITRE VI

LE PROBLÈME DE L'ESPACE

A. Les modèles de Cayley-Klein

155. INTRODUCTION. Nous avons conduit notre expérience géométrique jusqu'à l'ouverture de l'idée de géométrie — jusqu'au point où nous avons vu « l'expérience axiomatique » engendrer comme une floraison de géométries non euclidienne, non archimédienne, etc. Notre but est de la poursuivre jusqu'à l'ouverture de l'idée d'espace.

Pour édifier une géométrie, il ne suffit pas d'assembler des axiomes au hasard et d'apporter sans discernement des modifications plus ou moins profondes à une base axiomatique déjà éprouvée. En général, la contradiction vient bientôt arrêter la déduction qui prétend se fonder sur une base axiomatique choisie arbitrairement. Certains jeux échappent cependant à la contradiction, les conséquences pouvant, semble-t-il, être tirées indéfiniment, sans qu'aucune incompatibilité se manifeste. Certains de ces jeux sont équivalents entre eux : ils conduisent à la même géométrie. D'autres ne le sont pas : ils mènent à des variantes différentes de l'édifice déductif qui doit continuer à s'appeler *une géométrie*.

Par ailleurs, si l'on ne se place pas strictement dans l'horizon axiomatique, l'édification de ces variantes n'épuise pas tout le jeu des réalisations possibles. Se superposant à toute construction axiomatique, la multiplicité des modèles dans lesquels celle-ci peut être enrobée, présente toute une gamme de réalisations, chacune de celles-ci prenant son caractère propre dans le jeu des éléments qu'on géométrise, en leur appliquant un vocabulaire et une syntaxe imitée du vocabulaire et de la syntaxe de la géométrie élémentaire.

Nous l'avons déjà dit, nous avons l'intention, dans ce chapitre VI, de poursuivre notre étude jusqu'à l'ouverture de l'idée d'espace dont l'ouverture de l'idée de géométrie n'est qu'une phase préliminaire. Dans ce but, il nous faudra cependant revenir en arrière pour élargir notre champ d'expérience en y incorporant la *variante elliptique* de la géométrie plane.

Nous serons conduits à cette variante par un procédé tout à fait analogue à celui qui nous a mené à la variante hyperbolique. Nous avons découvert cette dernière dans la géométrie euclidienne des cercles. Nous découvrirons la variante elliptique dans la géométrie de la gerbe dans un espace euclidien. De ce fait

même, la gerbe en sera donc un modèle.

Repris analytiquement, ce modèle introduira les modèles de CAYLEY-KLEIN, à partir desquels notre réflexion reprendra son cours.

I. *LA GERBE, MODÈLE D'UNE GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE*

Dans l'espace à trois dimensions, une gerbe est formée de toutes les droites à tous les plans qui passent par un même point haut, le sommet de la gerbe.

Pour en faire le modèle d'une géométrie elliptique, nous allons superposer aux dénominations ordinaires de la géométrie euclidienne de nouvelles dénominations choisies de façon à évoquer et à suggérer, par le choix de la traduction, les relations géométriques nouvelles que nous avons en vue. En un mot, nous allons reprendre ici la méthode qui nous a servi à établir le modèle de POINCARÉ de la géométrie hyperbolique. Voici notre nouveau Dictionnaire.

Les éléments-*e* (c'est-à-dire les éléments à l'aide desquels sera formée la géométrie elliptique) seront cette fois dans la colonne de gauche, les éléments euclidiens auxquels ils correspondront se trouvant dans la colonne de droite.

a) Les éléments

Nous appellerons plan elliptique ou plan-*e* l'ensemble des droites et des plans de la gerbe,

un point-*e*	*correspondant à*	une droite,
et une droite-*e*	*à*	un plan de la gerbe.

156. L'INCIDENCE. La relation d'incidence entre points-*e* et droites-*e* est simplement fournie par la relation d'incidence entre droites et plans de la gerbe. En d'autres termes, on dira

qu'un point-*e est sur* une droite-*e* (ou que cette droite-*e* passe par ce point-*e*).	La droite correspondante de la gerbe est dans le plan correspondant (si le plan passe par la droite).

Il est alors clair que les points et les droites du plan-*e* elliptique (les points-*e* et les droites-*e* du plan-*e*) satisfont aux axiomes I_1-I_4 énoncés au chapitre III.

L'énoncé I_1 par exemple :

I_1. Par deux points-*e* il passe au moins une droite-*e*	*équivaut simplement à*	Par deux droites de la gerbe, il passe au moins un plan de la gerbe.

L'énoncé de droite est certainement juste dans la géométrie de la gerbe.

Les propriétés d'incidence du plan-*e* ne sont cependant pas totalement les mêmes que celles du plan euclidien ou du plan hyperbolique. Il peut arriver, dans l'un ou l'autre de ces deux cas, que deux droites n'aient aucun point en commun.

Cette éventualité est exclue dans la géométrie du plan-*e*. Il faut, au contraire, y poser comme juste l'énoncé suivant :

I_5. Deux droites-*e* ont toujours deux points-*e* en commun,	*puisque*	Deux plans de la gerbe ont toujours une droite de la gerbe en commun.

Ainsi, presque dès le début, la construction de notre nouveau modèle nous écarte de la géométrie euclidienne.

b) L'ordre

Les propriétés d'ordre, aussi bien sur une droite-*e* que dans le plan-*e* vont immédiatement souligner la « non-euclidicité » de la géométrie elliptique.

157. L'ORDRE SUR LES DROITES-*e*. Envisageons tout d'abord une droite-*e*. Cherchons à y définir une relation qui soit autant que possible l'analogue de ce qu'est l'ordre linéaire pour une droite euclidienne ou pour une droite hyperbolique.

Selon les conventions déjà faites, une droite-*e* correspond à un plan δ^* de la gerbe, et les points-*e* de cette droite-*e* aux droites de δ^* passant par le sommet O* de la gerbe. Ces dernières droites forment un *faisceau* plan. Comment sont-elles ordonnées ?

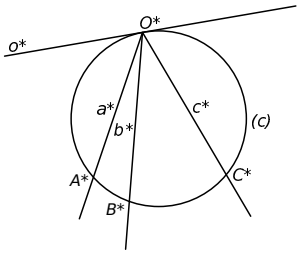


FIG. 134

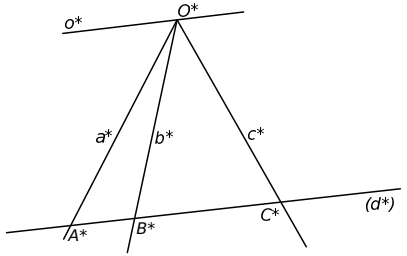


FIG. 135

Pour s'en rendre compte, il suffit de tracer, dans le plan δ^* de ce faisceau, un cercle C passant par le sommet O* de la gerbe. Chaque droite du faisceau coupe C en un point, le point O* lui-même pouvant être pris pour point d'intersection de cercle C avec sa tangente en O* (fig. 134).

On « recueille » ainsi les points-*e* sur le cercle C. Il est maintenant bien visible que si l'on veut ordonner les points-*e* à partir des propriétés d'ordre existant dans la gerbe, il faut leur conférer un ordre circulaire.

On peut aussi couper le faisceau de centre O* par une droite *d** du plan δ* de ce faisceau. Toute droite du faisceau coupe *d** en un point excepté la parallèle *o** en O* à *d** (fig. 135).

Que signifie, pour la droite-*e* dont nous parlons, le fait de laisser (dans le modèle) la droite *o** de côté ? C'est naturellement supprimer le point-*e* correspondant à *o**, c'est *ouvrir* la droite-*e* en ce point. Sur la droite-*e* ainsi ouverte, l'ordre des points-*e* qu'elle contient est maintenant un ordre linéaire.

Nous n'insisterons pas sur les énoncés qu'il nous faudrait écrire dans la colonne de gauche (et sur les énoncés correspondants de la colonne de droite, énoncés valables dans la géométrie euclidienne de la gerbe) pour constituer une axiomatique de l'ordre elliptique sur une droite-*e*. L'ordre circulaire a d'ailleurs été axiomatisé au chapitre III, où nous avions déjà fait observer qu'un ordre circulaire ouvert en un point est identifiable à un ordre linéaire.

Le problème de la désignation et de l'orientation d'un segment-*e* est le même que celui de la désignation et de l'orientation d'un angle en géométrie élémentaire.

158. L'ORDRE DANS LE PLAN-*e*. Voyons maintenant comment se présente l'ordre dans le plan-*e* — toujours à partir de la géométrie de la gerbe. Tentons tout d'abord de procéder comme ci-dessus. Menons une sphère par le sommet de la gerbe. Toute droite de la gerbe coupe-t-elle cette sphère en un point déterminé ? Certes, mais il y a cependant une circonstance qui met en question la valeur du procédé. C'est que toutes les droites touchant la sphère en O* ont ce seul et même point comme point d'intersection avec la sphère.

L'ordre des points sur la sphère ne nous livre donc une bonne représentation de l'ordre des droites de la gerbe que si l'on supprime le point O* de la sphère et, en même temps, tout le faisceau des tangentes en ce point.

Mais, selon nos conventions, un faisceau de droites d'un plan de la gerbe équivaut à une droite-*e*. Supprimer une droite-*e* du plan-*e*, c'est « ouvrir » ce plan-*e* suivant cette droite-*e*.

On est ainsi conduit au résultat suivant :

Le plan-*e* ouvert suivant une de ses droites-*e* a les mêmes propriétés d'ordre qu'une sphère ouverte en un point.

Reprenons aussi le second procédé de tout à l'heure.

Coupons la gerbe par un plan π*. À chaque droite telle que *a** correspond un point *a′* de π*. L'ensemble des droites de la gerbe va-t-il se trouver représenté par l'ensemble des points de π* ? Il y a naturellement ici aussi des

exceptions : le faisceau des parallèles à π* n'a pas de points d'intersection avec ce plan (fig. 136).

Le plan euclidien π* ouvert ne fournit ainsi qu'une représentation incomplète du plan elliptique. Il y manque (cette fois aussi) une droite-*e* entière.

Le plan π* peut être complété (comme on le fait en géométrie projective) par ses points à l'infini. Chacun de ceux-ci peut être envisagé comme le point à l'infini de l'une des parallèles à π* par O*. Ce plan ainsi complété est ce qu'on appelle le plan projectif.

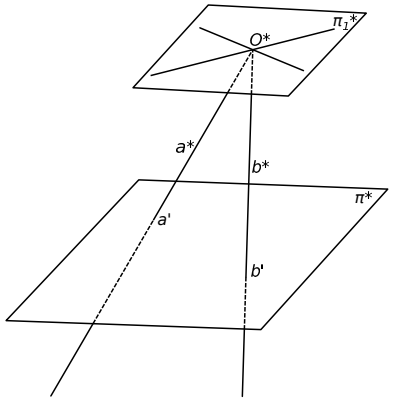


FIG. 136

En un mot :

Les droites de la gerbe ont entre elles les mêmes relations d'ordre que les points du plan projectif.

En d'autres termes :

Pour ce qui concerne les relations d'ordre (et d'incidence), le plan projectif est un modèle de la géométrie elliptique au même titre que la gerbe dont nous avons choisi de nous servir. Les points « à l'infini » du plan projectif forment une droite, avons-nous dit. Il faut bien remarquer que ce n'est pas une droite au sens de la géométrie élémentaire : les points à l'infini y sont ordonnés circulairement, comme sur une droite-*e*. C'est d'ailleurs le cas aussi pour toute autre droite du plan projectif, droite qu'on obtient en fermant une droite euclidienne par son point à l'infini.

On revient au plan de la géométrie élémentaire en ouvrant le plan projectif le long de sa droite à l'infini (par exemple).

Si notre plan était d'inscrire dans la colonne de gauche un groupe d'axiomes caractérisant l'ordre elliptique (en même temps que nous inscririons à droite les énoncés valables dans la géométrie de la gerbe), il nous suffirait donc d'y énumérer les axiomes du plan projectif.

L'édification axiomatique du plan projectif n'a pas été faite au cours des chapitres précédents. L'occasion ne s'en est pas présentée.

Pour les buts de notre étude, il ne servirait plus à grand-chose d'y revenir ici. Cette édification peut être d'ores et déjà regardée comme classique.

(Disons un mot encore, non plus du plan, mais de l'*espace* projectif. On l'obtient, à partir de l'espace euclidien, en complétant (en fermant) celui-ci par les points à l'infini de toutes ses droites : ces points à l'infini forment eux-mêmes un plan projectif.)

Cette définition du plan à l'infini et la façon dont nous constituons la gerbe

en modèle d'une géométrie plane elliptique montrent bien que la constitution de ce modèle et la géométrisation du plan à l'infini sont deux aspects d'une même entreprise.

En un mot :

En « coupant » la gerbe par le plan à l'infini on fait tout naturellement de celui-ci un modèle de la géométrie elliptique plane.

Les propriétés d'ordre du plan-*e* devront donc être celles du plan projectif.

Nous avons déjà vu par quel caractère fondamental l'ordre des points-*e* sur une droite-*e* diffère de l'ordre des points sur une droite euclidienne ou hyperbolique : le premier est un ordre circulaire fermé, le second un ordre linéaire ouvert. Les différences, quant à l'ordre plan, ne vont-elles pas s'accuser encore davantage ?

159. ORIENTATION DANS LES PLANS EUCLIDIEN ET HYPERBOLIQUE. En géométrie hyperbolique aussi bien qu'en géométrie euclidienne, les deux premiers groupes d'axiomes (les axiomes d'incidence et d'ordre) permettent finalement d'introduire un même *sens de circulation* autour de tous les points du plan, ou d'*orienter* tous les triangles dans un seul et même sens.

Si, par exemple, le plan euclidien ou le plan hyperbolique sont partagés en domaines contigus (fig. 137), il est possible d'orienter ceux-ci dans le même sens et sans exception à partir de l'un quelconque d'entre eux. Il suffit d'appliquer de proche en proche la règle suivante :

Tout segment de droite ou de ligne pris sur la frontière commune de deux domaines contigus doit être parcouru dans un sens sur la frontière de l'un et dans l'autre sens sur la frontière de l'autre.

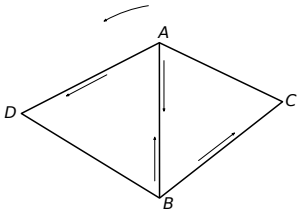


FIG. 137

Ainsi, par exemple, le segment AB de la figure 4 est orienté de A vers B en tant que côté du triangle orienté ABC et de B vers A en tant que côté du triangle orienté ADB.

Cette propriété se résume d'un mot, en disant que le plan euclidien et le plan hyperbolique sont *orientables*. En est-il de même du plan-*e* ? Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Revenons tout d'abord sur ce qu'il faut entendre par « triangle du plan-*e* » ou « triangle-*e* ».

Soient donc *a*, *b*, *c* trois points-*e* que nous nous proposons de prendre comme

160. LES TRIANGLES-*e*, L'ORIENTATION DANS LE PLAN-*e*. sommets d'un triangle-*e*. Leurs correspondantes, dans le modèle de la gerbe, sont trois droites, *a**, *b**, *c**, que (pour simplifier) nous supposerons orthogonales deux à deux (fig. 138).

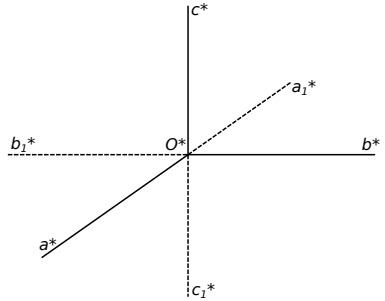


FIG. 138 Trièdre I ($o^*;a^*,b^*,c^*$) opposé au trièdre II ($o^*;a_1^*,b_1^*,c_1^*$).

Il est maintenant tout naturel de définir un triangle-*e* par un trièdre de la gerbe — les sommets du triangle-*e* correspondant aux arêtes du trièdre, les côtés du triangle correspondant aux faces du trièdre. (Le trièdre de la gerbe comprend deux trièdres ordinaires, opposés par le sommet).

Or, une chose est claire : c'est qu'avec les trois arêtes *a**, *b**, *c** on peut former quatre trièdres, les quatre paires d'octants en lesquels les trois « axes » *a**, *b**, *c** et les plans qui les joignent deux à deux divisent l'espace autour du sommet de la gerbe.

Dans le plan-*e*, il existe quatre triangles-*e* ayant les mêmes sommets *a*, *b*, *c* (fig. 139-140).

La figure de ce groupe de quatre triangles dans un plan muni de ses points à l'infini peut se présenter sous des formes euclidiennes assez diverses (chacune de ces figures réalisant également un modèle de triangle-*e* considéré).

Si, par exemple, on coupe la gerbe par un plan qui rencontre les droites *a**, *b**, *c** en a', b', c', c'est la figure 141 qu'on obtient.

Le triangle I y apparaît comme un triangle élémentaire. Du point de vue euclidien, chacun des triangles II, III et IV se compose de deux parties séparées; du point de vue projectif, ces deux parties se rejoignent et

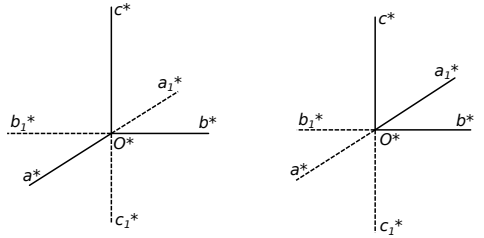


FIG. 139-1 Triangle I formé des deux trièdres ($o^*;a^*,b^*,c^*$) et ($o^*;a_1^*,b_1^*,c_1^*$).
FIG. 139-2 Triangle II formé des deux trièdres ($o^*;b^*,a_1^*,c^*$) et ($o^*;b_1^*,a^*,c_1^*$).

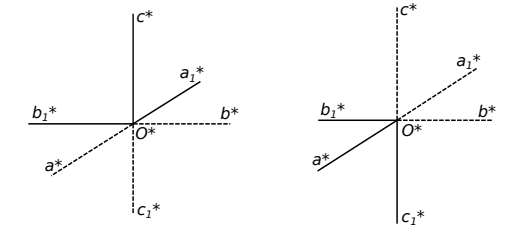


FIG. 140-1 Triangle III formé des deux trièdres ($o^*;a_1^*,c^*,b_1^*$) et ($o^*;a^*,c_1^*,b_1^*$).
FIG. 140-2 Triangle IV formé des deux trièdres ($o^*;b_1^*,a^*,c_1^*$) et ($o^*;b^*,a_1^*,c^*$).

tiennent ensemble sur un même segment de la droite à l'infini.

Si l'on coupe la gerbe par un plan perpendiculaire à la droite c^* (et parallèle aux droites a^* et b^*), c'est au contraire la figure 142 qu'on engendre.

Ces points a' et b' sont à l'infini. Les quatre triangles-*e*, du point de vue euclidien, se trouvent réalisés par les quatre quadrants recouvrant le plan tout autour du point c'. Du point de vue projectif, chacun de ces quadrants est à compléter par un côté situé sur la droite à l'infini, deux quadrants opposés par le sommet étant précisément contigus sur l'un de ces côtés.

L'une et l'autre de ces figures (ce ne sont d'ailleurs par les seules possibles) permettent de se rendre compte que le plan projectif, et donc aussi le plan-*e*, ne sont pas orientables.

Si, dans la figure 141, on commence par orienter le triangle I en en parcourant le bord dans le sens fixé par l'ordre a', b', c', a', les trois autres triangles peuvent être orientés par contiguïté, par la règle dont il vient d'être question. On remarque alors que cette même règle n'est pas satisfaite sur les côtés communs à II et III, III et IV, ou II et IV.

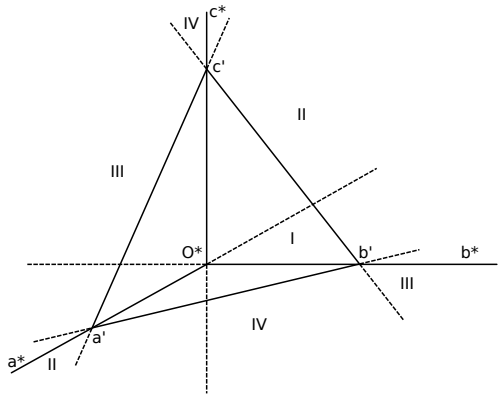


FIG. 141

Un regard jeté sur la figure 142 conduira à la même constatation.

Nous avons mis en évidence une différence très profonde existant entre la géométrie euclidienne d'une part et la géométrie hyperbolique d'autre part : dans toutes les trois, on peut orienter un triangle donné par ses sommets et ses côtés en choisissant un sens de parcours sur son périmètre — mais, tandis que pour les deux premières cette orientation peut être *univoquement transmise* (par contiguïté et de proche en proche) à tout système de triangles recouvrant le plan entier, il n'en est plus de même pour le plan elliptique.

Chose assez curieuse, l'axiome de PASCH reste cependant valable dans le plan-*e*. Il est la simple traduction immédiate d'une propriété dont la justesse pour un trièdre de la gerbe ne fait aucun doute. Mettons les deux énoncés en face l'un de l'autre.

Une droite-e qui coupe l'un des côtés d'un triangle-e (ailleurs qu'en un sommet) en coupe nécessairement encore (au moins) un autre.

Un plan qui coupe une face d'un trièdre (ailleurs qu'en une arête) en coupe nécessairement encore (au moins) une seconde.

L'axiome de PASCH est donc aussi valable en géométrie elliptique, mais il n'y revêt plus la même importance. Il y perd en quelque sorte sa fonction. Combiné avec les axiomes de l'ordre linéaire (et de l'incidence), il permet dans les géométries euclidiennes et hyperboliques de distinguer dans le plan D les deux côtés d'une droite et de démontrer ensuite les propriétés relatives à l'orientation. Or (bien que les axiomes I_1-I_4 restent valables) les propriétés d'incidence ne restent pas complètement les mêmes (du fait de la nouvelle propriété I_5), et surtout les axiomes de l'ordre linéaire font maintenant défaut. Leur concours manque à l'axiome de PASCH, celui-ci ne suffit plus pour établir qu'une droite divise le plan en parties sans point commun. Au contraire, nous avons reconnu qu'un plan elliptique ouvert le long d'une droite-*e* ne se partage pas en deux demi-plans, mais qu'il reste d'un seul tenant, ayant la structure (quant aux propriétés d'ordre) d'un plan euclidien.

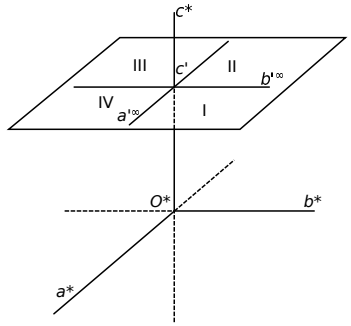


FIG. 142

L'édification (à travers le modèle proposé) d'une géométrie elliptique se fait ainsi dans une analogie beaucoup moins stricte avec la géométrie euclidienne que dans le cas du modèle de POINCARÉ.

Peut-être n'aurait-on pas la hardiesse de vouloir y distinguer encore les traits essentiels d'une géométrie si l'on n'avait pas fait déjà l'expérience de l'ouverture de l'idée de géométrie.

L'intégration à la géométrie elliptique de la congruence et du groupe des déplacements ne nous écartera d'ailleurs pas davantage de la géométrie traditionnelle, elle nous en rapprochera plutôt.

c) La congruence et les déplacements

Dans la géométrie de la gerbe la notion et les relations de congruence sont univoquement déterminées par la géométrie euclidienne de l'espace dont la gerbe fait partie. Il s'agit tout d'abord de la congruence de deux angles plans (les trois *faces* d'un trièdre sont de tels angles plans) et des *angles dièdres* (les angles des faces d'un trièdre sont de tels angles dièdres). Nous ne ferons que

mentionner les angles solides, préférant parler des trièdres qui les déterminent.

La congruence des angles plans et des angles dièdres obéit (pour les seconds comme pour les premiers) aux axiomes de la congruence euclidienne ou hyperbolique des angles (telle qu'elle a été présentée au chapitre III).

La congruence des angles plans et celle des angles dièdres se lient l'une à l'autre dans la congruence des trièdres, les six cas d'égalité des trièdres occupant une position centrale dans la géométrie de la gerbe.

La *mesure* d'un angle plan ou d'un angle dièdre se ramène d'ailleurs à la mesure d'un angle dans la géométrie élémentaire du plan.

161. LES DÉPLACEMENTS, LA QUESTION DU PARALLÉLISME. Les déplacements de la gerbe (ou d'une *figure* de la gerbe) sont toujours (on le sait) réalisées par des rotations autour du sommet O : toute rotation autour d'un point, dans l'espace, est d'ailleurs une rotation autour d'un axe passant par ce point.

Toute rotation autour de l'axe d^* conserve cet axe et le plan δ^* perpendiculaire à d^*.

Une rotation d'angle π conserve (ramène sur elle-même) toute b^* de δ^*; elle porte toute autre droite a^* de la gerbe sur la droite a_1^*, symétrique de a^* par rapport à δ^* aussi bien que par rapport à d^*.

Une rotation d'amplitude 2π laisse tous les éléments de la gerbe en place.

Autour d'un d^* donné, on distingue deux sens de rotation : un déplacement déterminé (de toute la gerbe) peut être réalisé par deux rotations de sens contraires, si l'une est d'amplitude ω, l'autre est d'amplitude $2\pi - \omega$.

Il existe, enfin, deux déplacements amenant une droite a^* de la gerbe et un plan α^* passant par cette droite (a^* et d^* étant d'ailleurs quelconques) sur une droite b^* et un plan β^* par b^* (par ailleurs également quelconques). On passe de l'un à l'autre de ces déplacements par une rotation d'amplitude π laissant en place le plan β^* et toutes ses droites (par O*).

Ce sont les propriétés précédentes qui engendrent les propriétés de congruence et les déplacements du plan-*e*.

À un angle plan, bordé par les droites a^* et b^*, et aux droites x^* qu'il contient, vont donc correspondre un segment-*e* *ab* et les points-*e* qu'il contient.

La mesure-*e* de ce segment est donnée par définition par la mesure euclidienne de l'angle plan correspondant. C'est un nombre compris entre 0 et π, la mesure maximale π étant celle d'un segment occupant toute la droite (partant de *a* et revenant à *a*).

À un dièdre formé par les plans α^* et β^* correspond un angle-*e*, formé par les droites-*e* α et β, les plans ξ^* compris dans le premier engendrant les droites-*e* ξ comprises dans le second. Ce qui vient d'être dit pour la mesure d'un segment-*e* peut être répété pour la mesure d'un angle-*e* : en géométrie elliptique, la mesure d'un segment et la mesure d'un angle sont toutes deux comprises entre 0 et π.

Les six cas d'égalité des trièdres engendrent six cas d'égalité des triangles-*e*.

Nous n'insisterons sur la façon dont les relations de congruence pourraient être axiomatisées, en posant un nombre suffisant d'axiomes concernant la congruence des segments-*e* entre eux, des angles-*e* entre eux, et leur liaison (sur un triangle-*e*).

Nous nous bornerons aussi à énoncer quelques propriétés des déplacements-*e*, sans nous attarder à décrire la façon (d'ailleurs évidente, après tant d'explications et d'exemples) dont on les obtient.

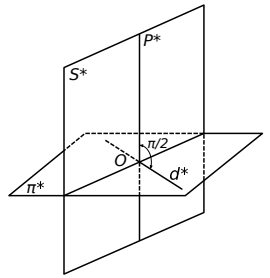


FIG. 143

Une rotation de la gerbe laisse invariants une droite p^* et le plan perpendiculaire π^*. Une rotation du plan-*e* laisse donc invariants un point-*e* *p* et une droite-*e* π, le centre et la centrale de la rotation. On dit aussi que le centre et la centrale sont dans la relation de pôle à polaire l'un par rapport à l'autre.

Toute droite-*e* δ passant par le centre *p* fait avec la centrale π un angle de mesure égale à $\frac{\pi}{2}$.

Tout point *d* de la centrale π est à la distance-*e* $\frac{\pi}{2}$ du centre *p* (fig. 143).

Si une rotation amène une droite X par *p* de la position α à la position β et un point *x* de la centrale π de la position *a* à la position *b*, la mesure de l'angle-*e* décrit par X est égale à la mesure du segment-*e* décrit par *x*.

Une rotation d'amplitude π autour de *p* ramène tout point *a* de la centrale π à sa position initiale. Tout autre point *q* est transformé en un point q_1 symétrique de *q* par rapport à la centrale π. La symétrie par rapport à la centrale π est d'ailleurs aussi une symétrie par rapport au centre *p* (fig. 144). Tout déplacement d'un plan-*e* (ou dans un plan-*e*) peut se réaliser par une rotation.

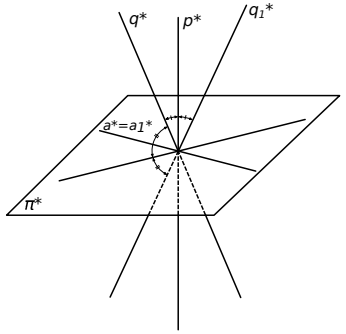


FIG. 144

Il existe exactement quatre déplacements amenant les figures formées par un point-*e* et par une droite-*e* passant par ce point, la figure (A,*a*) sur une autre figure (B,*b*) analogue et d'ailleurs quelconque.

Par les énoncés qui précèdent, nous pensons avoir suffisamment mis en

lumière les analogies et les différences de la congruence en géométrie elliptique et en géométrie euclidienne ou hyperbolique.

Le *parallélisme*. La question du parallélisme est d'ores et déjà tranchée : il n'existe pas de parallèles-*e*, puisque deux droites-*e* ont dans tous les cas un point-*e*, et un seul, en commun.

Nous n'irons pas plus loin dans la constitution de la géométrie elliptique telle que la gerbe la réalise. L'édification de la géométrie elliptique se justifie d'elle-même dans toute étude axiomatique de la géométrie. Ici, elle ne fait qu'introduire la dernière phase de nos conclusions.

II. *LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE LA GERBE, EN TANT QUE MODÈLE DE LA GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE*

Si notre but était simplement d'édifier la géométrie elliptique plane, le modèle que nous venons d'examiner pourrait suffire, il n'y aurait nul besoin de le doubler d'une version analytique.

Jusqu'ici, nous n'avons fait que peu de place à la géométrie analytique. Ce n'est naturellement pas sans raisons que nous avons préféré la méthode déductive, celle de la géométrie élémentaire tout d'abord, pour lui substituer ensuite la rigueur déductive de l'axiomatique.

162. La géométrie analytique remplace la déduction par le calcul.

Elle réalise un modèle sui generis de la géométrie, un modèle fait à l'aide d'éléments et de relations numériques.

L'existence de tels modèles est un fait à ne pas négliger, mais dont la portée n'apparaît pas entièrement dans la perspective que nous traçons ici. C'est plutôt dans une étude sur la « Géométrie et le Problème de la Méthode » qu'elle pourrait développer toutes ses conséquences.

Bien que nous ayons donné nettement la préférence à la voie déductive et à l'axiomatisation schématisante, nous n'avons cependant pas cherché à éviter systématiquement les procédures numériques. L'emploi que nous avons fait du calcul des nombres complexes dans l'édification et la mise en œuvre du modèle de Poincaré n'est guère plus qu'une variante des procédés normaux de la géométrie analytique. Mais le recours aux procédures analytiques n'est intervenu que de façon secondaire, sans jamais prendre la signification d'une démarche inaliénablement liée à notre projet. En fait, et quelle qu'ait été son utilité, nous aurions pu nous en passer.

Pour ce qui va suivre et jusqu'à la démonstration du « Théorème de l'approche », qui représentera le terme de notre « expérimentation géométrique », les modèles numériques de la géométrie vont passer au premier plan. Nous allons donc examiner, sur l'exemple de la géométrie elliptique, comment les opérations numériques parviennent à suppléer l'édification déductive à partir d'une base axiomatique explicitement formulée — sans songer toutefois à épuiser ici le problème de méthode que pose l'arithmétisation de la géométrie.

Pour ce qui concerne *notre* problème, le Problème de l'Espace, la méthode analytique ne changera guère aux conclusions dont nous nous approchons.

163. Quelques propriétés de la procédure analytique.

Soient x, y, z les trois coordonnées cartésiennes d'un point R de l'espace. Ces trois nombres fixent, en même temps que la position du point R, celle de la droite OR. Mais celle-ci serait aussi fixée par les coordonnées x', y', z' de tout autre R′, de ses points. Or les coordonnées de R sont aux coordonnées de R′ dans le même rapport que les distances OR et OR′.

Il en résulte que les rapports que l'on peut former avec les trois coordonnées x, y, z de R sont égaux aux rapports correspondants des trois coordonnées x', y', z' de R′. Ce sont ces rapports qui fixent aussi bien à l'aide des coordonnées de R que de celles de R', la position OR.

Rappelons que des coordonnées dont les rapports (et par les valeurs mêmes) sont à prendre en considération sont dites *homogènes*. Les coordonnées homogènes d'un élément déterminé ne sont elles-mêmes déterminées qu'à un facteur de proportionalité près :

x, y, z et x', y', z', peuvent donc être prises les unes et les autres comme coordonnées homogènes de la droite OR.

On pourrait faire aussi la convention de déterminer par ces mêmes coordonnées le point à l'infini de la droite OR.

Et comme le plan à l'infini est un modèle fidèle du plan elliptique, on peut aussi convenir que les trois nombres x, y, z sont les coordonnées homogènes d'un point d'un plan elliptique.

Le modèle numérique que nous sommes en train de définir est donc, d'emblée, susceptible d'une triple interprétation, en tant que géométrie analytique de la gerbe, géométrie analytique du plan à l'infini et géométrie analytique du plan projectif-elliptique.

L'équation du plan passant par O*, sommet de la gerbe et origine des coordonnées, a la forme

$$ux + vy + wz = 0. \tag{1}$$

Cette équation peut être multipliée par un facteur numérique quelconque, ce qui revient à remplacer les trois coefficients u, v, w par trois coefficients proportionnels u', v', w'. On peut donc prendre ces coefficients comme

coordonnées homogènes du plan. (Ce sont d'ailleurs les composantes d'un vecteur perpendiculaire au plan.)

L'équation (1) représente la condition pour que la droite de coordonnées x, y, z soit contenue dans le plan de coordonnées u, v, w : elle représente la condition d'incidence entre droite et plan (ou faisceau de droite) de la gerbe.

164. L'INCIDENCE ET L'ORDRE. Ces définitions une fois données, comment devrait-on faire pour établir ou constater que les propriétés de l'incidence (dont il a déjà été question) sont bien valables. Pour constater, par exemple,

a) qu'il y a exactement un plan, contenant deux droites données,

et

b) qu'il y a exactement une droite contenue dans deux plans donnés.

Il suffit, dans l'un et l'autre cas, d'une procédure algébrique toute simple. Supposons que les deux droites données a_1^* a_2^*; aient respectivement les coordonnées x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 — il suffit alors de démontrer qu'il n'y a qu'un groupe de coordonnées homogènes u, v, w (c'est-à-dire trois nombres fixés à un facteur de proportionalité près) satisfaisant aux deux équations :

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0 \tag{2}$$

$$ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0. \tag{3}$$

On en tire, par des opérations algébriques élémentaires (toujours à un facteur près),

$$u = y_1z_2 - y_2z_1 \qquad v = z_1x_2 - z_2x_1 \qquad w = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Pour assurer la propriété *b)* u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 étant respectivement les coordonnées des deux plans donnés, il suffit de calculer de façon tout analogue, x, y, et z à partir des deux conditions

$$xu_1 + yv_1 + zw_1 = 0 \tag{4}$$

$$xu_2 + yv_2 + zw_2 = 0. \tag{5}$$

Sur ces deux premiers exemples on voit clairement comment les définitions analytiques ayant été posées, le reste (ce qui, dans une édification axiomatique est soit axiome, soit conséquence) en découle par le simple jeu des opérations algébriques.

Montrons encore comment l'ordre des droites dans un faisceau (et donc aussi des points sur une droite du plan projectif) se traduit arithmétiquement.

Si l'on cherche les droites α^* du faisceau, c'est-à-dire tous les groupes x, y, z qui satisfont, en même temps que x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 (équation (2) et (3))

à la condition

$$ux + vy + wz = 0,$$

on trouve

$$x = \lambda x_1 + \alpha x_2 \qquad y = \lambda y_1 + \alpha y_2 \qquad z = \lambda z_1 + \alpha z_2$$

λ et α étant deux paramètres homogènes, c'est-à-dire deux paramètres dont seul le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ compte — ce dernier rapport pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

On remarquera d'ailleurs que le rapport $-\infty$ peut être réalisé par $\lambda = -1$ et $\mu = 0$, et correspond à la droite de coordonnées x_1, y_1, z_1, et que le rapport $+\infty$ peut être réalisé par $\lambda = +1$ et $\mu = 0$, ce qui nous ramène aux coordonnées homogènes $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$ qui sont proportionnelles aux précédentes et leur sont par conséquent équivalentes.

On voit ainsi que si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la droite correspondante part de la position a_1^* (pour $\frac{\lambda}{\mu} = -\infty$), passe par la position a_2^* ($\frac{\lambda}{\mu} = 0$) et revient à la position a_1^* (pour $\frac{\lambda}{\mu} = +\infty$). Le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ fixant la position d'une droite dans un faisceau donné par deux droites a_1^*, a_2^* est par conséquent une variable dont les valeurs sont ordonnées circulairement.

Nous retrouvons ainsi, par la voie analytique, l'ordre circulaire des droites d'un faisceau, des points sur une droite à l'infini ou sur une droite du plan elliptique.

165. REMARQUES COMPLÉMENTAIRES. Nous renoncerons à montrer ici comment les propriétés d'ordre dans la gerbe, dans le plan à l'infini ou dans un plan projectif se traduisent par le juste emploi des données homogènes. Ajoutons cependant que l'ordre continu s'introduit du simple fait que les coordonnées x, y, z sont considérées comme des variables continues, au sens du calcul infinitésimal.

Rappelons enfin les formules fondamentales donnant les angles entre deux droites, entre deux plans, entre une droite et un plan.

Voici tout d'abord la formule pour le cosinus de l'angle φ de deux droites de coordonnées homogènes x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2.

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

la formule pour le cosinus de l'angle ψ de deux plans de coordonnées homogènes u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 est tout à fait analogue.

$$\cos\psi = \frac{u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}\ \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}},$$

Voici enfin

$$\cos\theta = \frac{u_1x_1 + v_1x_2 + w_1x_3}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

donnant l'angle θ d'une droite de coordonnées x_1, x_2, x_3 et d'un plan de coordonnées u_1, v_1, w_1.

Ces formules sont établies dans tous les manuels de géométrie analytique de l'espace : il n'y aurait aucun gain à les démontrer ici. Dans une procédure purement analytique, il faudrait d'ailleurs les prendre comme définition des angles φ, ψ et θ.

Nous les retrouverons plus loin, comme cas particulier des formules que nous obtiendrions dans le cadre des modèles de CAYLEY-KLEIN. On s'apercevra à ce moment-là que les formules précédentes contiennent déjà la clef de ces modèles et qu'elles auraient pu leur servir d'exemple préparatoire.

Nous ne voulons pas nous attarder à dresser un nouveau « dictionnaire », assurant la pleine traductibilité du langage géométrique en langage analytique. Notre but n'est ici que d'établir une transition (et un trait d'union) entre la méthode déductive dont nous nous sommes surtout servis jusqu'ici et la méthode analytique à laquelle nous allons avoir recours. C'est de caractériser la méthode analytique que nous sommes soucieux, en cet instant. — C'est à quoi doit servir un dernier exemple. Démontrons *analytiquement* la propriété suivante de la gerbe (propriété tout à fait élémentaire d'ailleurs, et dont la traduction elliptique ne fait aucune difficulté).

Dans la gerbe, tous les plans perpendiculaires à un même plan passent par une même droite.

La condition de perpendicularité de deux plans, u, v, w et u_1, v_1, w_1 s'écrit :

$$u_1u + v_1v + w_1w = 0.$$

Supposons le plan u_1, v_1, w_1 fixé, le plan u, v, w variable dans toute la mesure que permet la condition précédente. Pour tous les plans ainsi désignés, la condition précédente est aussi une condition d'incidence — la condition d'incidence avec la droite de coordonnées u_1, v_1, w_1.

On voit ainsi qu'un plan et une droite perpendiculaires entre eux peuvent être désignés par les mêmes coordonnées.

Une dernière remarque avant de passer aux modèles de CAYLEY-KLEIN : la méthode analytique dépouille aussi les êtres géométriques de leur contenu intuitif. Pour retrouver la géométrie dans l'intégrité de sa signification à partir de son aspect analytique, il faut naturellement avoir recours à une synthèse dialectique sur laquelle nous aurons à revenir.

III. *LES MODÈLES DE CAYLEY-KLEIN*

166. LE PLAN PROJECTIF ET LES TRANSFORMATIONS PROJECTIVES.

Notre idée directrice est toujours restée la même : procéder aussi activement que possible à la spécification des aspects sous lesquels la géométrie élémentaire se présente, pousser tout spécialement l'autonomie de l'aspect théorique aussi loin que possible. À la fin du chapitre V, les conséquences de cet effort soutenu se sont enfin précisées : l'intention de serrer de plus en plus près l'idée de géométrie sous sa forme théorique mène à l'ouverture de cette idée et non à sa fermeture rationnelle. La rigueur axiomatique a pour effet (ce qui peut surprendre) d'ouvrir le champ au foisonnement des systèmes axiomatiques et des modèles. L'ouverture de l'idée de géométrie est la conséquence directe du fait que tous ces systèmes et tous ces modèles ne sont pas entièrement réductibles les uns aux autres. Notre méthode l'a mis clairement en lumière puisqu'elle a insisté à souligner pour les trois cas fondamentaux de la géométrie euclidienne, de la géométrie hyperbolique et de la géométrie elliptique, les concordances et les différences caractéristiques qui permettent de les envisager comme trois variantes de l'idée de géométrie.

Nous allons montrer maintenant que les moyens dont nous nous sommes ainsi servis peuvent être repris dans une étude d'ensemble. La méthode qui comporte une certaine classification des formes quadratiques homogènes est due à KLEIN (qui disposait lui-même de certains résultats de CAYLEY et de LAGUERRE).

Cette méthode a l'avantage (pour les buts que nous poursuivons) de ne plus donner aucune préférence à la géométrie euclidienne. Elle traite les différentes géométries d'un point de vue unitaire, qui suggère très naturellement toute une hiérarchie de spécialisations et de généralisations utiles.

Le modèle de CAYLEY-KLEIN va être établi par le moyen de la géométrie analytique d'un plan projectif, dont il vient d'être question comme de l'une de trois interprétations possibles de la géométrie de la gerbe.

Un point X du plan projectif est fixé, rappelons-le par trois coordonnées homogènes, que nous nommerons x_1, x_2 et x_3, c'est-à-dire par les rapports de ces trois nombres.

Une droite d de ce plan est également fixée par trois coordonnées homogènes, que nous nommerons u_1, u_2, u_3.

La condition d'incidence du point P et de la droite g s'exprime par l'équation

(1) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Si l'on suppose la droite d fixe et le point P variable, la condition (1) est l'équation de la droite de d; de façon en quelque sorte symétrique, on suppose que le point P est fixe et la droite d variable, la même condition (1) est l'équation du point P.

Une transformation de la forme

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \qquad \text{(pour } i = 1, 2, 3)$$

que nous écrivons aussi

$$x_i' = \Sigma\, a_{ik}x_k$$

est dite linéaire ou projective. Elle transforme tout point P de coordonnées x_1, x_2, x_3 du plan projectif en point P′, de coordonnées x_1', x_2', x_3' de ce même plan.

Il est facile de vérifier qu'elle transforme toute droite d'équation

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

(c'est-à-dire de coordonnées u_1, u_2, u_3) en une droite d' de coordonnées u_1', u_2', u_3', liées également aux précédents par des équations linéaires de la forme

$$u_i' = \Sigma\, A_{ik}u_k.$$

Pour qu'une telle transformation soit biunivoque sans exception, il faut et il suffit que le déterminant des a_{ik} ou celui des A_{ik} soit différent de zéro.

Une transformation projective *conserve* donc les droites : on l'appelle aussi une *collinéation*.

Les collinéations biunivoques forment un *groupe* à 8 paramètres. L'une d'elles est parfaitement déterminée si l'on exige qu'elle transforme quatre points non situés en ligne droite en quatre points de même configuration projective.

(Deux configurations projectives sont les mêmes si elles présentent les mêmes alignements rectilignes.)

Introduisons maintenant quelques notations commodes :

Nous désignerons par une seule lettre X le triplet de coordonnées x_1, x_2, x_3 et par λX le triplet proportionnel λx_1, λx_2, λx_3. — Bien entendu, X et λX déterminent un seul et même point : il n'y aura aucun inconvénient à désigner aussi ce point soit par X soit par λX.

Nous désignerons par $\lambda X + \mu Y$ le triplet dont les coordonnées ont la forme $\lambda x_i + \mu y_i$, et les points correspondants.

Avec cette notation, le point Z suivant :

$$Z = \lambda X + \mu Y$$

appartient (comme nous l'avons indiqué plus haut) à la droite XY, sur laquelle sa position est fixée par les paramètres homogènes $\lambda\mu$.

Ajoutons (sans le démontrer) que la *combinaison linéaire* suivante :

$$T = \lambda X + \mu Y + \nu Z$$

formée à l'aide de trois points X, Y et Z en situation générale (non alignés sur une même droite) désigne un point quelconque de plan projectif déterminé par les trois points X, Y et Z, la position de ce point T étant tracée par trois paramètres homogènes λ, μ, ν.

Les conventions précédentes vont nous permettre de simplifier la notation d'une transformation projective. Désignant une telle transformation par T, nous écrivons

$$X' = T(X) \text{ ou plus simplement encore}$$

$$X' = TX.$$

On vérifie sans autre la formule suivante

$$\text{pour } Z = \lambda X + \mu Y$$

$$Z' = Tz = \lambda TX + \mu TY = \lambda X' + \mu Y'.$$

En d'autres termes : la combinaison linéaire qui détermine Z′ à partir de X′ et Y′ a les mêmes paramètres que celle qui détermine Z à partir de X et Y. — Le résultat nous servira dans un instant. Il est d'ailleurs généralisable. Les relations linéaires valables entre tels ou tels points du plan projectif restent valables pour les points transformés par une collinéation.

167. LE RAPPORT ANHARMONIQUE. Il nous faut encore introduire le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, et de quatre droites concourantes.

Revenons à l'équation

(1) $$Z = \lambda X + \mu Y$$

qui fixe Z sur la droite XY par l'intermédiaire du rapport $\dfrac{\lambda}{\mu}$, que nous désignerons par ρ.

Supposons quatre points Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 ainsi choisis sur cette droite par l'intermédiaire de quatre valeurs de ρ que nous nommerons ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4.

Nous savons comment former le rapport anharmonique $(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)$ de ces quatre nombres (chapitre V).

Montrons tout d'abord que ce birapport ne dépend que des quatre points Z_i et pas du tout des points X et Y. Remplaçons ces deux derniers points, dans le

rôle qui leur a été attribué par deux autres points X* et Y* quelconques de la même droite.

Posons donc

$$X = \alpha X^* + \beta^*$$

et

$$Y = \gamma X^* + \delta Y^*$$

l'équation (1) qui détermine Z devient :

$$Z = \lambda(\alpha X^* + \beta Y^*) + \mu(\gamma X^* + \delta^*)$$

c'est-à-dire

$$Z = (\alpha\lambda + \gamma\mu)X^* + (\beta\gamma + \delta\mu)Y^*.$$

Posant

$$Z = \lambda^* X^* + \mu^* Y^*$$

et par conséquent

$$\lambda^* = \alpha\lambda + \gamma\mu$$

on obtient ainsi

$$\mu^* = \beta\lambda + \delta\mu,$$

les formules permettant de passer des paramètres λ et μ, fixant Z par rapport à X et Y aux paramètres fixant ce même Z par rapport à X* et Y*. Pour le rapport $\rho^* = \frac{\lambda^*}{\mu^*}$ la formule de transformation s'écrit :

$$\rho^* = \frac{\alpha\rho + \gamma}{\beta\rho + \delta}.$$

Nous retombons sur les transformations projectives d'une variable, réelle ou complexe, que nous avons étudiées au chapitre V (n° 131). Nous y avons explicitement démontré que le rapport anharmonique de quatre valeurs de ρ est égale au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de ρ^*.

Le rapport anharmonique envisagé ne dépend donc que du choix des quatre Z_i. On l'appellera le rapport anharmonique (Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) des quatre points.

L'invariance de ce birapport dans toute transformation projective en découle immédiatement.

Si X′, Y′, Z′ sont les transformés de X, Y, Z on a

$$Z = \lambda X + \mu Y$$

et

$$Z' = \lambda X' + \mu Y'$$

avec les mêmes valeurs de λ et de μ, dans les deux combinaisons. Les quatre valeurs de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ fixant les Z_i sont exactement les mêmes que ceux qui fixent les quatre Z_i' : le rapport anharmonique de ces derniers est donc identiquement le même que celui de Z_i.

Le rapport anharmonique de quatre droites concourantes peut être défini et traité de façon tout à fait analogue.

Ce sont là les quelques éléments de la géométrie analytique du plan projectif dont nous aurons besoin.

Terminons ces quelques observations préalables par deux remarques destinées à éviter certains malentendus.

Rien ne nous oblige à déclarer que les coordonnées et les paramètres dont il vient d'être question soient des nombres réels. Nous sommes parfaitement libres de supposer (et il sera même indispensable de le faire par la suite) que ce sont tous, en général, des nombres complexes. De cette manière, nous définissons, il est vrai, un plan projectif complexe fort différent du plan projectif réel dont la gerbe réelle nous a d'abord fourni le modèle. (Le plan projectif réel y contenu comme une variété à deux dimensions dans une variété à quatre dimensions.) Nous n'hésiterons pas, cependant, à parler des éléments du plan projectif complexe, des points et des droites complexes, par exemple, en suivant d'aussi près que possible les suggestions venant du plan projectif réel.

Nous dirons tout à l'heure que toute droite coupe une conique en deux points (à moins qu'elle ne la fauche), ce qui n'est certainement pas le cas pour une conique du plan projectif réel.

Une fois les calculs faits, il nous faudra cependant revenir au plan projectif réel, pour y retrouver les modèles adéquats des géométries que nous avons déjà étudiées séparément.

Dans un plan projectif (réel ou complexe), il n'y a pas d'éléments qui soient « en soi » à l'infini. L'infini ne s'introduit que dans le modèle constitué par un plan euclidien complété par une droite à l'infini.

S'il nous arrive de parler tout de même d'éléments à l'infini, de dire par exemple qu'une hyperbole coupe la droite à l'infini en deux points, ou qu'une ellipse est toute dans le fini, on voudra bien comprendre que ces façons de dire se rapportent précisément au modèle euclidien dont il vient d'être question.

168. Les champs quadratiques et les coniques.

a) Coordonnées ponctuelles.

Introduisons maintenant une *forme quadratique*, c'est-à-dire une expression homogène du second ordre

$$(1) \qquad \Phi(X,X) = \Sigma\, a_{ik}x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

dont voici aussi l'expression explicite :

$$\Phi(X,X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3.$$

Les points X pour lesquels une telle forme est nulle sont, par définition, sur une *conique*. Appelons ω la conique ainsi définie par la formule

$$\Phi(X,X) = O.$$

En même temps que Φ(X,X) introduisons aussi la forme bilinéaire suivante, qu'on nomme sa forme polaire :

$$\Phi(X,Y) = \Sigma\, a_{ik}x_iyx_k$$

dont voici aussi l'expression explicite :

$$\Phi(X,Y) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1).$$

Deux points X et Y qui annulent Φ(X,Y) sont dits conjugués par raison à ω. Si X et Y est fixe, les points Y qui annulent Φ(X,Y) sont sur la polaire du point X. L'équation de cette polaire est donc

$$\Phi(X,Y) = 0.$$

(Cette équation est d'ailleurs symétrique en X + Y si X est sur la polaire de Y, celui-ci est sur la polaire de X.)

Ces définitions préliminaires ainsi données, soit

$$X = \lambda A + \mu B$$

un point fixé sur la droite AB par le rapport λ : μ.

Calculons Φ(X,X). Voici le résultat de ce calcul :

$$\Phi(X,X) = \lambda^2\Phi(A,A) + 2\lambda\mu\Phi(A,B) + \mu^2\Phi(B,B).$$

En annulant cette expression, on écrit naturellement la condition pour que X soit sur ω. L'équation divisée par μ^2, est du second degré $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\Phi(A,A) + 2\frac{\lambda}{\mu}\Phi(A,B) + \Phi(B,B) = 0.$$

Cette équation détermine, si AB n'est pas tangente à ω, deux valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$, valeurs que nous nommons ρ_1 et ρ_2. Les voici :

$$\left.\begin{matrix}\rho_1\\ \rho_2\end{matrix}\right\} = \frac{\Phi(A,B) \pm \sqrt{\Phi^2(A,B) - \Phi(A,A)\Phi(A,B)}}{\Phi(A,A)}.$$

Nommons α et β les points correspondants sur la conique ω. Sur la droite AB, les points A + B eux-mêmes appartiennent aux valeurs ∞ et 0 du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

$\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est dès lors un rapport anharmonique (ABαβ).

$$(AB\alpha\beta) = \frac{\Phi(A,B) + \sqrt{\quad}}{\Phi(A,B) - \sqrt{\quad}}.$$

Les calculs ont été faits en supposant que toutes les grandeurs qui y figurent puissent être des nombres complexes. Pour l'interprétation qui va suivre, il faudra supposer au contraire que A et B sont des points réels; pris l'un et l'autre dans un « champ » réel (pour tous les points duquel Φ conserve un signe constant). Pour les points d'intersection de la droite AB avec la conique ω, nous ne ferons, jusqu'à nouvel ordre, aucune hypothèse de réalité.

Dans ces conditions, les valeurs de Φ(A,A), Φ(A,B) et Φ(B,B) sont réelles : $\Phi^2(A,B) - \Phi(A,A)\Phi(B,B)$ n'est pas nécessairement une quantité positive. Le quotient $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ est donc soit une quantité réelle, soit le quotient de deux quantités complexes conjuguées.

b) Coordonnées tangentielles.

Tout ce qui vient d'être dit peut être répété en remplaçant les coordonnées ponctuelles (les coordonnées de points) par des coordonnées tangentielles (par des coordonnées de droites).

Considérons de nouveau une forme quadratique

$$\psi(u,u) = \Sigma\, a_{ik}u_iu_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

mais supposons maintenant que les variables u_1, u_2, u_3 soient les coordonnées tangentielles d'une droite u.

Par définition, les droites u pour lesquelles une telle forme est nulle enveloppent une conique. (On dit ainsi dans ce cas que cette conique est une *enveloppe de tangentes*.) Appelons ω la conique-enveloppe ainsi définie par l'équation

$$\psi(u,u) = 0.$$

Considérons encore la forme polaire

$$\psi(u,u) = \Sigma\, a_{ik}u_iv_k.$$

Deux droites u et v qui annulent ψ sont dites conjuguées par rapport à ω. Si u est fixe, les droites v qui annulent $\psi(u,v)$ se coupent en un point, qui est

le *pôle* de la droite u. L'« équation tangentielle » de ce point (comme intersection de droites) est donc :

$$\psi(u,v) = 0.$$

Soit alors

$$u = \eta a + \mu b$$

la droite du faisceau de droites déterminé parles deux droites a et b qui est définie par le rapport $\eta : \mu$.

Si l'on calcule $\psi(u,u)$, on trouve :

$$\psi(u,u) = \eta^2\psi(a,a) + 2\eta\mu\psi(a,b) + \mu^2\psi(b,b).$$

En annulant cette expression on trouve la condition pour que u soit tangente à ω; après division par μ on obtient l'équation :

$$\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2\psi(a,a) + 2\frac{\eta}{\mu}\psi(a,b) + \psi(b,b) = 0.$$

Cette équation a deux racines, si les droites a et b ne se coupent pas sur ω :

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\ \tau_2\end{matrix}\right\} = \frac{\psi(a,b) \pm \sqrt{\psi^2(a,b) - \psi(a,a)\psi(b,b)}}{\psi(a,a)}.$$

Soient α et β les deux tangentes correspondantes à ω. Les droites a et b correspondent aux valeurs ∞ et 0 du rapport $\frac{\eta}{\mu}$. Le rapport $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ n'est alors autre que le rapport anharmonique des quatre droites $(ab\alpha\beta)$:

$$(ab\alpha\beta) = \frac{\psi(a,b) + \sqrt{\psi^2(a,b) - \psi(a,a)\psi(b,b)}}{\psi(a,b) - \sqrt{\psi^2(a,b) - \psi(a,a)\psi(b,b)}}.$$

169. LES MÉTRIQUES PROJECTIVES. L'apparition du rapport anharmonique $(AB\alpha\beta)$ nous ramène à l'analyse du chapitre V (n° 141) à la suite de laquelle nous avons choisi le logarithme d'un rapport anharmonique analogue pour mesure de la distance-h des points AB. Tenant compte des expériences antérieures, nous posons maintenant

$$\text{distance AB} = C\ ln(AB\alpha\beta)$$

où C représente une constante qu'on pourra fixer à volonté. La distance ainsi définie sera dite *relative* à une métrique dont ω est la conique fondamentale, ou dont elle est l'*absolu*. Les propriétés du rapport anharmonique, nous l'avons déjà vu dans l'analyse dont il vient d'être question, assurent à ce logarithme les propriétés d'additivité indispensables pour qu'il puisse être envisagé comme la mesure d'une distance.

Par ces définitions, les éléments fondamentaux d'une métrique sont entièrement ramenés à des *notions projectives* (que toute transformation projective laisse invariante), les notions de rapport anharmonique de quatre points d'une droite et de quatre droites d'un faisceau. C'est pourquoi les métriques dont il est maintenant question sont dites des *métriques projectives*.

Remarquons encore que la notion de points conjugués et celle de droites conjuguées sont aussi des notions projectives : si, par exemple, les points A et B sont conjugués, si donc $\Phi(A,B) = 0$, il suffit de se reporter à la formule pour constater que le rapport anharmonique $(AB\alpha\beta) = -1$. Cette valeur particulière du birapport $(AB\alpha\beta)$ restant invariante (comme toute autre), il en est donc de même de la relation entre points conjugués et de la relation de pôle à polaire qui en découle.

IV. *LES DÉPLACEMENTS ET LES SYMÉTRIES DU MODÈLE DE KLEIN*

170. ENSEMBLE DES TRANSFORMATIONS QUI LAISSENT LA MÉTRIQUE INVARIANTE. Un déplacement ou une symétrie doit être une transformation qui conserve les distances et les angles — en un mot, une transformation qui conserve la métrique. C'est précisément ce que font toutes les transformations qui laissent la conique ω invariante (qui transforment ω en elle-même). Il sera donc tout indiqué de définir les déplacements et les symétries de notre métrique projective à l'aide du groupe de ces transformations, à condition que ce groupe comporte le nombre juste de degrés de liberté. (Le modèle reste ainsi purement projectif.) Reprenons la figure dont nous nous sommes déjà servi, la figure formée d'un point A et d'une droite a passant ce point. Combien y a-t-il de collinéations appliquant une figure de ce genre sur une autre figure du même genre ?

Soit donc (A,a) la première de ces figures (A',a') la seconde. (Nous n'envisageons d'ailleurs que le cas où les droites a et a' coupent toutes deux la conique ω en deux points distincts, réels ou imaginaires.)

Soient donc α et β respectivement α' et β' les points où a et $24'$ coupent ω (fig. 145).

Les transformations dont il peut être question doivent amener les points de a sur a', et laisser les points de ω sur celle-ci. Il n'y a donc, quant aux points α et β, que deux éventualités : ou bien α vient sur α' et β sur β', ou bien α

vient sur β' et β sur α'. Envisageons l'une ou l'autre de ces éventualités, la première par exemple.

Soit P le pôle de a et P′ le pôle de a' : P doit aussi venir sur P′ puisque la relation de pôle à polaire est projectivement invariante. Il en résulte que les droites Pα et Pβ (qui touchent ω en α et β) doivent correspondre aux tangentes P′α' et P′β'.

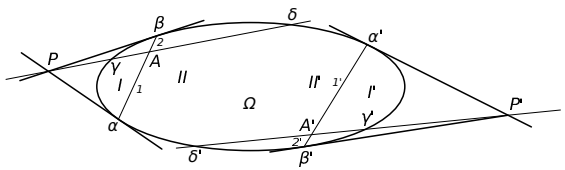


FIG. 145

Menons ensuite par A, et par A′, les droites p et p' respectivement conjuguées de a et a'. (Ce sont les perpendiculaires à a et a' par A et A′, dans notre métrique.) Ces deux droites aussi doivent être correspondantes, ainsi que les paires de points γ et δ d'une part, γ' et δ' d'autre part où elles coupent la conique ω. Il suffit d'ailleurs de ne prendre qu'un de ces derniers points de part et d'autre en considération. Il y a d'ailleurs ici aussi deux cas à distinguer : on peut faire correspondre soit γ' à ∞ δ' à $-\infty$ par exemple. Examinons la première de ces deux éventualités.

Il y a exactement une collinéation qui fait correspondre aux autres points P, α, β et γ les quatre points P′, α', β' et γ'. Cette collinéation transforme ω en elle-même, car ω est parfaitement déterminée soit par α, β et γ et par les deux tangentes en α et β (cinq conditions classiques) soit par α', β', γ' et par les deux tangentes α' et β'. (Cette collinéation transforme en plus, sans qu'on ait à l'exiger spécialement δ en δ'.)

La réponse à notre question est donc la suivante :

Il y a quatre collinéations amenant la figure (A,a) sur la figure (A′,a') dans le groupe des collinéations transformant a en elle-même.

Si nous appelons respectivement 1 et 2 les segments αA et Aβ, I la portion de Ω située d'un côté de a, II l'autre, et de même pour 1′, 2′, I′ et II′, ces quatre projectivités peuvent alors être caractérisées comme suit (fig. 145) :

A. Une appliquant α sur α' et γ sur γ';
elle applique β sur β', δ sur δ', 1 sur 1′, 2 sur 2′, I sur I′, II sur II′.

B. Une appliquant α sur β' et γ sur γ';
elle applique β sur α', δ sur δ', 1 sur 2′. 2 sur 1′, I sur I′, II sur II′.

C. Une appliquant α sur α' et γ sur δ';
elle applique β sur β', δ sur γ', 1 sur 1′, 2 sur 2′, I sur II′, II sur I′.

D. Une appliquant α sur β' et γ sur δ';
elle applique β sur α', δ sur γ', 1 sur 2′, 2 sur 1′, I sur II′ et II sur I′.

C'est exactement le nombre qui convient, nous le verrons, passant à la classification des métriques irréductibles les unes aux autres, classification qui va nous ramener entre autres aux géométries que nous connaissons déjà.

L'exposé général que nous venons de faire va d'ailleurs s'éclaircir et se préciser notablement par la reprise plus ou moins détaillée de chacune de ces éventualités.

La classification qui va suivre tiendra compte d'un certain nombre de faits que nous ne pouvons pas songer à démontrer tous ici : il nous faudra nous borner à les rappeler.

171. FIGURES PROJECTIVEMENT HOMOLOGUES; CLASSIFICATION DES CONIQUES (1e VERSION).

Regardons les choses tout d'abord du point de vue de la géométrie projective complexe.

Dans un plan projectif complexe, deux figures F et F′ sont projectivement homologues (ou projectivement congruentes) s'il existe au moins une collinéation (réelle ou complexe) amenant l'une des deux figures sur l'autre.

Par exemple, une figure formée de quatre points quelconques (réels ou complexes) est homologue à toute autre figure formée également de quatre points, pourvu que les deux figures aient la même structure linéaire. C'est en particulier le cas si les quatre points sont de part et d'autre en situation générale. Les points du premier groupe étant nommés A, B, C, D et ceux du second groupe A′, B′, C′, D′, il y a (nous l'avons déjà dit) exactement une collinéation amenant A, B, C, D respectivement sur A′, B′, C′, D′.

De ce même point de vue, deux coniques quelconques sont-elles toujours projectivement homologues ? Pour répondre à cette question, il nous faut faire quelques distinctions.

En général la forme quadratique $\Phi(X,X)$ membre de gauche de l'équation d'une conique, n'est pas le produit de deux expressions linéaires.

Il peut cependant arriver qu'on ait

$$\Phi(X,X) = (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$$

$$\Phi(X,X) = \Sigma\, v_iv_kx_ix_k$$

c'est-à-dire l'équation $\Phi(X,X) = 0$, détermine alors deux droites, les droites

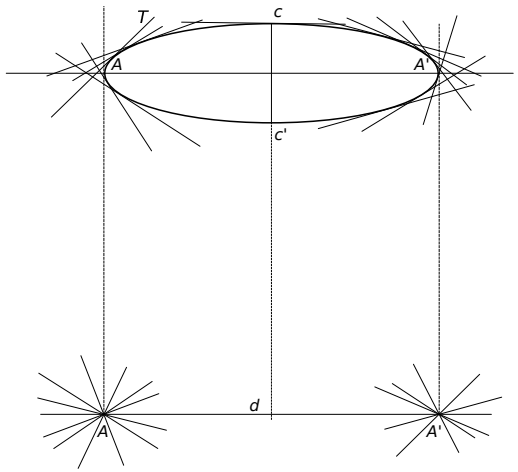
$$\Sigma\, v_ix_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\, v_kx_k = 0.$$

On dit que ces deux droites forment une conique *dégénérée*, une conique qui se *réduit* à ces deux droites.

Il peut naturellement arriver que les deux équations linéaires précédentes déterminent une seule et même droite. On dit dans ce cas que la conique $\Phi(X,X) = 0$ dégénère en une droite double.

Les trois cas précédents sont les seuls à prendre en considération pour l'instant : il n'est pas difficile de montrer que la condition nécessaire (et suffisante) pour que deux coniques soient projectivement homologues est que toutes deux soient non dégénérées ou dégénérées au même degré. (De ce point de vue, il n'y a donc aucune différence entre une ellipse, une parabole et une hyperbole, et même un cercle imaginaire de centre donné et de rayon imaginaire, par exemple.)

FIG. 146 Conique non dégénérée.
1° Lieu des points M.
2° Enveloppe des tangentes T.



En aplatissant la conique dégénère
1° en la conique-lieu se réduisant à deux droites doubles *d*;
2° en la conique-enveloppe se réduisant aux deux points A et A′.

Ce qui vient d'être dit des coniques-lieux-de-points peut être répété, *mutatis mutandis*, des coniques-enveloppes-de-droites.

La forme quadratique $\psi(u,u)$ n'est pas, en général, le produit de deux expressions linéaires; il peut arriver qu'elle le soit; il est même possible qu'elle soit le carré d'une expression linéaire.

Dans le premier cas, la conique d'équation $\psi(u,u) = 0$ n'est pas dégénérée, elle se réduit, dans le second cas, à une paire de points et dans le troisième à un point double.

Et quant à la condition (nécessaire et suffisante) pour que deux coniques-enveloppes soient projectivement homologues, elle est la simple transcription (par dualité) de celle que nous avons énoncée un peu plus haut.

Remarquons enfin qu'une conique-lieu non dégénérée est toujours aussi une conique-enveloppe non dégénérée, mais qu'une conique-lieu qui se réduit à une paire de droites se réduit à un point double en tant que conique-enveloppe (fig. 146), et que, de façon analogue, une conique-enveloppe qui se réduit à deux points se réduit, en tant que conique-lieu à une droite double (fig. 147).

Pour rejoindre les géométries que nous connaissons à partir des métriques projectives, les distinctions précédentes ne suffisent pas. Il nous faut passer à une définition plus étroite des figures projectivement homologues.

172. FIGURES PROJECTIVEMENT HOMOLOGUES; CLASSIFICATION DES CONIQUES (2e VERSION). Deux figures F et F′ seront dites maintenant projectivement homologues s'il existe une transformation *réelle* (du plan projectif complexe) amenant F sur F′.

Par ailleurs, nous ne prendrons plus en considération que des coniques d'équation réelle, c'est-à-dire des coniques dont l'équation ne comporte que des coefficients réels (à un facteur de proportionnalité près).

Dans ces conditions, on démontre que les coniques non dégénérées se répartissent en deux catégories seulement :

a) celles qui sont homologues à la conique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

conique qui ne contient aucun point réel.

b) et celles qui sont homologues à la conique

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

On peut prendre pour modèles de ces deux coniques dans un plan euclidien (pris lui-même comme modèle d'un plan projectif, comme nous l'avons expliqué plus haut), le cercle imaginaire $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et le cercle réel $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Les coniques dégénérées en une paire de droites ou en une paire de points, se répartissent également en deux catégories :

a) les paires de droites imaginaires conjuguées — et les paires de points imaginaires conjugués.

(Deux droites imaginaires conjuguées se croisent en un point réel, deux points imaginaires conjugués sont joints par une droite réelle) :

b) les paires de droites réelles et les paires de points réels.

On peut prendre comme modèle d'une paire de droites imaginaires conjuguées la paire isotrope par l'origine d'un plan euclidien-cartésien.

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = 0.$$

On peut prendre dans le même plan, la paire

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$$

comme modèle d'une paire de droites réelles.

Enfin, les droites doubles réelles d'une part, les points doubles d'autre part, ne forment respectivement qu'une catégorie.

Pour introduire une dernière distinction, bornons-nous enfin au plan projectif réel, dont le plan euclidien complété par la droite à l'infini peut servir de modèle.

Revenons aux coniques non dégénérées. Une conique telle que le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

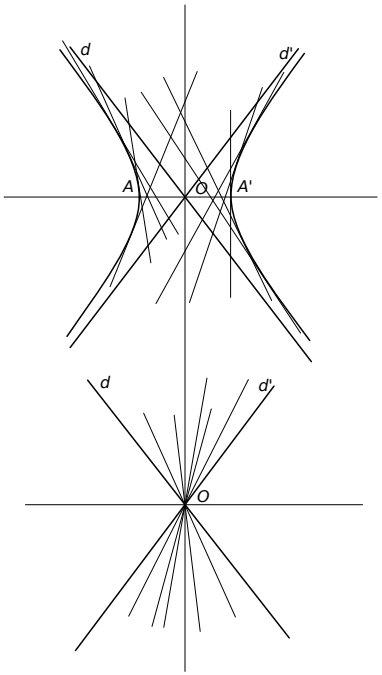
ne partage pas le plan modèle en deux régions. (L'expression $x^2 + y^2 + 1$ est partout positive.)

Les coniques telles que le cercle réel

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

(les ellipses, les paraboles et les hyperboles) partagent au contraire le plan-modèle, en deux régions. Ces deux régions ne sont pas homologues : l'intérieur d'une ellipse, par exemple, est orientable, l'extérieur ne l'est pas.

FIG. 147 Conique non dégénérée



A et A′ se rapprochent de *o*, la conique
1° en tant que conique-lieu dégénère en deux droites *d* et *d*′;
2° en tant que conique-enveloppe dégénère en le point double *o*.

Dans ce cas la conique détermine donc deux champs métriques différents.

Remarque. La classification des métriques cayleyennes à deux dimensions est ainsi terminée. La classification des métriques à trois et à plus de trois dimensions peut se faire selon les mêmes principes. Le tableau des cas non homologues entre eux se complique assez sérieusement lorsque la dimension de l'espace envisagé croît.

Pour $n = 3$, il y a trois catégories de quadriques-lieux à distinguer, par exemple, et trois étages de dégénérescence.

Pour ce que nous avons en vue, et bien que nous parlions du Problème de l'Espace, l'étude des géométries planes suffira. Les géométries spatiales nous offriraient simplement une matière moins facile à maîtriser sans nous apporter d'élément vraiment nouveau à notre enquête.

Pour établir la jonction avec les chapitres précédents, et avec le premier paragraphe de ce chapitre, il va maintenant suffire de reprendre trois des cas que comprend notre classification.

V. *LE MODÈLE PROJECTIF DE LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE*

173. LES DEUX CLASSES DE CONIQUES NON DÉGÉNÉRÉES. Tirons maintenant parti de la classification qui précède. Nous venons de voir que les champs quadratiques non dégénérés qui nous intéressent se répartissent en deux catégories, selon la nature de la conique qui en détermine la métrique. (Nous nommerons d'ailleurs cette conique l'*absolu* du champ métrique.)

a) Cette conique est réelle; elle est projectivement homologue à un cercle réel, d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 - p^2 x_3^2 = 0$$

(en posant $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = 1$, l'équation précédente prend la forme de l'équation habituelle $x^2 + y^2 = R^2$ du cercle de rayon R, centre de l'origine des axes).

b) Cette conique est complètement imaginaire; elle est homologue au cercle de rayon *i*R d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + R^2 x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -R^2.$$

Plaçons-nous dans le cas *a)*. Il nous reste alors à choisir encore entre deux éventualités : celle où le champ métrique est pris à l'intérieur du cercle-absolu, et celle où il occupe l'extérieur de ce cercle. Examinons tout d'abord la première de ces deux éventualités.

a) Cas hyperbolique, le champ est à l'intérieur de l'absolu

174. DÉFINITIONS. VÉRIFICATION DES AXIOMES DE L'INCIDENCE, DE L'ORDRE ET DE PASCH. Soit donc Ω le champ métrique situé à l'intérieur de la conique ω qui en est l'absolu. Par la méthode du dictionnaire, nous allons voir que le champ Ω est un modèle de la géométrie hyperbolique au même titre que le modèle de POINCARÉ.

Le champ quadratique Ω *sera dit* le plan-*h* (donc sans les points de ω)

Un point de Ω *sera dit* un point-*h*

Un segment de droite intérieur à Ω et limité par deux points α, β sur ω (mais sans ces deux points) *sera dit* une droite-*h*.

Les droites-*h* ne sont donc autres que les cordes de ω.

L'incidence entre les points de Ω et les cordes de ω *restera* l'incidence des éléments-*h* correspondants.

On vérifie immédiatement que les axiomes de l'incidence I_1-I_4 (cf. ch. V, p. 300) sont satisfaits. D'un côté on écrit les axiomes de la géométrie hyperbolique à vérifier. De l'autre côté on inscrit les propriétés du champ quadratique qui, traduites, donnent les axiomes. On voit alors que les propriétés du champ quadratique sont tout à fait élémentaires et peuvent être immédiatement contrôlées.

Il en est de même des axiomes de l'ordination II'_1-II'_7 et des axiomes de l'ordre continu sur la droite, si on définit l'ordination sur ces droites-*h* par l'ordination sur les segments correspondants. (Cela tient au fait que l'ordination des points sur un segment *ouvert* est la même que sur une droite; en langage mathématique on dit que le segment ouvert est topologiquement équivalent, ou homéomorphe, à la droite euclidienne.)

L'axiome de PASCH enfin, *à droite*, n'est autre chose qu'un cas particulier de l'axiome de PASCH, *à gauche* : à savoir cet axiome appliqué uniquement à des triangles entièrement intérieurs à ω. Il est donc en tous cas vérifié.

Dans ce modèle sont donc réalisés de façon presque triviale les axiomes de l'incidence et de l'ordre discontinu et continu.

Il reste à examiner, à droite, l'axiome des parallèles et la congruence.

175. LE PARALLÉLISME. Commençons par le premier. Visiblement, l'axiome d'EUCLIDE n'est pas réalisé, mais bien l'axiome de LOBATSCHEFSKI :

soit *a* une droite-*h*, $\alpha\beta$ le segment de droite qui lui correspond, P un point extérieur à *a* (fig. 148).

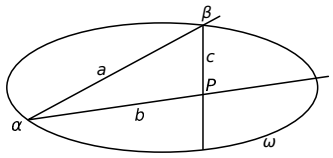


FIG. 148

On voit sur la figure que les paires de points (P,α) et (P,β) déterminent respectivement deux droites-*h* *b* et *c* ayant la propriété suivante :

b et *c* ne coupent pas *a* (dans le plan-*h*, n'oublions pas que α et β ne sont pas des points de ce plan). Ils déterminent en P quatre angles opposés deux à deux par le sommet. Une paire de ces angles ne contient que des sécantes de *a*, l'autre ne contient que des non-sécantes; *b* et *c* sont les non-sécantes limites typiques pour la situation déterminée par l'axiome de LOBATSCHEFSKI, et qui fut examinée en détail dans le paragraphe consacré au théorème de l'alternative (ch. V, n° 127).

Si nous appelons ces deux non-sécantes limites des parallèles-*h*, nous obtenons :

Axiome de LOBATSCHEFSKI : par un point-*h* à une droite-*h* ne passant pas par ce point, on peut mener deux parallèles-*h*. Celles-ci séparent, en ce point, les sécantes-*h* des non-sécantes-*h*.

La congruence

À ce stade, nous avons donc fait apparaître à droite toute la géométrie hyperbolique, à l'exception des notions et axiomes de la congruence.

Pour combler cette lacune, nous allons définir directement, dans le plan hyperbolique, une *métrique*. Une fois que nous aurons montré que cette métrique a bien les propriétés qu'il faut en attendre, il sera facile de définir les segments égaux comme étant ceux qui ont une mesure égale — les angles égaux étant définis de la même façon — et d'en déduire les axiomes de la congruence.

176. LA MÉTRIQUE À L'INTÉRIEUR DE L'ABSOLU. Pour définir la métrique en question, nous reprenons simplement la métrique projective définie de façon générale dans ce qui précède :

soit $\alpha\beta$ une corde de ω, A, B deux points sur cette corde intérieure à Ω

Par définition, nous posons :

$C \cdot \left| ln(AB\alpha\beta) \right| =$ distance-*h* des points-*h* AB, ou longueur-*h* du segment-*h* AB

(C étant une constante que nous laissons pour l'instant arbitraire.)

Définition : deux segments-*h* sont égaux-*h* si leurs longueurs-*h* sont égales.

Soit P un point de Ω, *a*, *b* deux cordes de ω par ce point. Menons par P les deux tangentes τ_1, τ_2 à ω (ces tangentes sont imaginaires; c'est pour qu'elles soient définies que nous avons dû faire intervenir le plan complexe).

Par définition nous posons :

$$\left| \; C' \; ln(ab\tau_1\tau_2) \; \right| = \text{mesure-}h \text{ de l'angle-}h \; (a,b),$$

C′ étant une constante imaginaire que nous laissons pour l'instant arbitraire. (Cette constante doit être imaginaire pour que le produit C′ $ln(ab\tau_1\tau_2)$ soit réel.

Définition : deux angles-*h* sont égaux-*h* si leurs mesures-*h* sont égales.

Remarque : souvent on choisit $C = \frac{1}{2}$, $C' = \frac{1}{2}$.

Remarquons encore ceci : soient A, B deux points de Ω. Si nous maintenons A fixe et faisons tendre B vers ω, la distance-*h* AB ainsi définie tend vers l'infini (car le birapport (ABαβ) tend soit vers l'infini, soit vers zéro, et dans les deux cas le logarithme tend en valeur absolue vers l'infini).

Les points sur ω *peuvent alors être légitimement appelés* les points à l'infini du plan-*h*. On peut alors dire que deux parallèles-*h* sont des droites-*h* se coupant à l'infini-*h*.

177. VÉRIFICATION DES AXIOMES DE LA CONGRUENCE. Les axiomes $III'_{1\text{-}6}$ et $III''_{1\text{-}6}$ sont maintenant des conséquences immédiates des propriétés du birapport et de la fonction logarithmique. Nous laissons au lecteur le soin de les vérifier; cette vérification ne diffère pas des raisonnements qui ont été faits mainte fois au chapitre V. Elle doit tenir compte essentiellement du fait que la mesure-*h* définie plus haut est additive, c'est-à-dire que, si A, B, C sont trois points-*h* se suivant dans cet ordre sur une droite-*h*, alors

$$mes \text{ AC} = mes \text{ AB} + mes \text{ BC}$$

cf. chapitre V, n° 141.

Il nous reste à vérifier l'axiome III‴ qui établit la jonction entre l'égalité-*h* des angles et celle des segments :

III‴. Dans deux triangles-*h* ABC et A′B′C′, les égalités $AB \overset{h}{=} A'B'$, $AC \overset{h}{=} A'C'$, et $\sphericalangle$ CAB $\overset{h}{=} \sphericalangle$ C′A′B′ entraînent l'égalité $\sphericalangle$ ABC $\overset{h}{=} \sphericalangle$ A′B′C′.

Nous devons démontrer la proposition correspondant à cet axiome *à gauche*.

L'idée de la démonstration est fort simple; celle-ci procède de la manière suivante :

a) les projectivités du plan projectif qui transforment ω en lui-même constituent, dans le champ quadratique Ω, des déplacements-*h* : elles respectent les longueurs et les angles.

Soient en effet A, B deux points de Ω, α, β les points à l'infini-*h* de leur support une projectivité conservant ω transforme la corde α, β, en une corde γ, δ, γ étant l'image de α et δ celle de β : elle transforme en outre les points A, B en deux points A′, B′ de la corde γ, δ. Nous avons démontré plus haut que dans ces conditions (ABαβ) = (A′B′γδ), d'où par définition $AB \overset{h}{=} A'B'$.

Soient d'autre part *a*, *b* deux cordes par A, τ_1 et τ_2 les tangentes (imaginaires) de A à la conique ω; la même projectivité transforme *a* et *b* en deux cordes *a′* et *b′* passant par A′; et elle transforme τ_1 et τ_2 en les deux tangentes imaginaires de ω issues du point A′, τ_1' et τ_2' (en effet, une projectivité conserve le contact; c'est-à-dire qu'elle transforme des tangentes de nouveau en des tangentes).

On a d'autre part $(ab\tau_1\tau_2) = (a'b'\tau_1'\tau_2')$ d'après les propriétés générales des projectivités. Il s'ensuit, par définition de l'égalité-*h* des angles que :

$$\sphericalangle\,(a,b) \overset{h}{=} \sphericalangle\,(a',b')$$

C.Q.F.D.

b) Nous allons alors montrer que sous les hypothèses de l'axiome III‴, il existe une projectivité conservant ω qui applique le triangle ABC sur le triangle A′B′C′. Cette projectivité étant dans Ω un déplacement-*h*, il s'ensuivra que tous les éléments homologues des deux triangles sont égaux-*h*; en particulier donc $\sphericalangle$ ABC $\overset{h}{=} \sphericalangle$ A′B′C′.

Construisons donc la projectivité en question !

Reportons-nous aux notations de la page 390; supposons que B se trouve sur 1 et C dans I, et de même que B′ se trouve sur 1′, et C dans I′.

Nous avons vu qu'il existe une projectivité conservant ω et une seule qui applique A sur A′, le support de AB sur le support de A′B′, 1 sur 1′ et I sur I′. Nous allons montrer que cette projectivité applique le triangle ABC sur le triangle A′B′C′. (Le raisonnement serait le même dans les autres cas possibles.)

Tout d'abord cette projectivité applique B sur B′ : elle est en effet un déplacement-*h* et applique donc B sur un point *de 1′* situé à la même distance-*h* de A′ que B de A. Mais le point B′ est le seul ayant cette propriété, en raison de l'unicité du report des longueurs-*h* (axiome III'_6).

Soit d'autre part C″ l'image de C par cette projectivité. Nous allons montrer que C″ est identique à C′ :

en effet $\sphericalangle$ CAB $\overset{h}{=} \sphericalangle$ C″A′B′ puisque cette projectivité est un déplacement-*h*;

mais $\sphericalangle$ CAB $\overset{h}{\equiv}$ $\sphericalangle$ C′A′B′ par hypothèse. En raison de l'unicité du report des angles (axiome III″$_6$) il faut donc que les supports de A′C′ et de B′C″ soient confondus.

D'autre part on a de même *mes-h* A′C″ = *mes-h* AC : mais *mes-h* AC = *mes-h* A′C′ par hypothèse; donc *mes-h* A′C″ = *mes-h* A′C′.

Les deux points C′ et C″ doivent donc être confondus en raison de l'unicité du report des longueurs-*h* (axiome III′$_6$).

Le déplacement-*h* que nous avons construit amène donc le triangle ABC sur le triangle A′B′C′. Ces deux triangles sont donc congruents-*h*, C.Q.F.D.

178. QUELQUES REMARQUES. Nous avons maintenant fait apparaître à droite tous les axiomes de la géométrie hyperbolique. Nous avons donc constitué un *modèle* de cette géométrie. Ce modèle, que l'on appelle le modèle CAYLEY-KLEIN, est assez différent du modèle de POINCARÉ étudié précédemment. En particulier la congruence des angles n'est pas, ici, la congruence euclidienne : dans ce modèle, un angle droit au sens de la métrique hyperbolique n'est pas un angle droit en sens euclidien.

Remarquons encore que dans ce modèle, les symétries-*h* par rapport à une droite-*h* *a* se réalisent de façon particulièrement simple. Ce ne sont autres que les collinéations du plan projectif qui laissent invariants la conique ω, la droite *a*, et le pôle A de *a*, tout en permutant les deux demi-plans-*h* déterminés par *a* (fig. 149) :

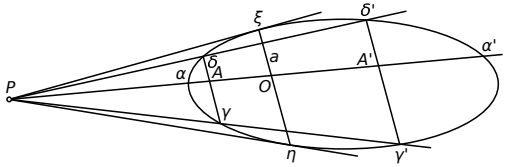


FIG. 149

On les appelle des homologies harmoniques.

b) Le cas quasi hyperbolique et le cas elliptique

179. LE CHAMP EST À L'INTÉRIEUR DE L'ABSOLU. Reportons-nous à la classification générale dont nous sommes partis. Dans ce qui précède, nous avons examiné le cas où l'on prend comme « plan » le champ quadratique situé à l'intérieur d'une conique réelle. Nous avons vu que l'on obtient, à l'aide de quelques définitions très simples, un modèle de la géométrie hyperbolique.

Ces mêmes définitions fournissent un modèle d'une géométrie tout à fait différente, si l'on prend comme « plan » non plus l'intérieur, mais bien l'*extérieur* d'une telle conique.

De cette possibilité, nous ne voulons dire que quelques mots. Pour mieux

soutenir l'imagination prenons comme conique une hyperbole (rappelons que, projectivement, une hyperbole ne diffère pas d'une ellipse). Le champ quadratique à examiner est alors celui qui est situé « entre » les deux branches de l'hyperbole (fig. 150).

Avec les mêmes définitions que précédemment, une « droite » sera un segment qui peut, euclidiennement parlant, passer par l'infini; telle la « droite » α, β de la figure 150.

En fait, de deux « perpendiculaires » (c'est-à-dire de deux droites conjuguées) l'une passe toujours par l'infini euclidien, tandis que l'autre va d'une branche de l'hyperbole à l'autre.

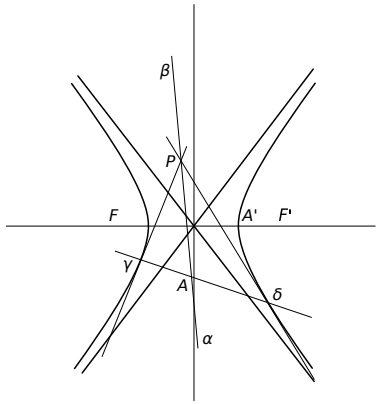


FIG. 150

Les tangentes de l'absolu représentent un cas limite : elles sont leurs propres conjuguées et sont donc « perpendiculaires » à elles-mêmes.

Au sens du modèle, elles ont d'ailleurs leurs deux points à l'« infini » confondus :

ce sont donc des courbes *fermées*. Sur une telle courbe, tout segment a la « longueur » 0; la « longueur » d'un segment *a*, *b* sur une telle « droite » est en effet par définition $C\cdot|ln(ab\alpha\beta)|$, si α est le point double à l'« infini ». Or $(ab\alpha\beta) = 1$, d'où $ln(ab\alpha\alpha) = 0$. Ces « droites » sont donc des « droites » de « longueur » nulle.

Si l'on examine d'autre part les « déplacements » qui laissent un point P fixe (et qu'il faudrait donc qualifier de « rotation »), on constate qu'elles laissent également fixes deux « droites » : à savoir les tangentes issues de P à la conique-absolu. La situation que l'on obtient est donc assez différente de la situation habituelle.

Cette même situation, généralisée à un espace quadridimensionnel, joue un rôle fondamental dans la géométrie de l'espace-temps relativiste.

180. L'ABSOLU EST IMAGINAIRE. Lorsque la conique-absolu est entièrement imaginaire, le modèle occupe tout le plan projectif : en effet une conique imaginaire ne divise pas ce plan en un « extérieur » et un « intérieur ».

Si l'on reprend pour ce cas les formules générales de la métrique projective que nous avons données au début de ces considérations, on obtient dans ce plan un modèle de la géométrie *elliptique*. Dans cette géométrie toutes les droites sont des courbes fermées : l'« infini ».

B. Ouverture de l'idée d'espace

181. PRÉPARATION. Nous fera-t-on le reproche que, voulant traiter le problème de l'espace, nous nous soyons tant servis de la géométrie à deux dimensions et si peu de la géométrie à trois dimensions ? N'y a-t-il pas là une grave lacune ? Pour avoir le droit de tirer de notre étude des conclusions valables non seulement pour le plan, mais aussi pour l'espace, ne conviendrait-il pas de reprendre et de porter dans un espace à trois dimensions toutes les considérations géométriques auxquelles nous nous sommes livrés jusqu'ici, spécialement en ce qui concerne l'axiomatisation de la géométrie euclidienne et l'édification des géométries non euclidiennes.

Voici les raisons pour lesquelles nous ne pensons pas devoir le faire.

Si nous cédions au désir d'être complet, au désir de refaire en géométrie, spatiale tout le chemin que nous avons fait en géométrie plane, notre étude devrait naturellement prendre un volume beaucoup plus considérable. Quant à la longueur des textes, la partie mathématique y deviendrait prépondérante. Pour ce que nous avons en vue, nous ne pensons pas que nous y gagnerions grand-chose. Dans leur ampleur, les moyens mis en œuvre masqueraient peut-être le but auquel ils ont à nous mener. Certes, pour celui qui porte à la géométrie un intérêt de mathématicien, l'adjonction d'une troisième dimension n'est pas un événement quelconque. Elle engendre, au contraire, des circonstances nouvelles qui ne peuvent manquer de susciter et de fixer l'intérêt du géomètre. Mais quant aux généralisations dont nous avons besoin ici, elles sont si naturelles qu'il suffira, pensons-nous, d'en dire quelques mots.

Il n'y a, par exemple, aucune difficulté spéciale à réaliser dans l'espace un modèle de la géométrie hyperbolique analogue au modèle de POINCARÉ. L'espace hyperbolique y sera représenté par l'intérieur d'une sphère Ω, les plans de cet espace, les plans-*h* y seront figurés par des calottes sphériques interceptées par la sphère fondamentale Ω sur les sphères qui lui sont orthogonales, ces calottes se coupent suivant des arcs de cercles, eux aussi orthogonaux à Ω et qui assumeront le rôle des droites-*h*.

De façon plus systématique, il serait long mais il ne serait pas difficile d'exposer à nouveau, avec quatre variables homogènes au lieu de trois, la théorie des métriques projectives que nous avons déjà esquissée plus haut. Par l'intermédiaire des modèles projectifs, l'idée d'un espace homogène plus général que l'espace euclidien peut être tout naturellement porté du cas de deux au cas de trois dimensions. Les cas à enregistrer sont plus nombreux, aussi bien à l'étage des cas non dégénérés que des cas dégénérés. Parmi les premiers, on retrouve, bien entendu, le cas hyperbolique dans lequel l'absolu est une quadrique réelle du type de la sphère ou de l'ellipsoïde (aussi du paraboloïde elliptique ou de l'hyperboloïde à deux nappes), le cas elliptique dans lequel l'absolu est une quadrique complètement imaginaire, du type d'une sphère imaginaire. Mais il faudra y prendre note aussi d'un second cas hyperbolique dans lequel l'absolu est une quadrique réelle réglée telle que l'hyperboloïde à une nappe.

La classification de tous les cas dégénérés nous prendrait quelque temps, mais elle n'exigerait aucune idée nouvelle. Nous en avons déjà donné les principes dans le cas de deux dimensions. Nous y retrouverions l'espace euclidien, à la place qu'on peut facilement prévoir, à côté d'autres cas encore dont il est inutile de faire ici l'énumération exhaustive.

D'autre part, tout ce que nous avons dit de l'intuition, dans ce qu'elle a de fort et de faible, du théorique et de l'expérimental, des réalisations et des schématisations, a déjà été d'avance formulé de façon à conserver sa validité pour un espace à trois dimensions. Le théorème de l'approche dont il va être question (et qui sera démontré pour le cas de deux dimensions seulement) peut être, lui aussi, généralisé sans aucune peine au cas de trois dimensions.

En un mot, nous parlerons dès ici comme si le passage de deux à trois dimensions, le passage des géométries planes aux géométries spatiales, était un fait pleinement accompli.

On pouvait penser, à la fin du chapitre précédent, que notre étude avait déjà atteint son point de culmination : l'idée de la géométrie s'était ouverte. À côté de la variante euclidienne, une autre variante était venue prendre place. Ce fait apportait, quant à la méthode axiomatique, un élément d'appréciation nouveau. Qu'on veuille bien s'en souvenir, l'axiomatisation s'était tout d'abord offerte comme un moyen d'épurer la géométrie. Nous nous demandions si les trois aspects de la géométrie élémentaire pouvaient être franchement et nettement séparés l'un de l'autre, si l'un d'eux au moins, l'aspect rationnel, pouvait être rendu autonome. Par quel procédé la chose devait-elle, pouvait-elle être tentée ? Seule une axiomatisation rigoureuse semblait avoir des chances de succès. Il était essentiel, pour notre étude, que ces chances ne fussent pas écartées. Aussi nous sommes-nous engagés dans la voie de l'axiomatisation pour examiner de très près si cette expérience pouvait être menée à son terme. Mais, nous l'avons déjà dit, ce n'est pas à *la* géométrie idéale, univoquement déterminée dans sa pureté rationnelle, que nous avons été conduits. Certes, l'axiomatisation nous a fait franchir une étape vers une meilleure spécification de l'abstrait (du théorique) en géométrie. Mais le résultat espéré nous a cependant échappé. Au lieu de serrer de plus en plus près un concept toujours mieux déterminé de la géométrie, c'est un dédoublement de l'idée de géométrie que nous avons provoqué, prélude lui-même à une ouverture de cette idée vers un éventail de spécifications concurrentes.

Un point est désormais hors de doute : non seulement l'idée de géométrie

n'était pas encore achevée dans notre esprit au moment où nous cherchions à lui donner toute la précision dont elle est capable. Non seulement elle n'existait pas encore en nous avec la pureté et la nécessité d'une conception purement rationnelle.

Chose encore plus importante : l'effort même de lui conférer une autonomie complète dans l'ordre de l'abstrait révèle une certaine indétermination de la forme sous laquelle elle pourra se réaliser, engendre une certaine multiplicité de réalisations. En un mot : l'idée de géométrie est une idée ouverte.

N'avons-nous pas ainsi épuisé les conséquences de l'expérience géométrique à laquelle le chapitre précédent devait être réservé ? Ces conséquences vont encore nous porter plus loin.

C'est sous son aspect abstrait que l'idée de géométrie s'est ouverte. Ne pourrait-il se faire que le résultat ainsi obtenu ne touche qu'assez superficiellement la géométrie prise dans l'intégrité de sa signification ? Si tel était le cas, notre expérience perdrait une bonne partie de son intérêt. Pour que la situation soit parfaitement claire, ce n'est pas seulement l'idée de géométrie qui doit s'ouvrir, mais aussi et surtout, celle d'espace.

182. NOUVEL ESSAI DE SYNTHÈSE DIALECTIQUE. Revenons au point où nous en étions après la seconde synthèse dialectique, avant toute tentative d'expérimentation dans le schéma axiomatique, et par conséquent avant l'ouverture de l'idée de géométrie. À grands traits, le schéma (fig. 73) de la page 266 résumait la situation. L'horizon axiomatique A servait d'horizon de réalisation à l'édifice axiomatique épuré, c'est-à-dire dépouillé (jusqu'à un certain point) des significations intuitives et spécifiquement géométriques. Sous ses trois aspects, les aspects I, E et T, la géométrie y figurait trois fois (chaque fois de façon différente) dans le rôle de signification extérieure du schéma axiomatique. L'existence du schéma axiomatique commun dans l'horizon de réalité A instituait une analogie (une analogie schématisante) entre ces trois significations extérieures. Ce schéma avait par conséquent la fonction d'un pôle unificateur. Mais, de façon plus profonde encore, l'unité de tout le système était assurée par l'intuition I. Celle-ci informait la construction théorique T, guidait la réalisation expérimentale E et assurait enfin, de plus ou moins loin et de façon plus ou moins immédiate, l'existence du schéma axiomatique A.

Le tout se fondait enfin dans l'idée d'une réalité R encore une fois extérieure, réalité qui n'était pas donnée en soi et sans intermédiaire, qui ne l'était, au contraire, que par l'intervention et sous la forme des schémas I et T (qui jouaient ainsi le rôle de schémas constitutifs), tandis que l'aspect expérimental E en apportait une manifestation opérationnelle plus ou moins achevée.

Telle était alors la situation. Quelle est-elle maintenant ? Il est assez curieux de remarquer que sur le point précis dont nous nous occupons maintenant, c'est-à-dire en ce qui concerne l'aspect E, que rien n'est changé et que rien n'est à changer. Si jamais la géométrie hyperbolique ou elliptique pouvait s'adjoindre un aspect expérimental dans notre horizon naturel, ce devrait être exactement le même que celui de la géométrie élémentaire euclidienne. La fabrication par usure mutuelle des plans, des dièdres et des droites, des dièdres rectangles et des coins trirectangles devrait s'inspirer des mêmes conceptions intuitives de la perpendicularité et du mouvement. Les résultats des manipulations correspondantes seraient exactement les mêmes.

Dans ce cas, demandera-t-on, la discussion qui s'engage n'est-elle pas d'avance terminée ? L'aspect E, disions-nous, est en correspondance analogique avec la géométrie élémentaire sous ses formes I et T qui ont trouvé leur unification dans le schéma axiomatique euclidien. Il n'est donc pas possible (conclura-t-on) que le même matériel, les mêmes objets fabriqués de la même façon, réalisent aussi le schéma hyperbolique dont les différences avec le schéma euclidien ont été nettement (et à dessein) soulignées.

Prenons un exemple : proposons-nous de construire un cube par les techniques indiquées au chapitre IV.

Nous commencerons par construire un trièdre trirectangle de sommet A. Sur chacune des arêtes obtenues, reportons une même longueur *a* (fig. 151).

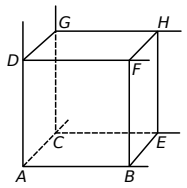


FIG. 151

Soient B, C et D les points ainsi obtenus. Rien ne s'oppose (en principe) à ce que nous taillions en ces trois points trois nouveaux trièdres trirectangles, en utilisant d'ailleurs les trois faces déjà dégagées. Nous introduisons ainsi trois nouvelles faces respectivement perpendiculaires en B, C et D aux arêtes AB, AC et AD. Ces trois nouvelles faces et les trois premières limiteront un hexaèdre qui, dans un espace euclidien, devrait être un cube. Mais, si nous nous en tenons aux constructions que nous avons faites nous-mêmes, seules les propriétés suivantes de notre hexaèdre sont assurées :

a) le trièdre en A est trirectangle,

b) les arêtes AB, AC et AD sont égales entre elles,

c) les trièdres en B, C et D sont trirectangles.

Nommons E, F, G, H les quatre autres sommets de l'hexaèdre, le sommet H étant diagonalement opposé au premier sommet A. Que pouvons-nous dire des trièdres en ces quatre points ? Sont-ils aussi trirectangles ? Nous n'avons pas eu la faculté de les construire à notre gré. Tous les éléments que nous avons

eu la liberté de choisir sont énumérés sous *a*, *b* et *c*. Tous les autres découlent de la construction elle-même, ils sont simplement ce que la construction en a fait. Il en est de même des arêtes que la construction engendre. Sont-elles toutes égales entre elles, et égales aux trois premières arêtes que nous avons choisies, construites égales entre elles ? Seule l'expérience, c'est-à-dire les mesures réellement effectuées sur l'hexaèdre matériellement construit peuvent en décider. C'est seulement en se basant sur de telles mesures, et comme résultat de ces mesures, qu'on peut affirmer que l'hexaèdre construit est un cube ou ne l'est pas. S'il en est ainsi, c'est pour une part (mais pour une part seulement) parce que nous l'avons voulu, mais pour une autre part parce que certaines lois du monde physique indépendantes de notre choix et de notre volonté l'ont permis ou exigé.

En introduisant l'aspect expérimental E dans notre seconde hypothèse dialectique, nous avons prétendu que les mesures dont il vient d'être question avaient été faites et qu'elles avaient été concluantes : elles nous ont conduits à affirmer que le corps ainsi construit est un cube.

Mais ce corps peut-il être reconnu pour un cube à la fois en géométrie euclidienne et en géométrie non euclidienne ? En géométrie hyperbolique ou en géométrie elliptique, nous le savons, il n'existe pas de carré, il n'existe pas même de rectangle. On peut imposer à un quadrilatère la condition d'avoir trois angles droits : le quatrième est alors déterminé (par le reste de la figure) et n'est jamais égal à un droit, mais toujours plus petit ou plus grand qu'un droit, plus petit en géométrie hyperbolique, plus grand en géométrie elliptique.

Et on imaginera facilement, par analogie avec la géométrie hyperbolique à deux dimensions, que dans une géométrie hyperbolique de l'espace le cube ne soit pas une figure possible, mais que la construction indiquée plus haut conduise à un hexaèdre à quatre trièdres trirectangles seulement, à un solide dont en particulier le trièdre en H n'est pas trirectangle.

Sous l'aspect expérimental, les choses semblent ainsi prendre une tout autre tournure que sous l'aspect théorique. Dans notre horizon naturel, l'intuition d'une part et d'autre part les mesures faites avec le plus grand soin semblent s'accorder pour donner la préférence la plus indiscutable à la géométrie euclidienne. Celle-ci semble être seule à pouvoir entrer dans une synthèse dialectique comprenant les trois aspects à la fois, et conservant à l'idée de géométrie l'intégrité de sa signification. L'ouverture de l'idée de géométrie sur le plan théorique ne semble pas pouvoir porter ses conséquences jusque sur le plan expérimental. La géométrie euclidienne semble être ainsi la seule à mériter *pleinement* le nom de géométrie.

183. LE PRIVILÈGE DE L'EUCLIDIEN. La question de l'euclidicité de l'espace est-elle ainsi complètement élucidée ? Le privilège de l'euclidien est-il définitivement assuré ?

Il ressort du paragraphe précédent que la garantie de ce privilège doit être uniquement cherchée dans le rôle que joue l'aspect expérimental dans la synthèse dialectique. Quelle que soit la façon dont l'aspect expérimental se constitue, quelles que soient les techniques grâce auxquelles les êtres géométriques trouvent leur réalisation dans le monde physique, cette garantie ne va pas d'elle-même au-delà de ces techniques et plus loin que la précision dont elles sont capables. Si nous nous en tenons strictement à la technique du rodage, le privilège de l'euclidien reste donc lié aux procédés que cette technique met en œuvre. C'est dans la précision avec laquelle les objets géométriques qu'elle nous permet de fabriquer peuvent être comparés les uns aux autres, appliqués les uns sur les autres, etc., que résident à la fois la justification et les limites de ce privilège.

Les raisons pour lesquelles nous avons donné la préférence à la technique du rodage sont faciles à comprendre. Les procédés dont elle se sert sont immédiatement informés et inspirés par un certain nombre de conceptions intuitives élémentaires. Cette technique se déploie, en quelque sorte, dans notre horizon naturel. Elle s'intègre simplement à nos activités quotidiennes.

C'est dans son étroit contact avec la connaissance intuitive que nous avons de certaines formes spatiales, des mouvements que nous sommes capables d'effectuer et des déplacements dont les objets sont susceptibles dans l'espace que réside une bonne part de la valeur de cette technique. La précision qu'elle comporte va bien au-delà de celle que nous permet le simple exercice de nos sens. Mais elle ne met pas ceux-ci en défaut. Elle leur fournit, au contraire, des points de repère plus précis. En bref, la technique du rodage ne fait que confirmer la légitimité de notre vision naturelle des choses et de l'espace, en montrant que cette vision naturelle reste en accord avec une activité technique répondant à des exigences de précision très considérablement renforcées.

La technique du rodage n'est pas la seule qu'on puisse utiliser pour constituer un aspect expérimental où la géométrie se réalise. Dans notre activité naturelle déjà, la visée conduit à une autre réalisation de la droite. C'est à partir de là, et à l'aide d'instruments adéquats où la géométrie ou l'optique géométrique se réalise, que la mesure peut être développée, elle aussi, et insérée dans notre horizon naturel.

Lorsque, par l'intermédiaire de deux techniques différentes, se constituent deux modèles physiques de la géométrie euclidienne, il n'est pas sûr qu'on puisse unifier les deux modèles différents en un seul et même modèle.

Qu'en est-il dans notre cas ? La géométrie des solides et la géométrie des rayons lumineux forment-elles un tout bien fondu ? La pratique des mesures de

précision en fait l'épreuve. Le privilège de l'euclidien en sort confirmé dans une très large mesure.

Aux échelles moyennes, l'espace euclidien constitue un cadre adéquat aux mesures géodésiques avec la plus haute précision dont elles sont capables. La technique des mesures astronomiques semble porter cette constatation fort loin vers les grandes échelles. Celle des micromesures semble en faire tout autant du côté des petites échelles.

Ce sont là des faits d'expérience, qui témoignent de la structure du monde physique et de notre propre structure physiologique et mentale. Peut-être s'attendait-on, après avoir fait l'expérience de l'ouverture de l'idée de géométrie, à voir l'idée d'espace s'ouvrir elle aussi presque d'elle-même. C'est au contraire le privilège de l'euclidien qui semble tout d'abord devoir s'affirmer. Un effort est encore à faire, une étape est encore à franchir pour arriver jusqu'au point où l'ouverture de l'idée d'espace est elle-même un fait accompli.

Il est une circonstance que les considérations précédentes ne doivent pas nous faire oublier. Ce que nous avons déjà dit de la validité du schéma euclidien aux très petites échelles (à l'échelle atomique, par exemple) reste acquis : cette validité *ne peut être que sommaire*. Tous les éléments de la synthèse dialectique concourent à lui donner ce caractère. L'efficacité de la liaison du théorique à l'expérimental est au prix de la schématisation.

C'est pourquoi, malgré tous les arguments qui peuvent être évoqués en faveur du privilège de l'euclidien, la question n'en reste pas moins ouverte.

a) Si l'ouverture de l'idée de géométrie ne suffit pas pour que l'idée d'espace s'ouvre d'elle-même, elle ne reste cependant pas sans conséquences : l'euclidicité de l'espace ne s'impose plus avec nécessité. C'est un fait qu'une assez large expérience confirme, mais dont la garantie ne franchit pas les limites de cette expérience.

b) Il faut des techniques d'une certaine précision pour dégager du monde physique les modèles où le schéma théorique se trouve adéquatement (bien que sommairement) réalisé. Ces techniques ne sont pas infiniment précises. On peut imaginer qu'elles céderont un jour le pas à des techniques encore plus précises. Les modèles que celles-ci permettront peut-être de construire laisseront-elles intact le privilège de l'euclidien ? C'est encore une question de fait que l'on n'a pas le droit de préjuger.

c) Vers le cosmique, aux très grandes dimensions, l'euclidicité de l'espace ne peut être éprouvée que par des moyens détournés, en faisant même état de certaines hypothèses cosmogoniques peu sûres. Cela suffirait déjà pour qu'on ne puisse pas écarter d'avance l'éventualité (en vue d'une meilleure adéquation) d'une refonte de la synthèse dialectique.

Mais à ces dimensions, le problème des visées se complique. L'idée d'espace doit faire place à celle du champ de gravitation, dans lequel la trajectoire d'un rayon lumineux n'est plus nécessairement une droite. C'est, pourrait-on dire, le champ qui fait l'espace.

Aussi ne faut-il pas s'étonner que certaines cosmogonies modernes prennent la liberté de faire sur l'espace des hypothèses globales dans lesquelles il ne reste rien (ou presque) du privilège euclidien.

d) Aux dimensions atomiques enfin, le rôle que joue, que continue à jouer, le schéma de l'espace euclidien devient très problématique. Il faudrait d'ailleurs en dire autant de tout schéma spatial tridimensionnel.

La situation nous semble s'être éclaircie : le privilège de l'euclidien ne saurait être nié, mais ce privilège a ses limites. Tout n'est donc pas encore dit. La synthèse dialectique qui respecte le privilège de l'euclidien n'est donc pas l'ultime solution que puisse comporter le problème de l'espace.

184. LE THÉORÈME DE L'APPROCHE. Au paragraphe précédent, notre attention s'était portée sur le rôle que joue l'aspect expérimental dans la synthèse dialectique, lorsqu'on cherche à tirer parti des géométries non euclidiennes dans la description du monde physique. Un instant, il a semblé que cette étude allait être arrêtée nette, avant d'avoir atteint le but que nous lui avions assigné. Une appréciation plus exacte du privilège de l'euclidien nous a cependant permis de sortir de l'impasse.

Notre attention va maintenant revenir du côté théorique pour y démontrer un théorème dont nous avons encore besoin : le théorème de l'approche. Cette démonstration représentera la dernière étape de notre expérimentation géométrique.

Voici l'énoncé de ce problème :

Sur tout domaine du plan projectif, borné pour une métrique euclidienne, on peut se donner des métriques hyperboliques et des métriques elliptiques qui diffèrent de la métrique euclidienne d'aussi peu que l'on veut sur tout le domaine.

Plus précisément, prenons une métrique euclidienne sur l'ensemble des $x = x_1, x_2, x_3$ tels que $x_3 \neq 0$, donc sur l'ensemble des droites $u = u_1, u_2, u_3$ différentes de la droite 0, 0, 1. Soient $d(x,y)$ la distance de deux points x, y et $a(u,v)$ l'angle de deux droites u, v pour cette métrique. Soient aussi $d_{\pm}(r,x,y)$ et $a_{\pm}(r,u,v)$ la distance de x, y et l'angle de u, v dans une métrique non euclidienne attachée à l'absolu $x_1^2 + x_2^2 \pm r^2 x_3^2 = 0$. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème. Soit C borné pour la distance $d(x,y)$; autrement dit : il existe $D > 0$ tel que $d(x,y) < D$ pour tout couple de points x, y dans C. Si $\varepsilon > 0$, il

existe r et $d_+(r,x,y)$, $a_+(r,u,v)$, $d(r,x,y)$, $a(r,u,v)$ tels que

$$-\varepsilon < d_+(r,x,y) - d(x,y) < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_+(r,u,v) - a(u,v) < \varepsilon$$

et de même pour $d_-(r,x,y)$, $a_-(r,u,v)$, inégalités vraies uniformément sur tous les couples x, y de points dans C, et tous les couples de droites u, v qui se coupent en un point de C.

Démontrons-le d'abord pour d_+ et a_+.

On sait que les distances et angles, elliptiques ou hyperboliques, s'expriment essentiellement par le logarithme naturel d'un birapport. Mais des transformations simples permettent de les exprimer comme fonctions inverses des fonctions trigonométriques ou hyperboliques. Nous aurons ainsi :

$$d_-(r,x,y) = k \arccos \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + r^2x_3y_3}{\left[(x_1^2 + x_2^2 + r^2x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + r^2y_3^2)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

où k est une constante > 0;

$$a_+(r,u,v) = \arccos \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \frac{1}{r^2}u_3v_3}{\left[(u_1^2 + u_2^2 + \frac{1}{r^2}u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + \frac{1}{r^2}v_3^2)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant, comme nous ne considérons que des points x, y tels que $x_3 \neq 0$, $y_3 \neq 0$, nous pouvons définir leurs coordonnées « cartésiennes » X_1, X_2 et Y_1, Y_2 : $X_1 = \frac{x_1}{x_3}$, $X_2 = \frac{x_2}{x_3}$, $Y_1 = \frac{y_1}{y_3}$, $Y_2 = \frac{y_2}{y_3}$. Une transformation facile à vérifier permet d'exprimer d_+ au moyen d'arc sin et en fonction de ces coordonnées cartésiennes. On trouve

$$d_+(r,x,y) = k \arcsin \frac{1}{r}\left[\frac{d^2(x,y) + \frac{1}{r^2}\mathrm{M}(x,y)}{\left(1 + \frac{\mathrm{N}(x)}{r^2}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{N}(y)}{r^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

où

$$d(x,y) = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2}$$

est la distance euclidienne de x, y, et

$$\mathrm{M}(x,y) = (X_1^2 + X_2^2)(Y_1^2 + Y_2^2) - (X_1Y_1 + X_2Y_2)^2,$$

$$\mathrm{N}(x) = X_1^2 + X_2^2.$$

Nous allons voir que si l'on prend $k = r$, $d_+(r,x,y)$ satisfait aux conditions du théorème dès que r est assez grand.

Soit en effet C un ensemble de points borné pour la distance $d(x,y)$. Alors $\mathrm{M}(x,y)$, qui n'est d'ailleurs jamais négative, sera aussi bornée sur les couples x, y de C : il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\mathrm{M}(x,y) < \mathrm{M}$ si x, y sont dans C. De même il existe $\mathrm{N} > 0$ tel que $\mathrm{N}(x) < \mathrm{N}$ si x est dans C.

Comme $k = r$ et que arc sin est une fonction croissante lorsque son argument varie entre 0 et 1, on aura d'abord

$$d_+(r,x,y) \leq r \arcsin \frac{1}{r}\left[d^2(x,y) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

pourvu que r soit assez grand pour que

$$\frac{1}{r}\left[d^2(x,y) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

ce qui est possible puisque $d(x,y) < \mathrm{D}$.

Ayant choisi r de cette manière, remarquons maintenant que pour $0 \leq s \leq 1$ on a

$$\arcsin s \leq \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}},$$

ce qui donne, en faisant $s = \frac{1}{r}\left[d^2(x,y) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}\right]^{\frac{1}{2}}$:

$$d_+(r,x,y) \leq \left[\frac{d^2(x,y) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}}{1 - \frac{d^2(x,y)}{r^2} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^4}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{d^2(x,y) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}}{1 - \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{r}^2} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons alors la différence $d_+(r,x,y) - d(x,y) = d_+ - d$. Elle satisfait à une inégalité de la forme

$$d_+ - d \leq f(d) = a(d^2 + b)^{\frac{1}{2}} - d$$

où

$$a = \left(1-\frac{D^2}{r^2}-\frac{M}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} > 1 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{M}{r^2} \leq 0.$$

La courbe représentative de la fonction $\eta = f(\xi)$, dans un plan (ξ,η), est une branche d'hyperbole contenue dans le demi-plan $\eta > 0$. De sa propriété de convexité on peut déduire que si $A \leq \xi \leq B$, $f(\xi)$ est inférieure ou égale à la plus grande des deux valeurs $f(A)$ et $f(B)$. En particulier, comme $0 \leq d \leq D$:

$$d_+(r,x,y) - d(x,y) \leq f(d) \leq \text{Max } (f(0),f(D))$$

Or

$$f(0) = \left(1-\frac{D^2}{r^2}-\frac{M}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{M^{\frac{1}{2}}}{r}$$

et

$$f(D) = \left(1-\frac{D^2}{r^2}-\frac{M}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(D^2+\frac{M}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}-D$$

peuvent être rendus tous deux inférieurs à ε si r est assez grand :

$$d_+(r,x,y) - d(x,y) \leq \varepsilon,$$

uniformément sur les paires x, y dans C.

Il faut encore montrer qu'en prenant r assez grand

$$-\varepsilon < d_+(r,x,y) - d(x,y).$$

Mais ceci est immédiat, car de $0 \leq s \leq 1$ suit arc sin $s \geq s$, d'où l'on voit, en notant que $M(x,y) \geq 0$ et $N(x) < N$, $N(y) < N$ si x, y sont dans C, que

$$d_+(r,x,y) \geq \frac{d(x,y)}{1+\frac{N}{r^2}}$$

et donc

$$d_+ - d \geq d\left(\frac{1}{1+\frac{N}{r^2}}-1\right) = -d\,\frac{N}{N+r^2} \geq -D\,\frac{N}{N+r^2} > -\varepsilon$$

dès que r est assez grand, C.Q.F.D.

L'approximation uniforme de $a(u,v)$ par $a_+(r,u,v)$ se démontre comme suit :

Soient u, v deux droites qui se rencontrent en un point de C. Puisqu'elles

sont différentes de 0, 0, 1, ou $x_3 = 0$, on peut exiger que $u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$. Alors, comme

$$a(u,v) = \arccos\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\left[(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \arccos(u_1v_1+u_2v_2),$$

il viendra

$$a_+(r,u,v) = \arccos\frac{\cos a(u,v)+\frac{u_3v_3}{r^2}}{\left[\left(1+\frac{u_3^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{v_3^2}{r^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

De plus, si $x = x_1, x_2, x_3$ est le point d'intersection de u et v on aura $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$, donc $u_1X_1 + u_2X_2 + u_3 = 0$, $v_1X_1 + v_2X_2 + v_3 = 0$. Mais $X_1^2 + X_2^2 = N(x) < N$, donc $|u_3| < \sqrt{N}$, $|v_3| < \sqrt{N}$.

Cela étant, on voit immédiatement que

$$|\cos a_+(r,u,v) - \cos a(u,v)| < 2\frac{N}{r^2},$$

et de là que

$$|a_+(r,u,v) - \cos a(u,v)| < \arccos\left(1-2\frac{N}{r^2}\right),$$

ce qui permet de conclure rapidement.

Les démonstrations pour $d_-(r,x,y)$ et $a_-(r,u,v)$ sont très semblables à celles qui précèdent. Il faut naturellement supposer au préalable que r est déjà assez grand pour que C soit contenu dans le plan hyperbolique $x_1^2 + x_2^2 - r^2x_3^2 < 0$. On peut alors exprimer $d_-(r,x,y)$ au moyen de arsh :

$$d_-(r,x,y) = r\,\text{arsh}\,\frac{1}{r}\left[\frac{d^2(x,y)-\frac{M(x,y)}{r^2}}{\left(1-\frac{N(x)}{r^2}\right)\left(1-\frac{N(y)}{r^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et utiliser des inégalités de la forme

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \leq \text{arsh } s \leq s \qquad \text{pour } s \geq 0.$$

Enfin, la démonstration de l'approximation uniforme de $a(u,v)$ par $a(r,u,v)$, où

$$a(r,u,v) = \arccos \frac{u_1v_1 + u_2v_2 - \dfrac{u_3v_3}{r^2}}{\left[\left(u_1^2 + u_2^2 - \dfrac{u_3^2}{r^2}\right)\left(v_1^2 + v_2^2 - \dfrac{v_3^2}{r^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

est analogue à celle de l'approximation par $a_+(r,u,v)$.

185. LA TROISIÈME SYNTHÈSE DIALECTIQUE.

Le théorème de l'approche a-t-il modifié la situation ?

Rappelons comment celle-ci se présentait avant la démonstration de cet important théorème. Un instant il avait paru que l'existence de ce que nous avons nommé le privilège euclidien suffirait pour mettre fin à toute discussion. Ce privilège a-t-il été écarté ? Il ne saurait être contesté. L'examen auquel nous avons soumis l'aspect expérimental, en même temps que les techniques indispensables pour que cet aspect puisse être dégagé avec quelque précision, l'a mis au rang des faits d'expérience, mais il ne l'a pas écarté. Il a été mis à sa place dans la perspective que les trois aspects de la connaissance spatiale continuent à dominer. La justification théorique lui manque, mais il conserve ses appuis du côté intuitif et du côté expérimental. En le liant aux techniques de réalisation, nous l'avons certes relativisé, mais nous ne l'avons pas ébranlé, nous l'avons au contraire assuré.

Il est assez paradoxal de remarquer qu'en mettant en lumière les garanties réelles du privilège de l'euclidien, nous rendions une chance au non-euclidien. Nous ne songeons pas à revenir ici sur la constatation faite et bien faite que la validité d'un schéma géométrique pour la description du monde réel ne peut être que sommaire, que ce schéma soit euclidien ou non euclidien. Mais nous n'avons pas exclu (et nous ne pouvons pas exclure), l'éventualité que les techniques de réalisation sur lesquelles se fonde actuellement le privilège de l'euclidien fasse place un jour à des techniques encore plus précises. Dans ce qui est la marge d'imprécision des techniques actuelles de réalisation, les techniques nouvelles viendront peut-être un jour inscrire un profil plus finement découpé de la réalité. Ne pourrait-il se faire que celles-ci, si peu que ce soit, finissent par s'écarter des normes euclidiennes ?

En confrontant l'euclidien et le non-euclidien, en confrontant tout spécialement l'euclidien et l'hyperbolique, nous avons mis à dessein le doigt sur certains points critiques où ils diffèrent nettement l'un de l'autre. Ne pourrait-il se faire que l'écart des réalisations dont nous venons de parler puisse être en quelque sorte compensé par le passage de l'euclidien au non-euclidien ?

L'expérience dévoilerait ainsi, au-delà d'une euclidicité qui ne serait qu'approximative, une non-euclidicité à laquelle le privilège de la meilleure idonéité devrait naturellement être transféré.

C'est ainsi que les choses pouvaient être encore envisagées avant la démonstration du théorème de l'approche. Celui-ci va-t-il vraiment modifier la situation ? C'est précisément ce que nous allons voir tout à l'heure. Mais auparavant, remarquons que ce qui vient d'être dit de l'éventualité d'un privilège non euclidien dans une perspective de technique de plus en plus précise, peut être dit aussi pour une succession de techniques nous permettant d'étendre l'efficacité de nos mesures à des échelles de plus en plus grandes.

Au-delà du privilège euclidien valable tout d'abord à notre échelle, et prolongeable dans un horizon qui élargit notre horizon naturel dans des proportions imprévues, un privilège non euclidien tout aussi naturel, mais de plus fine trame, pouvait donc être imaginé. L'euclidien prendrait la signification d'une approche naturellement idoine à une certaine échelle, le non-euclidien celle d'une approche encore meilleure, correspondant au passage à une autre échelle.

Cette succession éventuelle de synthèse dialectique idoine relativement à certaines techniques et à certaines échelles pourrait-elle être déjà interprétée comme une ouverture de l'idée d'espace ? L'ouverture à laquelle nous songeons doit être quelque chose de beaucoup plus radical qu'un simple remplacement de l'euclidien par le non-euclidien dans une synthèse dialectique, même s'il fallait admettre que l'idonéité de la synthèse dialectique soit liée à ce que nous avons déjà appelé les techniques de réalisation de l'aspect expérimental.

On peut d'ailleurs se demander si le remplacement de l'euclidien par le non-euclidien dans la confrontation de l'aspect expérimental et de l'aspect théorique ne nous obligerait pas à modifier complètement l'idée que nous nous sommes faite jusqu'ici d'une synthèse dialectique. Ne faudrait-il pas renoncer à l'idée selon laquelle l'intuition reste la maîtresse de cette confrontation, et mettre ainsi notre vision naturelle de l'espace en marge d'une « vraie » conception de l'étendue spatiale ?

Pour y voir clair, le plus simple est de revenir à l'essai de constituer une troisième synthèse dialectique. La situation n'est plus la même que lors de notre premier essai : le privilège de l'euclidien n'y a plus la même portée et ne pourra plus y jouer un rôle aussi décisif. La troisième synthèse dialectique va permettre, au contraire, de coordonner à nouveau tous les éléments que notre analyse a dégagés.

En bref, la nouvelle situation de départ pour la constitution de la synthèse dialectique est la suivante :

Il reste vrai que la géométrie euclidienne convient tout particulièrement (de par la structure de notre intuition spatiale) à notre intégration efficace dans le

« monde extérieur », mais cette préférence ne nous est plus imposée avec une nécessité sans condition. Entre certaines limites, nous avons réussi à mettre notre propre intuition hors jeu. Cela nous a permis d'établir, entre l'aspect expérimental et l'aspect théorique, entre le monde mesurable et l'idée ouverte de la géométrie, un contact plus immédiat, un contact que les préavis (les préjugés) de notre vision naturelle ne dominent plus sans réserve. Dans cette mise en contact, et pour tout domaine de la réalité qui aurait trouvé sa description adéquate (sommairement, mais effectivement adéquate dans la marge de précision adoptée ou acceptée) dans un domaine borné de l'espace euclidien, la géométrie hyperbolique (par exemple) peut rendre les mêmes services. Non par un artifice qui aurait plié la réalité extérieure à la structure de l'espace hyperbolique, mais par une liaison que nous sommes libres d'établir entre l'euclidien et l'hyperbolique. Encore une fois : si une portion finie de l'espace expérimental peut être prise comme signification extérieure d'une portion bornée de l'espace mathématique euclidien, elle peut être également prise comme signification extérieure d'une portion bornée de l'espace mathématique hyperbolique, sans que l'expérience permette de décider en faveur de l'une ou de l'autre éventualité, les différences éventuelles ne jouant plus aucun rôle, pour l'une ou l'autre des deux raisons suivantes : soit que les différences éventuelles soient inférieures aux marges d'erreur inhérente aux manipulations et aux observations envisagées, soit que (et ceci est encore plus décisif) le passage à une échelle, à un autre horizon expérimental, à l'horizon atomique, par exemple, ne fasse que révéler le caractère sommaire et irrémédiablement approximatif de l'un et de l'autre des schémas géométriques envisagés, et les rende pratiquement indiscernables l'un de l'autre.

L'équivalence pratique entre les deux schémas géométriques qui peut être réalisée sur tout domaine borné ne peut naturellement pas s'étendre du même coup à tout l'espace, les différences existant entre les deux géométries « entières » s'y opposant. Ne pourrait-il arriver qu'une observation à très grande échelle fasse incliner la balance à nouveau d'un côté plutôt que de l'autre ? C'est là une tout autre question. À très grande échelle, le problème de l'espace rencontre le problème de la gravitation universelle, et ne peut plus en être séparé. L'idée de l'espace subit alors une modification profonde dont nous ne pouvons pas poursuivre l'étude ici.

Quel est maintenant le bilan de notre analyse ? Dans les circonstances dont il vient d'être question (et qui comportent, nous l'avons déjà dit, une certaine « désinvolture » vis-à-vis de notre intuition naturelle) le schéma euclidien peut donc parfaitement être remplacé, dans le rôle qu'il occupait dans l'horizon (T), par le schéma hyperbolique. Entre l'aspect expérimental et l'aspect théorique, le schéma axiomatique institue à nouveau (comme dans la seconde synthèse dialectique) une analogie schématique.

Dans la synthèse qui se reconstitue sous les auspices du schéma axiomatique hyperbolique, l'intuition a été mise à l'écart. Sa place restera-t-elle vide ? Il n'en est rien. Nous avons déjà vu comment à l'intérieur même de la géométrie hyperbolique, une nouvelle intuition de caractère géométrique se reconstitue, qui pour une part reste fondée dans l'intuition naturelle (et même précisée dans le sens euclidien) et pour une autre part s'en dégage, s'en sépare, et finit même par s'y opposer. Mais l'intuition dont nous voulons parler ici n'est pas seulement celle qui reste agissante dans l'horizon théorique. C'est au contraire celle qui, dans la synthèse dialectique (aussi bien d'ailleurs la seconde fois que la première), établissait le lien dans notre vision du monde entre l'aspect expérimental et l'aspect théorique. Eh bien ! même la place de celle-ci ne reste pas vide. Ce n'est pas, il est vrai, l'intuition originale qui y rentre sans avoir été en rien modifiée. C'est une intuition reprise en conscience et dialectisée de la façon suivante :

a) Dès le chapitre II, l'intuition avait perdu pour nous son caractère de témoignage absolu sur le monde et sur nous-mêmes. Elle porte en elle, disions-nous déjà, la structure de notre organisation mentale qui nous assure une connaissance à priori efficace à notre échelle, mais sommaire dans un horizon d'une contexture plus « fine » par rapport à notre horizon naturel.

b) Sur tout le domaine borné où la synthèse de l'aspect expérimental et de l'aspect théorique a pu être reconstituée, cette intuition peut être réintégrée, ce qu'elle a d'absolument contraignant dans notre vision naturelle devant être modéré par la conscience que nous avons prise de la relativité de notre propre organisation mentale naturelle.

c) Mais notre intuition naturelle ne peut être contrainte à ne s'exercer que dans un domaine borné. La vision de l'espace qu'elle fait nôtre ne comporte pas de limites. Certes, il ne nous est pas possible de nous en défaire comme d'un simple vêtement ou d'un simple instrument : elle est *inaliénable*. Cela ne signifie pas qu'elle soit à jamais irrévisable. Elle l'est, au contraire, dans le sens suivant : rien ne nous est interdit de réinterpréter sous une autre forme ce qu'elle nous présente et qu'elle ne peut pas ne pas nous présenter dans le cadre d'une connaissance élargie, mise à l'épreuve et, s'il le faut, révisée en claire conscience. L'espace de notre intuition est ainsi conservé en tant que forme inaliénable de notre saisie du monde extérieur, confirmée dans son idonéité relative, mais suspendue quant à ses interprétations trop strictes ou trop lointaines.

d) Nous sommes enfin capables (nous ne le savions pas d'avance et il nous a fallu l'apprendre) de superposer à notre intuition primaire, en prenant même appui sur elle pour nous en écarter, une vision secondaire de l'espace, faite d'une étoffe intellectuelle plus consciemment tissée, capable de doubler la première sans entrer en désaccord avec elle dans notre horizon naturel, mais

capable aussi d'en suspendre la valeur et de proposer une autre forme de l'espace, une autre structure de l'étendue.

Avec cet aspect intuitif « dialectisé », qui porte les traces plus ou moins profondes de toute l'expérience géométrique depuis les Grecs jusqu'à nous, la synthèse dialectique entre les trois aspects peut être refaite, sous l'idée dominante retrouvée d'une concordance schématique.

186. L'OUVERTURE DE L'IDÉE D'ESPACE.

Qu'entendons-nous par « ouverture de l'idée d'espace » ? Qu'est-ce qu'une notion ouverte, qu'une discipline ouverte, qu'une théorie de la connaissance ouverte ?

Revenons à l'idée de géométrie. À quel propos, dans quelles circonstances avons-nous parlé de son ouverture ? Au moment où nous procédions à l'édification axiomatique de la géométrie euclidienne, il était tout naturel de penser que c'était là le moyen de donner à la géométrie son statut rationnel définitif. La procédure axiomatique était alors liée dans notre esprit à l'idée d'une géométrie univoquement déterminée. Il s'agissait de donner à cette géométrie toute sa précision, toute sa pureté. Nous pouvions nous imaginer qu'une fois ce but atteint, l'idée de géométrie serait réalisée dans sa perfection, serait achevée, et se fermerait sur cet achèvement.

La pratique de l'axiomatisation devait cependant nous conduire à un tout autre résultat. Sous la pression de l'analyse axiomatique, l'idée primitive de géométrie s'est scindée, donnant tout d'abord naissance à deux variantes, la variante euclidienne et la variante hyperbolique.

Nous ne referons pas ici le chemin qui nous a menés ensuite à la variante elliptique. Nous ne reviendrons pas non plus sur la possibilité d'affaiblir l'idée de géométrie pour en faire par exemple une géométrie non archimédienne ou une géométrie non pascalienne, etc.

Voici ce que nous avons à retenir ici. Il est clair qu'au moment où nous nous engagions dans la procédure axiomatique, l'idée que nous nous faisions de la géométrie n'était pas encore achevée, qu'elle n'avait pas encore atteint le maximum de sa spécificité. La chose n'est pas douteuse, puisque nous avons nous-mêmes réussi, à partir d'une première réalisation de la géométrie et par l'application d'une technique mentale adéquate, à engendrer trois schémas géométriques nettement différenciables. L'idée originelle de géométrie s'est ouverte comme un éventail vers les spécifications dont nous savons maintenant qu'elle était capable.

S'il le fallait, cet exemple prendrait à lui seul la signification d'une démonstration d'existence. Si nous ne le savions pas, il nous montrerait qu'il faut compter avec l'existence d'idées, de notions, de concepts normalement utilisables, sans avoir atteint ce qu'on pourrait appeler leur état d'achèvement.

Ce sont là les éléments de connaissance que nous disons ouverts : ces éléments sont encore capables d'évoluer dans le sens d'une plus grande précision, d'une meilleure efficacité, d'une structure plus finement détaillée, etc.

Pour qualifier un concept ouvert, nous n'exigeons pas qu'il soit susceptible d'un éventail entier de déterminations ultérieures. Le point essentiel est qu'il y ait progression (et même, en un certain sens, progrès) d'une spécification antérieure à une spécification ultérieure. À chaque passage de ce genre, il y a, disons-nous, ouverture de fait. Et si la progression s'arrête et se stabilise en un endroit efficace dans un certain horizon de réalité, nous disons qu'il y a fermeture du concept relativement à cet horizon.

Rien ne permet d'affirmer qu'une fermeture de cette sorte équivale à un achèvement définitif. Il peut arriver au contraire que la mise en œuvre de nouvelles techniques (au sens large, dont les techniques mentales ne sont pas exclues) dénotent une fermeture et appellent une nouvelle ouverture. Il saute aux yeux, une fois ces définitions données, qu'un grand nombre de concepts scientifiques ont subi la loi des ouvertures et des fermetures successives, dans leur évolution historique. BACHELARD a donné le nom de profil épistémologique à l'ensemble des spécifications correspondantes, compte tenu de leurs relations respectives. Dans la synthèse dialectique, ces diverses déterminations entrent en jeu concerté pour permettre l'œuvre complète de la connaissance.

Le qualificatif ouvert s'étend presque de lui-même aux théories et aux disciplines tout d'abord qui font usage de concepts de notions ouvertes, puis aux systèmes de connaissances qui sont capables de mutations dans leur structure ou leur signification, analogues à celles dont il vient d'être question.

Une notion qui est en situation dialectique doit avoir subi au moins une ouverture et une fermeture. Nous venons de le voir au paragraphe précédent, l'idée d'espace est précisément en situation dialectique. Cette idée était donc primitivement une idée inachevée, une idée ouverte (en puissance, pourrait-on dire) dont l'ouverture s'est réalisée dans la troisième synthèse dialectique.

Il suffit d'ailleurs de revenir aux circonstances particulières de cette troisième synthèse pour s'en persuader. C'est maintenant l'idée d'espace qui a perdu son univocité. En principe, chacun des schémas géométriques qui réalisent maintenant l'aspect théorique de la géométrie peut être admis à jouer son rôle abstrait dans la synthèse dialectique. À chacun de ces choix correspond une spécification correspondante de l'idée d'espace : celle-ci donne donc lieu à un profil épistémologique en éventail.

L'ouverture de l'idée d'espace ne saurait être plus clairement illustrée.

Nous avons dit maintes fois : l'étude géométrique qui vient de se terminer par le résultat qui précède avait une double fin, une fin immédiate et une fin plus lointaine.

La première était de traiter réellement, sans lacune, sans marquer les

difficultés, le problème de l'édification d'une géométrie. Ce problème s'est révélé complexe : il est utile, pensons-nous, d'en éclairer les différents aspects. Mais c'est notre seconde intention qui a retenu et qui retient encore notre plus grande attention. Elle ne pouvait d'ailleurs se réaliser qu'à travers la première. C'était, et c'est encore, de distinguer, sur l'exemple de la géométrie, les grandes lignes d'une théorie de la connaissance qui soit adéquate à la connaissance réelle — les grandes lignes d'une connaissance qui soit éprouvable dans la connaissance éprouvée. Avons-nous obtenu, sur ce second point, les résultats espérés ? Sommes-nous en mesure de formuler nos conclusions ? Nous les reporterons après les quelques considérations historiques qui vont suivre.

187. L'IDÉE DE L'ESPACE EN SITUATION DIALECTIQUE. Au moment où notre étude s'est engagée, l'intuition nous était donnée comme une instance dont rien ne nous permettait de contester ou de relativiser les jugements. Une assertion garantie par l'intuition se présentait à notre esprit comme une assertion valable inconditionnellement. Nous n'aurions pas songé à la mettre en cause, les moyens de le faire nous auraient d'ailleurs manqué.

Au point où nous en sommes, la situation est toute différente. Le statut méthodologique de l'intuition est maintenant fixé par la façon dont elle entre dans la troisième synthèse dialectique.

D'étape en étape, notre étude a fait émerger les conditions d'une analyse à la fois plus libre et mieux outillée. Le résultat de cette analyse ne pouvait guère être prévu, elle devait, certes, confirmer l'inaliénable validité de notre connaissance intuitive, mais en tant que connaissance sommaire — connaissance inscrite d'avance en nous mais dans laquelle n'est pas inscrite d'avance une structure dernière des choses étendues. Elle devait surtout nous mettre en possession d'une intuition géométrique secondaire, venant prendre place en retrait de notre intuition primitive de l'espace, capable de suppléer cette dernière dans l'édification rationnelle des schémas géométriques, capable même de s'écarter de notre intuition naturelle et d'en prendre, sur certains points, le contre-pied.

Mais nous ne faisons que répéter ici ce que nous avons déjà dit plusieurs fois au cours des paragraphes précédents. Insistons plutôt sur un autre point qui n'a pas été mis jusqu'ici suffisamment en évidence. C'est que l'intuition primitive n'a jamais cessé d'être au nombre des moyens grâce auxquels notre expérience géométrique a pu prendre son départ et se poursuivre. C'est en fonction même de l'inaliénabilité de nos vues primitives que nous avons trouvé accès à cette intuition secondaire dont nous avons montré qu'elle pouvait, par exemple, nous guider dans l'édification autonome de la géométrie hyperbolique. C'est en prenant appui sur l'intuition primitive que nous avons pu nous en écarter.

Nous nous en sommes écartés, mais nous n'avons pas la possibilité de la renier totalement. Nous n'avons pas la faculté de nous en débarrasser comme d'un vêtement gênant qui ne serait plus à notre taille. Elle reste le fondement de notre vision de l'espace, même quand nous imaginons que le non-euclidien pourrait suppléer l'euclidien dans la synthèse dialectique. Suivant un circuit qui se recoupe, elle reste même la garantie plus ou moins immédiate et plus ou moins lointaine de l'intuition géométrique qui sait s'infléchir aux évidences non euclidiennes.

Par l'insistance de notre effort, nous nous sommes donné le spectacle d'une activité mentale qui, s'exerçant dans les conditions de sa plus stricte authenticité, remet en cause les conditions de sa propre validité — d'une activité qui ébranle (qui relativise) son propre fondement pour assurer son efficacité, pour rester ouverte à l'éventualité de son propre progrès.

Nous avons vu cette activité évoluer et s'engager avec efficacité dans une variante assez éloignée de ce qu'elle était primitivement. Mais (et c'est là le point crucial) la variante nouvelle ne se substitue pas en l'effaçant à la variante à partir de laquelle elle s'est développée. La variante première reste en fonction, inaliénablement en fonction. Elle garde sa valeur, son applicabilité sommaire (à peine nuancée par une action en retour) dans l'horizon de sa validité originelle. Au stade évolué, la connaissance n'est pas épurée de la première variante que la seconde aurait simplement et avantageusement remplacée. Le sens que l'une et l'autre prennent en définitive s'établit par un va-et-vient entre l'une et l'autre.

En un mot, la signification de la variante évoluée ne cesse pas d'être garantie par la validité sommaire de la variante intuitive.

Une activité qui s'est mise en situation dialectique est-elle perdue, compromise et désormais indigne de toute confiance ? La situation dialectique n'est-elle pas l'équivalent d'un cercle vicieux ? Dans la perspective de la connaissance ouverte, la situation dialectique n'arrête pas le progrès de la connaissance. Pour s'en convaincre et pour concevoir comment la chose est possible, il suffit de ne pas laisser se perdre l'essentiel de l'expérience géométrique de nos deux derniers chapitres. L'intuition prise au « piège » dialectique s'est *dialeclisée*. Son rôle naturel ne pouvant être abandonné (elle-même étant un élément inaliénable de la prise de connaissance de l'espace), elle s'est doublée d'une intuition plus libre, moins étroitement préformée.

L'approfondissement de la connaissance trouve alors son moyen non pas dans une sommaire et brutale éviction de l'une des variantes par l'autre, mais dans un jeu d'identifications et de distinctions, de concordances et de suppléances, de limitations et d'extensions dont il serait vain de vouloir énumérer toutes les nuances.

Ce jeu est partie intégrante de la synthèse dialectique. Demandons-nous

maintenant quelle est l'idée dominante de notre troisième synthèse dialectique. Peut-elle se concevoir et s'exprimer aussi simplement que les deux premières fois ? Il est clair que son but doit toujours être d'établir des liaisons efficaces entre les trois aspects. Mais suffit-il encore de dire que ces liaisons se font sous forme d'analogies et de concordances schématiques, par l'intermédiaire d'un schéma commun, le schéma axiomatique A ? La situation n'est-elle pas devenue plus complexe, et presque inextricable, du fait de la dialectisation de l'intuition, de l'ouverture de l'idée de géométrie théorique, et des répercussions inévitables sur la conception et la constitution de l'aspect expérimental ?

Nous ne chercherons pas une formule qui tienne compte de tous les détails, préférant souligner un certain caractère *opératoire* du rapport de l'abstrait au concret, du schéma à sa signification extérieure, à ce qui peut prendre forme de réalité correspondante.

Du côté de l'abstrait, du schéma, l'ouverture de l'idée de géométrie nous a conféré une certaine liberté opératoire dans l'horizon axiomatique. Les essais y sont possibles, les uns annulés plus ou moins rapidement par la rencontre d'une contradiction, les autres conduisant à une série de variantes de ce qui peut prétendre au titre de « géométrie abstraite » ou de « géométrie mathématique ».

Tout à l'heure (on l'aura certainement remarqué) nous disions de notre vision naturelle de l'espace qu'elle est inaliénable, mais qu'elle n'est cependant pas hors de portée de l'expérience géométrique, d'une expérience capable de se retourner vers elle et de lui faire subir (en nous) une certaine évolution. Nous aurions pu tout aussi bien dire que, bien qu'inaliénable, elle n'est pas irréformable.

Depuis longtemps, notre cheminement tendait vers cette affirmation. Il ne servirait à rien de feindre qu'elle vient de s'imposer à nous, tout à fait inopinément — et qu'une bonne partie de sa valeur provient de ce fait. C'est au contraire une affirmation vers laquelle nous nous sommes patiemment avancés, la préparant dans toute la mesure du possible. La préparant psychologiquement, comme un argument choisi dans le seul but de convaincre ? Non ! Venue trop tôt, l'affirmation aurait pu paraître hasardeuse, paradoxale et même arbitraire. Venue avant les faits qui la justifient, elle aurait pu être mise en doute, elle l'aurait été fort probablement (et c'est là le point sur lequel nous insistons tout particulièrement), ce n'est plus une affirmation plus ou moins plausible ou plus ou moins contestable, c'est une simple constatation. Ce que nous affirmons, c'est ce que nous avons nous-mêmes observé — non sans avoir, certes, provoqué nous-mêmes les circonstances et les conditions de l'observation. Mais il en est de même dans toute expérimentation : pour être valable, il suffit qu'elle soit répétable et contrôlable. Celle dont nous nous réclamons ici est ouverte à chacun.

D'une activité qui, s'exerçant dans la ligne même de son efficacité, finit par mettre son propre fondement en cause, sans pouvoir cependant y renoncer (sans disposer d'un fondement de rechange), nous dirons qu'elle est en *situation dialectique*.

C. La crise moderne de la légitimité en géométrie et son dénouement

188. INTRODUCTION. Il ne s'agit pas, dans les quelques considérations historiques qui vont suivre, de présenter un raccourci du développement de la géométrie, des premières démonstrations de THALÈS aux *Éléments* d'EUCLIDE, tout d'abord, puis de ces *Éléments* jusqu'aux travaux de BOLYAI et de LOBATSCHEFSKI (c'est-à-dire jusqu'aux premières édifications de la géométrie hyperbolique), et enfin de ces derniers jusqu'aux géométries de notre temps. Ce raccourci aurait, certes, sa valeur, mais c'est un autre but que nous visons. Si le cadre de ce travail le permettait encore, ce n'est pas l'histoire de la géométrie sous son aspect théorique que nous songerions à refaire, mais celle des doctrines préalables (le plus souvent implicites) selon lesquelles la vérité géométrique s'accorde avec l'aspect physique et avec l'image que les sens nous procurent de celle-ci. Cette histoire est à faire : nous ne pourrons faire mieux que d'en effleurer quelques points, notre intention étant seulement de mettre les vues auxquelles notre étude nous a conduits, en regard d'autres vues auxquelles une certaine importance historique ne peut pas être contestée. Nous ne croyons pas nécessaire de remonter jusqu'à la géométrie des Grecs : nous ne pourrions qu'en souligner l'esprit de rigueur dont la théorie des proportions (d'EUDOXE) nous donne un exemple si frappant.

Pour les Grecs, la géométrie sembla avoir été le modèle même à partir duquel s'est formée l'idée d'une connaissance purement rationnelle.

De ce fait l'idée du vrai qui doit s'imposer avec nécessité en géométrie (aussi bien dans les axiomes que dans les théorèmes) prend une telle prédominance que l'aspect expérimental de ces mêmes vérités en est dévalorisé, qu'il n'apparaît plus comme tel.

La géométrie des Grecs est l'exemple privilégié (elle le reste encore aujourd'hui dans une large mesure) d'une science qui ne devrait rien à l'expérience, si ce n'est à l'expérience de l'esprit qui ne serait lié que par sa propre loi.

Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'examiner ici à nouveau la doctrine géométrique des Grecs : nous l'avons déjà dit, le progrès même de la géométrie rationnelle devait en faire ressortir l'insuffisance.

Il nous paraît plus intéressant de mettre en face des éléments d'EUCLIDE, les éléments de CLAIRAUT qui, deux mille ans plus tard, devaient en prendre, en un certain sens, le contre-pied.

189. CLAIRAUT. Les éléments de géométrie de CLAIRAUT parurent en 1753. Dès les premières lignes, la préface ne laisse aucun doute sur les intentions de l'auteur. « J'ai pensé, écrit CLAIRAUT (préface, p. 3), que cette science, comme toutes les autres, devait être formée par degrés, que c'était vraisemblablement quelques besoins qui en avaient fait faire les premiers pas et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des commençants puisque c'étaient des commençants qui les avaient faits.

» ... On me reprochera peut-être, continue CLAIRAUT (p. 9), en quelques points de ces éléments de m'en rapporter trop aux témoignages des yeux et de ne pas m'attacher assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire de pareils reproches d'observer que je ne passe légèrement que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte surtout dans les commencements où ils se rencontrent plus souvent que ceux qui avaient de la disposition à la géométrie se plaisaient à exercer un peu leur esprit et qu'au contraire ils se rebutaient lorsqu'on les accablait de démonstrations pour ainsi dire inutiles. »

Les quelques lignes que nous venons de citer permettent déjà de distinguer, chez CLAIRAUT, une doctrine géométrique totalement différente de celle que la tradition attribue à EUDOXE ou à un EUCLIDE. La géométrie, y est-il dit, est une science qui se construit par degrés. Le premier degré est celui du débutant, qui tire des lignes, qui trace des cercles, qui mesure comme tout le monde mesure, avec des unités ou des échelles. Faut-il démontrer au débutant ce qu'il voit de lui-même, ce qui lui saute aux yeux, ce que le simple maniement des instruments lui apprend sans peine ? Pourquoi le ferait-on, la chose n'est-elle pas superflue ?

Ne cherchons pas à affaiblir les affirmations de CLAIRAUT. Ce que l'on fait faire aux débutants, ce n'est pas un simple préambule pédagogique, ayant pour but de préparer les « vraies » démonstrations. La confiance du débutant dans les vérités géométriques qu'il aperçoit ou découvre n'a pas seulement une valeur heuristique relativement à une connaissance plus sûre, du second degré des mêmes vérités; non, la connaissance géométrique qui vient ainsi aux débutants mérite toute sa confiance.

Mais lorsque le débutant trace deux cercles et constate, par exemple, que les cercles qu'il a tracés se coupent en deux points, cela veut-il dire que chacun des deux petits espaces où les deux cercles se rencontrent sont de véritables points géométriques ? S'il fallait l'admettre, que de difficultés il faudrait surmonter. Ce petit espace, une loupe en ferait une tache aux bords irréguliers, une telle tache ne répond certainement pas à l'idée que le débutant se fait d'un point. C'est donc qu'en regardant les figures qu'il a réellement tracées, il pense à d'autres figures d'une nature plus subtile, et lorsqu'il regarde les premières de ses yeux attentifs, ce sont des constatations relatives aux secondes qu'il énonce.

Le débutant, d'ailleurs, ne se bornera pas à construire, à regarder et à mesurer. Il sera bientôt entraîné, presque sans qu'il le veuille, dans le raisonnement, dans l'exercice de la déduction. Pour le dire en un mot, c'est donc que, au premier degré de la géométrie telle que la conçoit CLAIRAUT, les trois aspects de la géométrie, que nous avons distingués, restent confondus. C'est surtout que ces trois aspects se raccordent ou se recouvrent, se complètent ou se suppléent dans une équivalence de vérité qui n'est jamais mise en doute. C'est donc, implicite, il est vrai, la doctrine préalable qui préside et que nous avons appelée notre première synthèse dialectique.

Mais comment sera-t-il possible, s'il en est bien ainsi, d'aborder un deuxième degré de la connaissance géométrique, un degré qui ne soit pas celui du débutant ? Nous reviendrons tout à l'heure sur la question. Mais auparavant, citons encore quelques passages à l'appui de ce qui vient d'être dit.

En lisant CLAIRAUT on se défend difficilement de l'impression que le sens de la rigueur observée par les Grecs s'est complètement perdu. Les modernes l'ont retrouvé. Mais du temps de CLAIRAUT, on ne semble plus guère comprendre à quel souci cette rigueur répondait. Nous ne ménageons pas notre admiration, par exemple, à la stricte théorie des proportions grâce à laquelle le géomètre grec avait fini par surmonter les difficultés que lui opposaient les rapports incommensurables. Pour CLAIRAUT, cette stricte démonstration n'a guère de valeur, le sens de cette valeur semble s'être effacé. Pourquoi EUCLIDE a-t-il mis tant de soin à l'établir ? La réponse est d'une simplicité qui nous surprend :

« Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la géométrie comme la logique eût le secours des raisonnements en forme pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et à dégoûter les lecteurs. »

L'idée de CLAIRAUT (et cette idée n'est, certes, pas complètement fausse) est que la géométrie doit être traitée tout d'abord comme une *géométrie naturelle*, comme un ensemble d'« idées sensibles » et de procédures de simple bon sens, qu'on n'a aucune peine à acquérir lorsqu'on entend les faire servir aux buts tout pratiques de la mesure des distances ou des terrains.

Aussi la première partie des éléments de géométrie de CLAIRAUT s'intitule-t-elle : *Des moyens qu'il est le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains*.

Et voici comment le texte commence; texte fait pour les débutants, selon l'image (que, d'ailleurs, l'histoire de la géométrie ne confirme guère) de ce que CLAIRAUT pensait avoir été nécessairement l'activité des débutants dans cette science :

« Ce qu'il semble qu'on a dû mesurer d'abord, ce sont les longueurs et les distances.

» I. Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédiant que fournit une sorte de géométrie naturelle est de comparer la longueur d'une mesure connue à celle de la longueur qu'on veut connaître.

» II. À l'égard de la distance, on voit que, pour mesurer celle qui est entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, et que c'est sur cette ligne qu'il faut porter la mesure connue, parce que toutes les autres faisant nécessairement un détour plus ou moins grand, sont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

» III. Outre la nécessité de mesurer la distance d'un point à un autre, il arrive souvent qu'on est obligé de mesurer la distance d'un point à une ligne... Il est clair que... pour mesurer la distance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites *da*, *db*, etc., qu'on peut tirer du point *d* à la droite *ab*. Or, il est aisé de voir que cette ligne la plus courte dont on a besoin est la ligne *dc* qu'on suppose ne pencher ni vers *a* ni vers *b*. C'est donc sur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire qu'il faut porter la mesure connue pour avoir la distance *dc* du point *d* à la droite *ab*... Il était donc nécessaire qu'on eût une méthode pour tracer les perpendiculaires.

» IV. On avait encore besoin d'en tracer dans une infinité d'autres occasions... »

Voici d'ailleurs (p. 5) comment CLAIRAUT justifie la construction d'une perpendiculaire. Il s'agit de la perpendiculaire *bd* à *bc* sur la droite *ab*.

« Pour avoir le point D, on pourrait le chercher en tâtonnant. Mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit. Il veut une méthode qui l'éclaire. La voici :

» Prenez une commune mesure, une corde par exemple ou un compas d'une ouverture déterminée suivant que vous travaillerez ou sur le terrain ou sur le papier. Cette mesure prise, vous fixerez au point A ou l'extrémité de la corde ou la pointe du compas et faisant tourner l'autre point ou l'autre extrémité de la corde vous tracerez l'arc *b-d-m* puis, sans changer de mesure vous opérerez de même par rapport au point *b* et vous décrirez là *q*, *d*, *m* qui, coupant le premier au point *d* donnera le point cherché.

» Car, puisque le point D appartient aux deux arcs *b-d-m* et *q-d-n* décrit au moyen d'une mesure commune sa distance au point A est égale à sa distance au point B, donc *b-d* ne penchera ni vers *a* ni vers *b*, donc cette ligne sera perpendiculaire sur *a-b*. »

Il n'est pas nécessaire, pensons-nous, de multiplier les exemples. Ceux qui précèdent suffisent. Une bonne partie de ce qui, dans les manuels élémentaires d'aujourd'hui, est jugé digne des démonstrations, est abandonnée, ici à l'exercice du bon sens le moins analysé, informateur et guide de la géométrie naturelle.

Selon CLAIRAUT, disions-nous plus haut, la géométrie doit être édifiée par degrés. Si la géométrie naturelle en représente le premier degré, quels en seront alors le second ou le troisième degré ?

Il ne faudrait pas croire, nous l'avons d'ailleurs déjà dit, que le but de CLAIRAUT ait été d'édifier une géométrie purement intuitive ou purement expérimentale. Le bon sens seul ne suffit pas à établir de façon satisfaisante tous les énoncés géométriques. Il arrive un moment où l'œuvre du raisonnement devient au moins aussi importante que le témoignage de nos yeux ou le jugement du bon sens. Le théorème de PYTHAGORE, par exemple, n'est pas un simple énoncé de bon sens.

Mais, dans les cas où intervient le rapport de deux longueurs, CLAIRAUT ne s'élève pas d'un seul coup au cas où ces deux longueurs sont incommensurables entre elles. Au contraire, comme dans nos manuels de géométrie, d'ailleurs, ils ne traitent tout d'abord que le cas où les deux longueurs admettent une commune mesure.

La géométrie où l'aspect théorique reprend ainsi une bonne partie de son importance pourrait être la géométrie du second degré.

Mais CLAIRAUT ne pouvait naturellement pas laisser de côté sans s'en occuper, le cas irrationnel. La géométrie qui accepte l'obligation de le traiter *avec rigueur* pourrait être la géométrie du troisième degré. Mais que voudront dire ici les mots avec rigueur ? La façon dont CLAIRAUT pense pouvoir se dispenser des démonstrations « qui n'avaient d'autre but que de faire taire les sophistes » est des plus instructives.

Ainsi, pour les figures semblables, CLAIRAUT ne démontre tout d'abord la proportionalité des lignes correspondantes que dans le cas où ces lignes admettent une commune mesure. Cette démonstration n'offre aucune difficulté. Comment va-t-il l'étendre au cas des lignes incommensurables ? Voici, sur un exemple, le raisonnement qui doit, à son avis, le lui permettre avec la plus entière rigueur. Mais, de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelques soupçons sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionalité des figures semblables. On a vu qu'en comparant ces figures, nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle qui pouvait également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui maintenant paraît devoir être limitée à cause de ce qui vient d'être dit.

Il faut donc que nous revenions sur nos pas et que nous examinions si notre proposition, pour être vraie, n'aurait pas besoin de quelques modifications.

Reprenons tout d'abord ce qui est dit dans l'article 39 de la première partie et voyons s'il est exactement vrai que les triangles tels que *abc*, ABC dont les angles sont les mêmes, aient leurs côtés proportionnels. Supposons, par exemple, que la « base commune » étant *ab*, celle du second soit une droite AB

égale à la diagonale d'un carré dont *ab* soit l'un des côtés. Et cherchons si, dans cette supposition, le rapport de AC à *ac* sera le même que celui de AB à *ab*.

Quoique, selon ce que nous avons vu, quelque grand que soit le nombre des parties qu'on supposerait arbitrairement dans *ab*, AB ne pourrait jamais contenir un nombre exact de ces parties, il est cependant aisé de s'apercevoir que plus ce nombre sera grand, plus AB approchera d'être mesuré exactement avec les parties de *ab*. Supposons *ab* divisé en 100 parties, celles que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 et 142. Contentons-nous de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que AC contiendra aussi 141 des parties de *ac*. Supposons ensuite que *ab* soit divisé en mille parties. Ce que AB contiendra des parties de *ab* sera entre 1414 et 1415; n'en prenons que 1414 et négligeons encore le reste. On trouvera de même que AC contiendra 1414 des millièmes parties de *ac* et qu'en général AC contiendra toujours autant de parties de *ac* avec un reste que AB contiendra de parties de *ab* avec un reste.

De plus, les restes, comme nous venons de l'observer, seront d'autant plus petits que le nombre des parties de *ab* sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger si on imagine la division de *ab poussée jusqu'à l'infini*.

Donc, on pourra dire alors que le nombre de parties de *ac* que contiendra AC égalera le nombre des parties de *ab* que contiendra AB et qu'ainsi AC sera à *ac* comme AB à *ab*.

Donc, nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés aient une commune mesure, soit qu'ils n'en aient pas. Il y a, dans cette démonstration, deux points qui nous paraissent mériter d'être relevés : le premier, c'est qu'on y suppose le rapport de la diagonale du carré aux côtés (c.-à-d. $\sqrt{2}$) donnée sous la forme d'un développement décimal illimité. Pour que le cas particulier ainsi traité puisse être envisagé comme le modèle du cas général, il faut admettre que le rapport de deux longueurs incommensurables quelconques aient un nombre qui admet également un développement décimal illimité bien déterminé. Partant de cette hypothèse (qui appartient aujourd'hui et qui appartenait peut-être déjà à un certain bon sens analytique), il est naturellement facile de transformer la démonstration de CLAIRAUT en une démonstration rigoureuse à notre sens par un passage à la limite.

Le second point est, naturellement, que ce passage à la limite n'a pas été fait. Il est remplacé par le recours à l'égalité de deux nombres infiniment grands de parties infiniment petites, la supposition étant implicitement faite que l'on sait exactement, rigoureusement, ce que l'égalité de deux nombres de ce genre signifie. (Il est assez remarquable que les géomètres grecs aient aussi essayé cette idée et l'aient repoussée pour manque de rigueur.)

La troisième partie de l'ouvrage de CLAIRAUT traite de la mesure des figures

circulaires et de leurs propriétés.

« Les terrains, dit CLAIRAUT, et en général les espaces dont il s'agit de déterminer la mesure, ne sont pas toujours terminés par des lignes droites. »

Comment, par exemple, déterminer la longueur d'une ligne courbe ? CLAIRAUT explique comment on pourrait remplacer cette ligne par un polygone aux côtés suffisamment petits pour qu'en prenant la longueur de celui-ci au lieu de la longueur de celle-là on ne fasse plus aucune erreur appréciable. Puis il ajoute : « Mais les géomètres ne s'accommoderaient guère de cette sorte d'opération : ils n'en veulent que de rigoureuses. »

Comme dernier emprunt aux éléments de CLAIRAUT, nous allons encore indiquer comment l'aire du cercle y est définie et comment le nombre π s'y introduit.

« Supposons d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à mesurer. On observera, en y inscrivant un polygone régulier que plus ce polygone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or, on a vu que l'aire de cette figure est égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothème que le polygone a de côtés ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour mesure le produit du contour entier par la moitié de l'apothème, donc *puisqu'en poussant jusqu'à l'infini* le nombre des côtés du polygone, son aire, son contour, son apothème égaleront l'aire, le contour et le rayon du cercle, la mesure du cercle sera le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

» Il ne s'agit donc que d'avoir le rayon et la circonférence. À l'égard du rayon, il est aisé de le trouver. Il n'en est pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle d'un fil, ce qui, en beaucoup d'occasions, suffit pour la pratique.

» Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mesurer géométriquement la circonférence du cercle, c'est-à-dire à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent-millièmes, à des millionièmes près et même on en approche tant qu'on veut sans que pour cela on puisse le déterminer rigoureusement...

» Au reste, il est clair que si l'on savait exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on saurait celui de toutes les autres circonférences à leur rayon. Ce rapport devant être le même dans tous les cas.

» Cette proposition paraît si simple qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée, puisqu'on sent que, quelles que fussent les opérations qu'on aurait faites pour mesurer une circonférence en se servant des parties de son rayon, il faudrait qu'on fît les mêmes opérations pour mesurer toute autre circonférence et qu'ainsi on y trouverait le même nombre des parties de son rayon. »

Ces dernières citations nous paraissent tout à fait caractéristiques de la manière, de la méthodologie géométrique de CLAIRAUT. Il est frappant de voir que, dans ce qui devrait être la partie rigoureuse du raisonnement, il est fait

usage encore une fois de l'égalité de deux nombres infiniment grands de parties infiniment petites : c'était donc là le procédé systématique par lequel CLAIRAUT pensait avoir surmonté les difficultés inhérentes aux rapports irrationnels. Mais cette intention de rigueur ne se sépare pas, n'arrive pas à se séparer de l'aspect sensible qui reste prédominant. En un mot, et à tous les degrés de l'édification géométrique, la méthode de CLAIRAUT n'est rien d'autre qu'une synthèse dialectique au niveau du sens commun.

190. A.M. LEGENDRE (1752-1833). De l'œuvre mathématique de LEGENDRE, nous n'avons à retenir ici que les *Éléments de géométrie* et les *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*. Les *Éléments* parurent en première édition en 1794. Leur succès fut considérable : ils furent réédités plus de trente fois et traduits en plusieurs langues. LEGENDRE avait 80 ans lorsque les *Réflexions* parurent, en 1832. Il y revient une dernière fois, pour les assurer et les éclairer, sur les résultats des recherches qu'il avait entreprises dans l'intention et dans l'espoir de donner à la géométrie élémentaire un statut satisfaisant et définitif, recherche constamment reprise, dont les éditions successives des *Éléments* apportent le témoignage.

Comment le problème du fondement de la géométrie se posait-il pour LEGENDRE ? Les premiers commentateurs des *Éléments* d'EUCLIDE avaient déjà mis en doute l'évidence (mais non la vérité) du postulat des parallèles. Nous est-il encore possible de bien comprendre les raisons de cette attitude ? Le fait est qu'on doit à ces premiers commentateurs les premiers essais de remédier à ce défaut d'évidence, et que ces essais devaient maintes fois se renouveler jusqu'aux fondateurs des géométries non euclidiennes. LEGENDRE avait-il connaissance des recherches sur les parallèles qui furent faites avant lui, en particulier par le P. SACCHERI et par LAMBERT ? La chose n'est pas certaine, on peut même en douter. L'opinion selon laquelle la question des parallèles était ouverte depuis EUCLIDE et n'avait pas encore trouvé de solution satisfaisante faisait partie d'une certaine tradition géométrique. LEGENDRE n'innovait donc pas en poursuivant tout au long des nombreuses éditions de ses *Éléments* l'idée que la géométrie pouvait et devait être fondée avec une rigueur absolue, rigueur dont les anciens avaient d'ailleurs déjà donné le modèle. Bien des fois, la tentative de démontrer le postulat des parallèles avait été faite avant lui, et bien des fois on avait énoncé l'intention de le remplacer par un axiome dont l'évidence échappe à toute critique. Il n'innovait donc pas en écrivant dans les *Réflexions* : « La question était d'éviter le *postulatum* ou d'y suppléer. » Tout au plus doit-on considérer comme nouveau le rôle qu'il fait jouer à l'analyse, rôle sur lequel nous reviendrons.

L'intention fondamentale de LEGENDRE est certainement en réaction contre

celle de CLAIRAUT et de BERTRAND[1]. (Il est d'autant plus intéressant de noter que déjà dans CLAIRAUT on trouve certains emprunts très caractéristiques à l'analyse.)

Mais que pouvaient alors signifier les mots : démontrer rigoureusement le postulat d'EUCLIDE ?

Dans le cadre d'une construction axiomatique, il n'y a aucune difficulté à leur accorder un sens précis. Nous nous sommes nous-mêmes placés dans cette situation, au début du chapitre V. Supprimant l'axiome des parallèles de notre base axiomatique, il nous est resté ce que nous avons appelé la base axiomatique tronquée. Les procédures de la déduction s'appliquent aussi bien à cette dernière qu'à la base axiomatique complète. C'est ainsi, par exemple, que nous avons démontré le théorème de l'alternative. L'axiome des parallèles est-il démontrable dans les mêmes conditions ? C'est là une question précise, à laquelle nous savons d'ailleurs qu'il faut répondre par la négative.

Au reste, c'est précisément pour répondre à l'exigence d'une situation déductive claire que la méthode axiomatique avait été créée.

Mais comment pouvons-nous rétrospectivement comprendre ce que signifiait la rigueur d'une déduction avant l'introduction des procédures axiomatiques ? Pour l'expliquer, il nous faut faire appel à la tradition géométrique dont nous parlions tout à l'heure. À partir des *Éléments* d'EUCLIDE, le postulat des parallèles une fois supprimé, il s'était dégagé des essais et des recherches géométriques un certain ensemble d'énoncés et de procédés que les « géomètres avertis » considéraient comme absolument sûrs. Cet ensemble peut être maintenant désigné d'un mot : c'est celui dont la base axiomatique tronquée fournit la garantie. Plus explicitement, il s'agissait en premier lieu des propriétés d'incidence, d'ordre et de continuité et par conséquent aussi d'un certain ensemble de propriétés topologiques élémentaires du plan et de l'espace. Il faut y ajouter les cas classiques d'égalité des triangles et, par conséquent, le recours au groupe des déplacements, pour autant que l'existence du sous-groupe invariant des déplacements parallèles n'y est pas présupposé.

Mais que signifiait alors l'intention de « suppléer au *postulatum* » ? Ne faut-il pas y distinguer l'intention de ne pas se laisser enfermer dans le domaine de légitimité — disons orthodoxe — dont il vient d'être question, si la démonstration rigoureuse du *postulatum* devait s'avérer impossible ? Ce simple mot *suppléer* n'annonçait-il pas une méthode géométrique plus libre, méthode dans laquelle il eût été légitime de faire appel à d'autres énoncés encore, pourvu qu'ils présentent un indéniable caractère d'évidence.

Nous reproduirons tout à l'heure l'une des démonstrations que LEGENDRE

[1] Il s'agit ici de Louis BERTRAND, citoyen de Genève, dont nous avons déjà parlé.

a données du postulat des parallèles, démonstration qui est précisément conduite selon cette méthode plus libre. Cette démonstration fut critiquée, comme si LEGENDRE avait subrepticement introduit le *postulatum* à démontrer au nombre de ses présuppositions. La démonstration, nous semble-t-il, aurait pu être défendue en insistant, d'abord, sur la légitimité d'une procédure de suppléance et, ensuite, en affirmant l'évidence de l'énoncé de complément. On peut s'étonner que cette défense n'ait pas été présentée. LEGENDRE semble avoir au moins partiellement cédé à la critique et retiré sa démonstration d'un certain nombre d'éditions de ses *Éléments*[1].

Ceux qui le critiquèrent mettaient-ils véritablement et directement en doute l'évidence de ce que nous venons d'appeler son énoncé de complément ? Et lui-même avait-il fini par partager ses doutes ?

Nous évitons de l'affirmer. Il faut se rappeler que GAUSS avait, lui aussi, longuement médité sur le problème des parallèles, qu'il avait pressenti, puis considéré comme certaine l'existence de la géométrie hyperbolique. Il n'avait pu se résoudre à publier le résultat de ses réflexions, mais on peut cependant admettre que le « secret hyperbolique » ne fut pas hermétiquement gardé. Or celui qui connaît l'existence d'une géométrie non euclidienne ne peut que mettre en doute systématiquement toute démonstration du postulat d'EUCLIDE qui se présenterait comme absolument vrai. C'est là, croyons-nous, l'une des raisons cachées de la crise de la géométrie dont les hésitations, les abandons et les reprises de LEGENDRE sont un symptôme visible. Avant de continuer, nous allons transcrire deux démonstrations connues de LEGENDRE, relatives à la somme des angles d'un triangle. La première établit que cette somme ne peut pas être supérieure à deux droits, la seconde, celle dont il vient d'être question, établit que cette somme ne peut pas être inférieure à deux droits. La première est orthodoxe. Elle ne fait appel à aucun élément nouveau. La seconde fait usage d'un énoncé capable de suppléer l'axiome des parallèles, énoncé que nous ne manquerons pas de souligner tout à l'heure.

II dit dans ses *Réflexions* : « Après quelques recherches entreprises en vue de démontrer directement que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, j'ai réussi d'abord à prouver que cette somme ne peut être plus grande que deux droits. » Voici le principe de sa démonstration, parue pour la première fois en 1800 dans la troisième édition des *Éléments*.

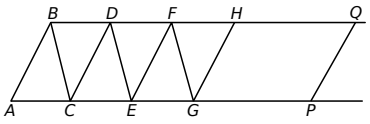


FIG. 152

Soit ABC un triangle dont la somme

[1] De la 9e à la 12e, où elle est réintroduite en note.

des angles est plus grande que deux droits (fig. 152).

Prenons sur le prolongement de AC:CE = AC, et soient de plus CD = AB, ∢ ECD = ∢ CAB. Alors le triangle CDE est égal au triangle ABC. De ce que A, C, E sont en ligne droite et de l'hypothèse que les angles des triangles égaux ABC et CDE ont une somme supérieure à deux droits, suit que

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA > \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DCE$$

et de là, en retranchant des angles égaux : ∢ ABC > ∢ BCD, d'où AC > BD.

Imaginons maintenant qu'on prolonge indéfiniment la droite AC, ainsi que les suites de triangles égaux ABC, CDE, EFG ... respectivement BCD, DEF, FGH ..., et soit AC − BD = *d*. On aura successivement AE − BF = 2*d*, AG − BH = 3*d*, etc. Il y aura donc P et Q tels que AP − BQ > 2AB, ou AP > BQ + 2AB, d'où la conclusion que la ligne droite AP est plus grande que la ligne brisée ABQP, ce qui est absurde.

Voici maintenant comment LEGENDRE démontre que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus petite que deux droits.

Il raisonne à peu près comme suit :

Soit ABC (fig. 153) un triangle dont la somme des angles est supposée 2 droits − δ, où δ est > 0. Faites l'angle BCD égal à l'angle ABC, et l'angle CBD égal à l'angle ACB. Les deux triangles ABC, BCD sont égaux. Par D tirez une droite qui coupe en E et F les deux côtés de l'angle A. On voit alors facilement que la somme des angles du triangle AEF n'excède pas 2 droits − 2δ. Si maintenant on effectue sur le triangle AEF la même construction que celle que nous venons de faire sur ABC, on A obtiendra un triangle dont la somme des angles n'excédera pas 2 droits − 4δ. En continuant indéfiniment de la même manière on obtiendrait finalement un triangle dont la somme des angles serait négative, ce qui est impossible.

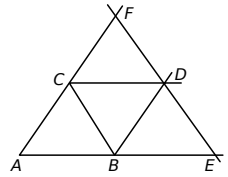


FIG. 153

L'énoncé-clef de la démonstration (l'énoncé non orthodoxe) est donc le suivant :

Par tout point pris à l'intérieur d'un angle il existe au moins une droite coupant les deux côtés de l'angle.

Cet énoncé est-il admissible ? Nous l'avons déjà dit, cette démonstration ne rencontra pas l'assentiment unanime « des géomètres avertis ». Que lui reprochait-on ? La critique pouvait avec raison mettre le doigt sur l'énoncé précédent et faire observer qu'il représente une présupposition inédite, et même une présupposition tout aussi difficilement démontrable que le postulat d'EUCLIDE : dans le cadre d'une procédure de suppléance, cette remarque ne suffit pas, nous le savons, pour disqualifier la démonstration. Tout tiendrait à

l'évidence ou à la non-évidence de la présupposition supplémentaire. Cette évidence a-t-elle été contestée, explicitement et directement ? Il ne le semble pas. Mais quels étaient alors les énoncés géométriques admissibles, et quels étaient ceux qui ne l'étaient pas. Une doctrine claire permettait-elle d'en décider ? Encore une fois, il ne le semble pas. En fait, le principe de suppléance ne trouvait aucune application parce que les esprits hésitaient devant tout jugement d'évidence restant sans garantie orthodoxe.

La critique amènera-t-elle LEGENDRE à douter de la vérité de l'énoncé ainsi mis en cause ? La conviction de LEGENDRE est, en quelque sorte, opérationnelle. Il est tout simplement vrai que la droite par A, coupant les deux côtés de l'angle, existe parce que cette droite peut être tirée. Il y a là une vérité constante. LEGENDRE maintiendra-t-il donc sa démonstration ?

Au contraire, il la retire des *Éléments*. LEGENDRE a dû reconnaître que, d'une certaine manière, sa présupposition était équivalente au postulat qu'il prétendait éviter. Il est compréhensible que, visant à éliminer radicalement le postulat de l'édification géométrique, il ait été peu satisfait de le retrouver sous une autre forme, au bout de son argumentation. Fallait-il, pour cela, abandonner la démonstration ? Voici comment il s'en explique dans les *Réflexions* :

« ... Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de sa démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu entièrement résoudre ! C'est ce qui nous a déterminé à revenir, dans la neuvième édition, à la marche d'EUCLIDE...

» Ces considérations et beaucoup d'autres, qui naissent de différentes manières d'envisager le même sujet, laissaient peu d'espoir de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme de trois angles du triangle par des moyens aussi simples que ceux dont on fait usage pour démontrer les autres propositions des *Éléments*.

» Il n'en est pas moins certain que le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle doit être regardé comme l'une de ces vérités fondamentales qu'il est impossible de contester... C'est sans doute à l'imperfection du langage vulgaire et à la difficulté de donner une bonne définition de la ligne droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu jusqu'ici les géomètres, lorsqu'ils ont voulu déduire ce théorème des seules notions sur l'égalité des triangles... »

Dans la citation précédente les expressions « les moyens aussi simples » et « les seules notions de l'égalité des triangles » désignent les moyens opérationnels que nous avons dit orthodoxes, les moyens qui pour nous sont garantis par la base axiomatique tronquée.

Nous allons voir maintenant comment LEGENDRE essaie de tourner la difficulté par une méthode de démonstrations qu'il appelle *la méthode analytique des homogènes*.

Soit ABC un triangle, *a*, *b*, *c* les trois côtés. Des conditions d'égalité des

triangles on déduit que l'angle C est une fonction déterminée des angles A, B et du côté adjacent *c* : C = φ(A,B,*c*). LEGENDRE dit maintenant que *c* n'entre pas dans la dernière équation; car si cela était, on pourrait la résoudre par rapport à *c*, d'où il suivrait que *c* est un nombre et non une longueur, en supposant naturellement que les angles sont eux-mêmes des nombres, ce qui est le cas si l'on choisit par exemple l'angle droit comme unité. Donc C = φ(A,B). De là, on voit facilement que les angles d'un triangle rectangle ont deux droits pour somme. Car soit ABC rectangle en A (fig. 154); abaissons la perpendiculaire AD sur BC. Les deux angles CAD et BAD doivent être égaux, d'après ce qui précède, respectivement aux deux angles aigus en B et C, dont la somme est ainsi évidemment un droit. Et donc A + B + C = 2 droits. On étend immédiatement ce résultat à un triangle quelconque ABC en le partageant en deux triangles rectangles.

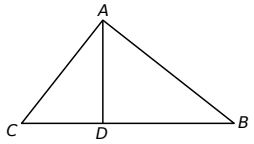


FIG. 154

Cette dernière démonstration satisfaisait pleinement LEGENDRE : « Toute difficulté a disparu et la démonstration du théorème dont il s'agit s'est réduite tout d'un coup au dernier degré de simplicité... » affirme-t-il dans les *Réflexions*.

Nous avons déjà dit combien fut grand le succès des *Éléments* de LEGENDRE. Tout au contraire, son effort pour assurer les fondements de la géométrie ne rencontra pas la faveur des grands mathématiciens de son temps. GAUSS, par exemple, connaissait les essais de LEGENDRE. On cite de lui quelques mots très durs visant très certainement ce dernier (un tissu de démonstrations illusoires). Quant au principe des homogènes, il se trouvera repris chez LOBATSCHEFSKI, mais pour y être contesté de la façon la plus formelle.

Nous avons plusieurs fois répété que le passage de la géométrie euclidienne aux géométries non euclidiennes a constitué et constitue toujours encore une expérience d'un caractère tout spécial, une expérience historique et collective dans le développement de la géométrie, une expérience individuelle pour celui qui réalise dans son esprit la coexistence de l'euclidien et du non-euclidien. On peut apercevoir, dans le cas de LEGENDRE, une assez singulière superposition du moment historique et du moment individuel de cette expérience. En un certain sens, LEGENDRE avait atteint le but que tant de géomètres avaient visé avant lui. Il avait réussi à déduire le postulat des parallèles des vérités orthodoxes et d'un énoncé dont la vérité « saute aux yeux » de ceux que d'autres essais de démonstration n'ont pas mis en garde. Mais la crise de l'évidence s'était ouverte, l'évidence sensible ou opérationnelle n'était déjà plus tenue pour une garantie suffisante de la vérité mathématique, l'idée de la vérité géométrique n'était déjà plus intacte.

Et quant à LEGENDRE, la crise de la légitimité géométrique s'était aussi ouverte en lui. Il ne douta, certes, jamais de l'incontestable vérité des énoncés euclidiens, tels que celui dont nous venons de parler. Mais, en lui, l'assurance du géomètre n'était plus intacte. Ces longues *Réflexions* le laissent finalement hésitant et songeur quant à la méthode juste pour constituer un discours géométrique vrai. C'est à l'indécision sur la méthode, et sur la doctrine préalable, que tiennent les difficultés dont il fait mention dans la citation précédente, difficultés qui entraînèrent le retrait de sa démonstration.

Nous disions que l'intention de LEGENDRE était d'épurer la géométrie des difficultés qui s'attachaient traditionnellement aux postulats des parallèles, en rétablissant le raisonnement géométrique dans la rigueur dont les anciens avaient donné le modèle. Faut-il comprendre que LEGENDRE entendait revenir à une conception purement rationnelle de la géométrie ? Ce sera peut-être là l'idée d'un BOLYAI, mais la doctrine préalable de LEGENDRE porte aussi, comme celle de CLAIRAUT, malgré son souci de rigueur, la marque de l'engagement dans le réel. Cette doctrine préalable est assez facile à discerner dans les explications et dans les définitions auxquelles les premières pages des *Éléments* sont consacrées.

Voici, par exemple, comment LEGENDRE définit la géométrie dans le premier alinéa des *Éléments* :

« La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.
» L'étendue a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur. »

Ce qui ne peut manquer de frapper, c'est que l'idée de mesure est introduite ici sans aucune préparation, sans aucune analyse préalable. La définition s'en sert tout simplement comme d'un élément constitutif qu'on ne remet pas en question.

Pour nous, l'idée de mesure évoque l'étendue au sens expérimental, l'espace où se développe l'activité technique qui conduit à le mesurer. Pour LEGENDRE, les trois aspects fondamentaux de l'étendue ne sont pas encore spécifiés : c'est à la fois l'étendue au sens de notre vision naturelle du monde, l'étendue au sens de l'ingénieur topographe ou de l'astronome qui mettent en œuvre des techniques de mesure complexes et délicates, et l'étendue au sens du mathématicien qui fait de la géométrie le contenu d'une édification discursive.

On ne s'étonnera donc pas que, dans cette première définition comme dans celles qui suivent, LEGENDRE ait recours au mot de la langue courante dont la signification tient à notre activité corporelle ou sensorielle. Tels sont les mots distance, mesure, hauteur, épaisseur, etc.

Voici quelques définitions caractéristiques où ces mots sont pris, répétons-le, comme termes primitifs, sans aucune explication préalable :

« La *ligne* est une longueur sans largeur.
» Les extrémités d'une ligne s'appellent *points* : le point n'a donc pas d'étendue.
» La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.
» *Surface* est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ni épaisseur.
» Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre. »

Quant à l'idée d'axiome, LEGENDRE s'en tient à la conception traditionnelle. Voici la définition qu'il en donne :

« *Axiome* est une proposition évidente par elle-même. »

Et voici les axiomes qu'il formule explicitement :

« 1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.
» 2. Le tout est plus grand que sa partie.
» 3. Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé.
» 4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite.
» 5. Deux grandeurs, ligne, surface ou solide, sont égales, lorsque étant placées l'une sur l'autre elles coïncident dans toute leur étendue. »

On remarquera qu'il ne fait aucune différence de principe entre les axiomes de caractère logique, les axiomes sur les grandeurs et les axiomes de caractère plus spécifiquement géométrique. Ceci nous montre bien que, pour LEGENDRE, l'évidence à laquelle il a recours est simplement l'évidence du sens commun, évidence de ce qu'on peut faire, autant qu'évidence de ce qu'il faut admettre.

Une dernière remarque avant de conclure : les démonstrations de LEGENDRE témoignent d'un visible souci de rigueur autant que de simplicité. Il n'y évite cependant pas toujours certains emprunts « opérationnels ». Il applique, par exemple, les cas d'égalité des triangles aussi bien aux triangles de même orientation qu'aux triangles d'orientations opposées. Comment ces cas d'égalité des triangles se trouvent-ils eux-mêmes démontrés ? On se contente de faire voir qu'ils peuvent être superposés. Mais cette superposition exige, pour deux triangles d'orientation opposée, un retournement dans l'espace dont la possibilité est simplement posée en fait.

Somme toute, l'intention de LEGENDRE de revenir à la rigueur des anciens géomètres n'inscrit rien de nouveau dans sa doctrine préalable. Dans notre perspective, celle-ci reste au niveau de la première synthèse dialectique. Elle reste dominée par l'équivalence de vérités des trois aspects fondamentaux. L'engagement dans le réel n'y est pas mis au premier plan, comme il l'était chez CLAIRAUT. Il n'en informe pas moins toute la construction géométrique.

Mais la recherche géométrique « sur la ligne interne » avait déjà commencé

à se dégager des résultats dont cette doctrine préalable ne pourra plus rendre compte de façon satisfaisante.

Ainsi s'expliquent les critiques que LEGENDRE devait rencontrer, critiques dont il était encore difficile d'apprécier la portée et malaisé de tenir compte.

191. CH.F. GAUSS (1777-1855). On sait que GAUSS n'a pas cessé, sa vie durant, de réfléchir à la question des parallèles et, de façon plus générale, au problème de la vérité en géométrie. Il n'a cependant rien publié du résultat de ses recherches, les tenant presque secrètes et n'y faisant allusion que dans quelques lettres à des correspondants de confiance.

Des papiers qu'il a laissés, il ressort qu'ayant réussi à opposer à l'édification euclidienne de la géométrie une édification axiomatique de la géométrie hyperbolique, il avait fini par se persuader que ni l'une ni l'autre de ces géométries ne pourraient jamais conduire à une contradiction.

On sait aussi, nous l'avons déjà rappelé, qu'il effectua certaines mesures géodésiques pour faire l'épreuve, à cette échelle déjà, d'une éventuelle hyperbolicité de l'espace.

Nous n'allons pas chercher à donner ici une idée exacte des recherches et des résultats de GAUSS sur ce sujet. Ce qui nous importe, c'est de dégager par quelques citations ce que fut la *doctrine géométrique* de GAUSS. Comment expliquait-il, en particulier, la coexistence de deux systèmes déductifs tirés de bases axiomatiques inconciliables ?

Nous venons de parler d'édification axiomatique et de base axiomatique. Mais nous savons que le mot axiome est susceptible de bien des interprétations, que l'idée d'axiome est capable de nombreuses spécifications. Dans quel sens faut-il l'entendre ici ?

Il faut tout d'abord faire la remarque que, pour GAUSS (tout au moins au début de ses réflexions sur la question des parallèles), il n'existait aucune position intermédiaire entre la fausseté et la vérité d'un énoncé géométrique. La vérité d'un énoncé juste ne pouvait être qu'entière, celle d'un axiome s'imposant d'ailleurs d'elle-même.

Voici maintenant une première citation, datant de 1816. (*Werke*, t. IV, p. 364) :

« Il y a certainement peu de sujets en mathématiques sur lesquels on a autant écrit que sur la lacune qui existe dans les débuts de la géométrie, quant aux fondements de la théorie des parallèles. Il s'écoule rarement un an sans que ne se publie quelque essai de combler cette lacune. À parler sincèrement et ouvertement, nous ne pouvons cependant pas affirmer en être plus loin, pour le fond, qu'EUCLIDE ne l'était il y a deux mille ans. Cet aveu direct et sans fard nous semble mieux convenir à la dignité de la science que le vain effort de

dissimuler une lacune qu'on ne sait pas combler sous un inadmissible tissu de démonstrations illusoires. »

Le mot lacune (en allemand *Lücke*) nous paraît devoir être relevé dans ce texte. Il s'applique, bien entendu, au postulat d'EUCLIDE où se trouve exigée l'unicité de la parallèle à une droite. Mais quel est l'élément qui manque encore, une fois ce postulat accepté ?

À n'en pas douter, GAUSS fait sienne l'opinion selon laquelle ce postulat ne s'impose pas avec une nécessité suffisante et que, par conséquent, le seul rôle qui puisse lui être reconnu, selon les normes d'une édification déductive rigoureuse, est celui d'un théorème à démontrer. Or, pour GAUSS, la démonstration de ce théorème manquait à la géométrie de son temps comme elle manquait déjà à la géométrie d'EUCLIDE. C'était là la lacune dont il parlait en termes si énergiques.

GAUSS estimait d'ailleurs que ce n'était pas là le seul endroit où une critique serrée de la géométrie permettrait de découvrir des défauts plus ou moins analogues.

Cette opinion ressort clairement de la citation suivante (*Werke*, t. VIII, p. 194) :

« Il y a bien des choses pareilles qui, même en géométrie élémentaire, ont besoin d'une démonstration rigoureuse. C'est le cas, par exemple, de l'existence du plan, dont la définition comporte déjà un théorème (à démontrer). En voici un exemple :

» Si ADB, AFG, ACE, BFC sont respectivement en ligne droite, alors la droite D-E ne peut passer ni au-dessus ni au-dessous du point G...

» Sous une forme ou sous une autre, la démonstration de cet énoncé est indispensable. »

Mais revenons à la première de ces lacunes. Bien des géomètres avaient tenté, avant GAUSS, de démontrer le postulat d'EUCLIDE par la méthode classique de la réduction à l'absurde. Si l'on pouvait démontrer qu'une hypothèse dont la négation entraîne le postulat est elle-même fausse (parce qu'elle mène à une contradiction) le postulat serait par là démontré. GAUSS reprit cette idée à son compte, tentant d'établir une théorie des parallèles dans laquelle il exigera qu'il passe, par un point donné, plus d'une parallèle à une droite donnée. Au début, l'hypothèse de la non-unicité de la parallèle ne devait certainement pas avoir la signification d'un axiome. Ce devait simplement être une hypothèse fausse à réfuter, analogue aux hypothèses que les géomètres avaient l'habitude de poser dans les démonstrations dites indirectes. Nous avons dit plus haut que GAUSS avait procédé axiomatiquement à l'édification de cette théorie. Nous n'avons pas voulu dire que GAUSS avait pris son hypothèse pour un axiome, au sens de son époque, ou au sens qu'il donnait lui-même à ce mot. Nous avons simplement voulu indiquer que cette hypothèse prendrait le rôle

d'axiome dans une édification axiomatique actuelle.

GAUSS semble bien avoir eu tout d'abord l'espoir de rencontrer la contradiction qui lui aurait permis d'écarter ce que D'ALEMBERT appelait, avant lui, le scandale de la géométrie. Le fait de n'y pas parvenir sembla avoir eu, quant à l'évolution de sa doctrine géométrique, une importance fondamentale.

Les trois citations qui vont suivre ne laissent guère de doute à cet égard :

Lettre à TAURINUS, 1824, *Werke*, tome VIII, page 186 :

« Tous les efforts que j'ai faits pour découvrir une contradiction, une inconsistance dans cette géométrie non euclidienne sont restés sans résultats. Le seul point où elle entre en contradiction avec notre raison est que, si elle devait être vraie, il devrait exister une grandeur linéaire[1], déterminée en soi (bien qu'étant inconnue de nous). Mais il me semble que, en dépit des constructions verbales (en allemand : *Wortweisheit*) des métaphysiciens, nous savons si peu de choses, pour ne pas dire rien, sur la vraie nature de l'espace qu'il ne doit pas nous être permis de poser comme absolument impossible ce qui ne nous paraît pas naturel.

» S'il se trouvait que la géométrie non euclidienne fût la vraie géométrie, et si la grandeur dont je parle était en quelque rapport avec les grandeurs, il devrait être possible de la déterminer à posteriori. C'est pourquoi il m'est arrivé, sans qu'il faille prendre la chose tout à fait au sérieux, d'exprimer le désir que la géométrie euclidienne ne soit pas la vraie, parce que nous aurions alors une unité de mesure absolue à priori. »

Lettre à W. BOLYAI, 1799, *Werke*, tome VIII, page 159 :

« Mais ce chemin[2] me mène bien plutôt à douter de la vérité de notre géométrie. »

Lettre à OLBERS, 1817, *Werke*, tome VIII, page 177 :

« J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut pas être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ni pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible.

» Jusque-là, il ne nous faut pas mettre la géométrie au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement à priori, mais plutôt au même rang que la mécanique. »

[1] En d'autres termes, une *longueur*.

[2] Il s'agit des essais dont il est question dans la citation précédente.

Les citations qui précèdent montrent que, dans l'esprit de GAUSS, la vérité mathématique des énoncés d'un système est tout autre chose que la non-contradiction de l'ensemble de ces énoncés entre eux. L'ensemble des énoncés de la géométrie euclidienne est non contradictoire; il en est de même de l'ensemble des énoncés de la géométrie hyperbolique. Elles ne peuvent cependant pas être vraies, l'une et l'autre, au sens où GAUSS entend la vérité géométrique, puisque l'absence de contradiction ne s'étend pas au système qui les contiendrait l'une et l'autre. On n'a donc pas le droit de prétendre que la vérité mathématique d'une théorie soit garantie par sa simple cohérence (ou consistance) logique. La vérité mathématique est quelque chose de plus profond, de plus essentiel.

La conviction s'était donc faite en GAUSS que la créature humaine n'est pas faite de telle façon que la pure raison puisse la conduire avec nécessité à celle des deux géométries en laquelle la vérité s'incorpore. La raison humaine n'est pas à la hauteur d'une telle démarche.

Le passage où GAUSS fait allusion à une autre vie où une connaissance plus pure lui serait peut-être accordée témoigne de la profondeur de cette conviction.

Mais la vérité géométrique est-elle insaisissable par essence ? La seule raison étant ici défaillante, n'avons-nous aucun autre moyen de nous en emparer ? La résignation de GAUSS ne va pas jusque-là. Ce qui fait la vérité de la géométrie, au-delà de la simple non-contradiction, c'est son adéquation à la réalité de l'espace. L'espace n'est pas une fiction de notre esprit. Il existe dans sa nature propre, même si celle-ci ne nous est pas totalement donnée par sa reconstruction mathématique. Mais cette dernière n'épuise pas les possibilités qui nous sont offertes pour acquérir la connaissance de l'espace réel. L'espace appartient, dans sa réalité, aussi bien (moins bien, en un certain sens, mais peut-être mieux, en un autre sens) à l'homme qui le mesure qu'à l'homme qui le pense. Il n'est donc pas interdit de penser qu'une connaissance active de l'espace puisse suppléer la connaissance rationnelle dans la recherche de la vraie géométrie.

Ainsi s'expliquent les mesures géodésiques dont nous avons déjà parlé.

GAUSS à BESSEL, 1830, volume VIII, page 201 :

« Selon ma conviction la plus intime, la science de l'espace occupe à priori dans le système de nos connaissances une autre position que la théorie des grandeurs pures; il manque à notre connaissance de celle-là cette conviction totale de sa nécessité qui est propre à celle-ci, nous devons reconnaître avec humilité que, si le nombre n'est que produit de notre esprit, l'espace a également une réalité hors de notre esprit, réalité à laquelle nous ne pouvons prescrire ses lois complètement à priori. »

Mais que devient l'intuition dans le dialogue qui s'institue ainsi, dans une confrontation presque immédiate, entre le mathématicien et le physicien, entre

la rigueur du raisonnement et la précision de la mesure ?

Dans la vision gaussienne, la chose nous paraît extrêmement remarquable, l'intuition semble perdre son rôle de garantie inconditionnelle de la démarche mathématique. Il y a, plus profondément ancrées que la connaissance naturelle que l'intuition nous assure, une connaissance nécessaire de par sa nature même. Un exemple nous en est fourni par l'arithmétique qui est, dit GAUSS, totalement à priori, mais l'intuition géométrique n'a pas la même sécurité absolue.

À notre avis, la doctrine de GAUSS comporte un élément métaphysique prépondérant : celui de notre irrémédiable incapacité de désigner la vraie géométrie par des moyens purement rationnels. Cette idée dominante ne peut manquer, nous semble-t-il, d'entraîner une certaine dégradation de la valeur de l'intuition. Ainsi s'explique aussi l'impitoyable sévérité avec laquelle GAUSS jugeait les efforts de LEGENDRE pour combler à sa façon la lacune de la théorie des parallèles.

On peut se demander si cet élément métaphysique de la doctrine gaussienne, appuyé sur l'immense autorité de celui qu'on appelait le prince des mathématiciens, n'a pas joué un rôle déterminant dans la crise de la légitimité géométrique, jusqu'au moment de l'intervention de la méthode axiomatique au sens moderne.

La position que nous venons de décrire sommairement diffère naturellement beaucoup de celle que nous avons été amenés à prendre au cours de notre étude. On peut cependant distinguer ce qu'on pourrait appeler les prémisses d'une synthèse dialectique dans la collaboration entre le raisonnement mathématique et la mesure, collaboration sans laquelle la vérité de la géométrie resterait insaisissable.

Cette opinion s'accorde, dans une certaine mesure, avec les deux textes suivants :

« Cet ouvrage (il s'agit d'un commentaire de J.C. SCHWAB sur les *Éléments* d'EUCLIDE, dont GAUSS fait la critique) prétend, à l'encontre de KANT, que la certitude de la géométrie n'est pas fondée dans l'intuition (en allemand : *Anschauung*), mais bien dans les définitions justes et dans les principes d'identité et de contradiction. KANT n'a certainement pas voulu nier qu'il faille faire un usage constant de ces moyens logiques dans la formulation (en allemand : *Einkleidung*) et dans l'affiliation des vérités géométriques. Mais, d'autre part, aucun de ceux à qui la géométrie est familière ne se trompera sur le fait que ces moyens à eux seuls ne conduisent à rien, qu'ils ne produisent qu'une floraison stérile si la représentation vivante et fécondante de l'objet n'est pas partout présente. » (*Werke*, vol. VIII, p. 172.)

Lettre à SCHUMACHER, 1846, volume VIII, page 247 :

« La différence entre à gauche et à droite ne peut pas être définie, on ne peut que l'indiquer (en allemand : *vorzeigen*)... L'entente entre deux esprits, quant à la droite et à la gauche ne peut s'établir immédiatement, ne peut s'établir que par l'intermédiaire d'un objet matériel, individuellement désigné qui établit un pont entre eux... J'ai montré dans les *Göttingische gelehrten Anzeigen*, 1831, page 635, que ce fait constitue la plus éclatante réfutation de l'idée de KANT selon laquelle l'espace n'est rien d'autre que la forme de notre intuition spatiale. »

En quelques mots, la première de ces deux citations affirme tout simplement l'inaliénabilité de l'aspect intuitif de notre connaissance, la seconde en fait autant pour l'aspect expérimental.

192. JOHANN BOLYAI (1802-1860).

Craignant les criailleries des Béotiens (*das Geschrei der Böotier*), GAUSS n'avait pu se résoudre à publier les résultats de ses recherches et de ses méditations sur la théorie des parallèles. C'est donc à J. BOLYAI et à N. LOBATSCHEFSKI que revient le mérite des premières publications sur la géométrie hyperbolique. C'est de celles-ci que nous allons maintenant dire quelques mots. Nous ne referons pas le chemin par lequel ils sont parvenus, le premier à sa géométrie absolue, le second à sa géométrie imaginaire. L'une et l'autre sont identiques à la géométrie hyperbolique. Il serait intéressant de suivre les raisonnements par lesquels ils ont établi leurs formules fondamentales, en particulier la relation entre la distance d'un point à une droite et l'angle des deux parallèles à cette droite par ce point. C'est plus particulièrement sur leur doctrine préalable que notre intérêt va se porter. Ces doctrines diffèrent singulièrement l'une de l'autre.

Nous nous efforcerons d'en dégager les traits principaux pour les comparer l'une et l'autre avec la doctrine à laquelle nous sommes nous-mêmes parvenus.

L'ouvrage fondamental de J. BOLYAI parut en 1832 en appendice à un ouvrage mathématique de son père Wolfgang BOLYAI, ouvrage intitulé : *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris, ac sublimioris, methodo intuitiva evidentiaque huic propria, introducendi*.

L'appendice lui-même portait le titre remarquable que voici :

Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Ce titre contient déjà les éléments essentiels de la doctrine préalable de J. BOLYAI. On y lit une première allusion à la vérité absolue d'une partie de la géométrie et une autre allusion à l'indécidabilité du postulat d'EUCLIDE. Ces deux traits caractérisent la position métaphysique de J. BOLYAI, dont nous savons qu'elle fut aussi celle de GAUSS. Un examen plus approfondi de l'*Appendix* et des lettres de GAUSS au père de J. BOLYAI confirmerait d'une

façon frappante ces premières indications sur le parallélisme, disons même l'identité, de leurs points de vue en ce qui concerne le rôle de la raison pure en géométrie.

Pour BOLYAI comme pour GAUSS (au moment de sa correspondance du moins) la seule raison ne suffit pas pour établir quelle est la géométrie vraie (« absolument vraie ») parmi celles qui peuvent être édifiées sans contradiction. La créature humaine n'est pas faite de façon à pouvoir trouver dans son propre esprit la justification absolument sûre de l'une ou de l'autre.

Mais quelle est alors la géométrie inconditionnellement sûre dont le titre de l'*Appendix* annonce la démonstration ? C'est tout simplement celle qui n'exige, pour être édifiée, que les moyens orthodoxes dont nous avons déjà parlé à propos de LEGENDRE. Il existe donc, selon BOLYAI, un ensemble de propositions qui peuvent être établies indépendamment de toute présupposition.

C'est ainsi qu'on édifie une trigonométrie plane (désignons-la par S) contenant un paramètre arbitraire *i*, trigonométrie dans laquelle seule la valeur juste de ce paramètre n'est pas fixée; si ce n'est peut-être par des démarches à posteriori. La géométrie euclidienne (appelons-la Σ) en est un cas particulier, pour la valeur infinie de ce paramètre. Ce paramètre est exactement le coefficient qui, dans les modèles projectifs, apparaît dans l'expression de la distance de deux points devant le logarithme d'un birapport, paramètre dont nous avons disposé librement dans la démonstration du théorème de l'approche. Toute la doctrine de J. BOLYAI porte sur la possibilité ou l'impossibilité de déterminer sa valeur.

Mais citons J. BOLYAI lui-même[1] :

On lit au paragraphe 32 de l'*Appendix* concernant ce qui peut être obtenu sans aucune présupposition : « On peut cependant démontrer à priori (et plus aisément encore à posteriori) que toute expression, contenant (le paramètre) *i*, (l'existence d'un *i* étant présupposée) tend vers l'expression correspondante de Σ, lorsque *i* devient infini (passant alors à l'hypothèse qu'il n'existe aucun *i*). »

On lit ensuite, également au paragraphe 32 : « ... Il faut cependant se garder de penser qu'on peut faire varier vraiment le système S et la géométrie elle-même, et que, par exemple, ayant fait l'hypothèse de la réalité de S, on puisse à volonté faire croître ou décroître ou encore annuler *i*. La chose ne peut se faire pour la raison que la nature de l'espace est simplement invariable et déterminée en soi. Absolument et inconditionnellement, il n'y a, en effet, que deux éventualités : ou bien il existe un *i*, ou bien il n'en existe pas. Dans le

[1] Les citations qui vont suivre proviennent de l'ouvrage de Wolfgang et Johann BOLYAI, *Geometrische Untersuchungen*, édité par Paul Stäckel en 1913 et contenant l'ensemble des travaux géométriques des deux BOLYAI.

premier cas, sa grandeur est éternellement et invariablement déterminée. Mais comme nous ne savons rien jusqu'ici concernant *i* et sa valeur éventuelle (l'auteur étant même parvenu à démontrer avec une rigueur géométrique entière qu'il est dans la nature des choses que jamais l'intelligence la plus aiguë n'en puisse décider), il ne dépend que de nous de faire, l'une après l'autre, diverses hypothèses à ce sujet, et d'édifier en conséquence divers systèmes hypothétiques. »

On voit que J. BOLYAI ne distingue pas entre l'aspect théorique et l'aspect expérimental ou réalisé. Pour lui, il doit y avoir une géométrie vraie dont la réalité est à la fois théorique et physique, c'est-à-dire en fait métaphysique.

On lit ensuite au paragraphe 33, page 201 : « ... Voici donc, en bref, ce qui fait l'essence de cette théorie et ce qu'on en peut attendre :

» I. Pour ce qui est de savoir si c'est S ou si c'est Σ qui est réalisé, la chose reste et restera toujours, comme l'auteur est en mesure de le démontrer, purement et simplement indécise.

» II. On dispose d'une trigonométrie plane absolument vraie (c'est-à-dire indépendante de toute présupposition), dans laquelle il est vrai la grandeur *i* reste indéterminée et le fait de son existence indécis — tout le reste étant parfaitement déterminé. Quant à la trigonométrie sphérique... elle n'est en rien dépendante du neuvième postulat; elle est donc absolument vraie. »

Ce texte précise ce que J. BOLYAI appelle absolument vrai : c'est ce que nous avons appelé à propos de LEGENDRE la vérité géométrique orthodoxe.

On lit enfin au paragraphe 33, page 202 : « Si l'on tient compte, en plus, de la démonstration (que l'auteur possède aussi) de l'impossibilité de décider jamais entre S et Σ, alors la nature du onzième postulat est définitivement élucidée. »

Telle était donc la doctrine préalable de BOLYAI au moment où il publiait l'*Appendix*. Mais, la réflexion faisant son œuvre, cette doctrine devait subir par la suite des modifications considérables. Il arriva même qu'il fut tenté de défaire ce qu'il avait fait. Mais quelles qu'aient été plus tard les péripéties de l'évolution de ses idées, il faut reconnaître que le premier de ses ouvrages fut un chef-d'œuvre. Il représente un des progrès essentiels de la géométrie.

Nous n'avons pas dit que l'*Appendix* avait été précédé par quelques essais, infructueux comme ceux de GAUSS d'ailleurs, de démontrer le postulat des parallèles. Cette préoccupation semble avoir persisté à l'arrière-plan de la doctrine préalable dont il vient d'être question.

Ces tentatives ne furent pas les dernières. J. BOLYAI, inventeur d'une géométrie non euclidienne, chercha périodiquement à se convaincre de la seule vérité de la géométrie euclidienne Σ, et donc la nécessité de démontrer que la géométrie S est contradictoire. On possède quelques notes à ce sujet, consignées dans des papiers épars ou en marge d'autres considérations géométriques. Il est

difficile d'en juger objectivement. Il ressort pourtant de ceux-ci que BOLYAI pensa d'abord être en mesure de montrer au moins ce résultat, négatif pour ce qu'il avait en vue, qu'une géométrie plane S ne contient pas de contradiction « interne ». Son argument était qu'une géométrie plane S est en somme équivalente à une trigonométrie sphérique imaginaire, dont l'existence non contradictoire est garantie puisqu'elle peut être édifiée sans le onzième postulat, ce qui indique de nouveau comment J. BOLYAI entendait la non-contradiction dans le cadre de la vérité orthodoxe. Il en concluait à l'impossibilité de déterminer le coefficient *i* par la logique humaine sinon divine. Il n'est pas aisé de dire si ses démonstrations étaient complètes. L'idée qu'il y poursuivait était juste dans son principe, puisque nous savons que l'autonomie de l'hyperbolique est démontrable. Cependant il eut des doutes, qui lui firent commettre plus d'une erreur, après avoir remarqué que l'indécidabilité d'une contradiction de la géométrie plane n'épuisait pas la question puisque l'hyperbolique spatial pouvait fort bien être contradictoire. Dès lors tout son effort porta sur une étude approfondie de la géométrie de l'espace. Son ouvrage *Raumlehre*, dont la rédaction entreprise en 1833 fut longtemps interrompue, peut-être justement à cause de la difficulté de décider entre les géométries S et Σ, devait selon lui remplacer les *Éléments* d'EUCLIDE. Il crut pouvoir l'achever vers 1856 et le couronner par la démonstration *du onzième axiome d'EUCLIDE, dont la vérité a été toujours mise en doute jusqu'ici sur la terre, célèbre universellement, et aussi des plus importants comme servant de base à toute la théorie de l'espace et des mouvements*.

Le principe de sa démonstration, qui contenait une erreur comme il le vit plus tard, consistait à exprimer de deux manières différentes les angles dièdres d'un polyèdre de l'espace hyperbolique en fonction des côtés et à reconnaître que ces expressions n'étaient pas identiques, d'où il concluait à une contradiction dans la géométrie S. Ce fut une faute de calcul dans la considération du polyèdre construit sur cinq points, le tétraèdre n'ayant pas fourni la décision, qui lui fit annoncer avec enthousiasme que la « logique terrestre » pouvait prouver Σ comme seule vraie.

Jusqu'au bout de son effort, BOLYAI resta dans le doute quant à la possibilité de réfuter sa géométrie absolue par une contradiction interne. Ce point, que les modèles projectifs devaient élucider quelques années plus tard resta toujours obscur pour lui. Vers la fin de sa vie, il en était venu à dire simplement que la géométrie Σ était plus probable que S.

À voir ainsi l'un des fondateurs des géométries non euclidiennes douter de sa découverte, on mesure quelles durent être la perplexité et l'incertitude des géomètres quant aux fondements légitimes de leur discipline jusqu'à la mise en œuvre de la méthode axiomatique.

193. I.N. LOBATSCHEFSKI. Ce qui nous intéresse ici de l'œuvre de LOBATSCHEFSKI, c'est uniquement ce qui a trait à l'évolution historique et au dénouement de la crise de la légitimité géométrique.

Renonçant à toute indication biographique (nous bornant à mentionner que LOBATSCHEFSKI étudia et enseigna les mathématiques à l'Université de Kazan), nous nous contenterons aussi de citer les ouvrages auxquels nous aurons à nous référer.

LEGENDRE ne mettait pas la vérité de la géométrie d'EUCLIDE en cause : dans ses *Éléments*, il entendait au contraire revenir à la rigueur dont EUCLIDE avait donné l'exemple et combler dans cet esprit la « lacune de la théorie des parallèles ».

Ni GAUSS ni BOLYAI ne semblent avoir douté de l'existence d'une *vraie* géométrie et ne semblent jamais avoir pensé que les notions géométriques fondamentales ne fussent pas claires et précises.

La critique que LOBATSCHEFSKI fait de la géométrie classique va du premier coup beaucoup plus loin : ce sont les notions de base qu'il incrimine.

Pour préparer la doctrine à laquelle le mène le rejet de toute la tradition géométrique, nous allons nous faire tout d'abord l'écho des critiques que LOBATSCHEFSKI adressait à LEGENDRE et à son principe des homogènes.

On se souvient que c'est à ce principe que LEGENDRE ramenait avec prédilection la démonstration du postulat des parallèles.

Rappelons brièvement quelle en est la teneur. Supposons qu'il existe une relation entre des *grandeurs de même nature*, entre des segments rectilignes (ou grandeurs linéaires), par exemple le théorème du cosinus :

$$(C) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha$$

formule une relation entre les trois « lignes » *a*, *b*, et *c*, le cos a étant regardé comme un nombre. La formule (C) est homogène en *a*, *b* et *c*. Le principe des homogènes pose en fait qu'il doit en être ainsi dans tous les cas.

C'est là la condition pour que la relation entre les grandeurs puisse être envisagée comme une relation entre les rapports de ces grandeurs à une grandeur quelconque (de même nature), donc entre les mesures de ces grandeurs en prenant une grandeur arbitraire (mais toujours de même nature) comme unité. En d'autres termes, on peut remplacer, dans une relation homogène, les mesures de toutes les grandeurs envisagées par des mesures qui leur soient proportionnelles, ce qui revient à changer d'unité de mesure. Il en va tout autrement dans une relation non homogène dont la validité ne résiste pas à un changement arbitraire de l'unité. Il faudrait admettre alors qu'il existe une unité déterminée par avance, une unité naturelle que telle ou telle grandeur réaliserait dans le monde naturel.

LEGENDRE estimait que, pour les grandeurs géométriques au moins, l'unité

devait pouvoir être choisie à volonté sans que les relations géométriques en fussent affectées. LOBATSCHEFSKI, on va le voir, conteste ce point de vue en termes assez violents.

Comment expliquer l'importance que LEGENDRE accordait à son principe ?

Pour le saisir, il faut revenir à l'idée qu'on se faisait alors d'une grandeur. Reprenons l'exemple du théorème du cosinus : avant d'être une relation entre les mesures des côtés *a*, *b*, *c* et le cos α, la formule (C) était envisagée comme une loi entre les grandeurs correspondantes elles-mêmes. Les grandeurs « de même nature » doivent être imaginées avec une nature qui leur est propre, une *nature spécifique* :

Les grandeurs géométriques prennent place à côté des grandeurs physiques, telles que le temps, la vitesse, la masse, la force, etc., qui ont chacune leur spécificité.

Pour bien comprendre le principe des homogènes, il faut donc se représenter que les relations entre grandeurs doivent avoir la valeur de lois s'établissant aussi entre leurs natures spécifiques. La formulation de ces lois ne peut se faire sans l'intermédiaire de la mesure.

Le principe de LEGENDRE revient à poser que cette formulation doit être invariante quant au choix des unités.

(Cette conception des grandeurs faisait alors assez universellement partie de la doctrine préalable de la science. On en relèvera la trace jusque dans une des citations de GAUSS qui précèdent.)

Le principe des homogènes semble avoir aussi joué un rôle fondamental dans les réflexions de LOBATSCHEFSKI. Celui-ci le rejette, mais cela signifie-t-il qu'il repousse en même temps la conception de la grandeur et des grandeurs dont nous venons de parler ? Tout au contraire : cette conception reste la clé de toute son argumentation. Sans elle, nous aurions peine, me semble-t-il, à retrouver et à reconstituer la pensée de notre auteur. Mais le principe des homogènes lui paraît factice. Il y renonce donc après s'être convaincu de sa non-nécessité.

Voici quelques passages dont ce premier point paraît bien ressortir. LEGENDRE, son principe et même ses autres essais s'y trouvent nettement visés.

« Quelques-unes[1] des théories de la géométrie élémentaire laissent encore beaucoup à désirer et c'est à leur imperfection je crois qu'il faut attribuer le peu de progrès que la science de l'espace en dehors de ses applications a pu réaliser depuis EUCLIDE.

» Je compte parmi les points défectueux l'obscurité qui règne sur les premières notions des grandeurs géométriques et sur la manière dont on se

[1] *Étude géométrique sur la théorie des parallèles*. Traduit de l'allemand par H. HOUËL. (Cet ouvrage de LOBATSCHEFSKI a paru en original, en allemand, à Berlin, en 1840.)

représente la mesure de ces grandeurs ainsi que l'importante lacune que présente la théorie des parallèles et que les travaux des géomètres n'ont encore pu combler. Les efforts de LEGENDRE n'ont rien ajouté à la théorie, cet auteur ayant été forcé de quitter la voie du raisonnement rigoureux pour se jeter dans des considérations détournées et de recourir à des principes qu'il cherche sans raisons suffisantes à faire passer pour des axiomes nécessaires. »

On doit rejeter l'objection selon laquelle il ne doit pas être possible d'exprimer directement les côtés d'un triangle en fonction des angles parce qu'on aurait sans cela à introduire (en géométrie) une unité naturelle des grandeurs linéaires...

Nous y répondons que rien ne s'oppose à ce que l'on envisage les mesures figurant dans les équations comme étant les rapports des lignes à une ligne particulière donnée comme une réalité naturelle plutôt que de les considérer comme les rapports des lignes à l'une quelconque d'entre elles.

C'est là ce que nous avons montré dans notre *Géométrie imaginaire*[1] où les équations s'établissent précisément entre les rapports des lignes à une ligne en principe déterminée, mais que l'observation (si elle pouvait s'y prêter) aurait encore à fixer (p. 79).

LOBATSCHEFSKI reviendra maintes fois sur les raisons de son attitude si radicalement hostile aux essais de LEGENDRE, attitude qui n'est d'ailleurs que la conséquence d'une doctrine très personnelle visant la nature même de la connaissance que nous pouvons avoir du monde réel. Ces raisons, la chose doit être soulignée, il les trouve « au niveau » des lois naturelles.

« L'inutilité[2] des efforts faits depuis EUCLIDE et pendant deux mille ans, écrit-il, éveille en moi le soupçon que c'étaient les notions de base qui ne comportaient pas d'elles-mêmes les vérités qu'on prétendait démontrer.

» ... Il n'est pas douteux, dit-il plus loin, que les forces engendrent à elles seules tout le reste : le mouvement, la vitesse, le temps, la masse, et même les distances et les angles. Tout est en étroite liaison avec les forces, liaison que nous ne comprenons pas dans leur essence; aussi n'avons-nous pas le droit de

[1] GAUSS a porté un jugement très favorable sur la *Géométrie imaginaire* de LOBATSCHEFSKI dans une lettre à SCHUMACHER (traduite par J. HOUËL dans l'ouvrage déjà cité) : « J'ai eu dernièrement occasion de relire l'opuscule de LOBATSCHEFSKI intitulé *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Cet opuscule contient les éléments de la théorie qui devrait exister, et dont le développement formerait un enchaînement rigoureux si la *géométrie euclidienne* n'était pas vraie... Vous savez que depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792) je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de LOBATSCHEFSKI aucun fait nouveau pour moi; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec un véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir. » (Gœttingue, 28 novembre 1846.)

[2] *Neue Anfangsgründe der Geometrie*. (Mit einer vollstandigen Theorie der Parallellinien.) Einleitung, S. 76.

prétendre que, dans une relation entre grandeurs de différentes natures, seuls doivent entrer les rapports de ces grandeurs. Si une dépendance entre les rapports nous paraît admissible, pourquoi n'en devrait-il pas être de même des grandeurs elles-mêmes ? Certains exemples témoignent d'ailleurs en faveur de cette opinion...

» ... Si, par exemple, les forces peuvent dépendre des distances, pourquoi les distances ne dépendraient-elles pas des angles ? Ces grandeurs — ne sont pas moins dissemblables dans un cas que dans l'autre. »

« Notre[1] théorie des parallèles établit entre les lignes et les angles une certaine dépendance dont personne ne peut montrer (comme nous le verrons) si elle est ou non réalisée dans la nature.

» Tout au moins faut-il conclure des mesures astronomiques que toutes les lignes que nous pouvons mesurer et même les distances entre les corps célestes sont très petites en comparaison de la ligne qui joue le rôle d'unité dans notre géométrie. »

Ayant fait allusion à l'étendue illimitée des espaces célestes, LOBATSCHEFSKI en déduit que jamais on ne pourra affirmer que cette unité est trop grande pour s'accorder avec nos mesures.

La remarque suivante confirme ce que nous disions de la dépendance entre grandeurs :

« D'autre part, nous sommes dans l'impossibilité de comprendre comment les choses devraient être dans la nature pour que puisse s'établir une telle liaison entre des grandeurs aussi dissemblables que des lignes et des angles.

» Aussi est-il probable que seuls les énoncés euclidiens soient vérifiés.

» Quoi qu'il en soit, si la géométrie dont nous venons de jeter les bases n'est pas réalisée dans le monde physique, elle n'en existe pas moins en tant que réalité de notre pensée. »

Nous l'avons dit, notre intention est de dégager les traits essentiels de la philosophie géométrique de LOBATSCHEFSKI. On pensera peut-être que nous nous en écartons en faisant une aussi grande place au principe des homogènes de LEGENDRE et à l'opposition radicale que ce principe a éveillé chez LOBATSCHEFSKI. Cette opposition nous révèle, au contraire et du premier coup, un aspect caractéristique de la pensée que nous voulons saisir. Le principe des homogènes se présente à LOBATSCHEFSKI comme une condition imposée arbitrairement aux grandeurs, c'est-à-dire comme une hypothèse illégitime sur les réalités dont il entend lui-même partir. Le rejet de cette hypothèse est en quelque sorte le premier signe d'une intention réaliste, d'une volonté de fidélité au réel dont les grandeurs ne sont que les formes privilégiées.

[1] § 15, p. 22 ss.

LOBATSCHEFSKI est avant tout un réaliste : la géométrie ne doit être elle-même qu'une expression de la réalité. Ayant rejeté le principe des homogènes comme non nécessaire (c'est-à-dire non nécessairement adéquat au réel), ayant d'ailleurs aussi repoussé les autres essais de LEGENDRE de fonder rigoureusement la théorie des parallèles euclidiennes, LOBATSCHEFSKI va-t-il revenir lui-même à l'idéal de la rigueur géométrique dont EUCLIDE avait fixé, pour si longtemps, le modèle ? Tout au contraire. À partir des réalités naturelles, LOBATSCHEFSKI prétend dégager une voie géométrique tout à fait nouvelle, et sa critique s'adressera d'un seul coup à toute la géométrie d'inspiration classique, en remontant même, pour s'y appliquer, jusqu'aux notions primitives sur lesquelles cette géométrie est fondée.

« On avouera, écrit-il ailleurs, qu'aucune discipline mathématique ne commence avec des notions aussi obscures que celles que, suivant l'exemple d'EUCLIDE, on met à la base de la géométrie, et que nulle part en mathématiques on ne tolère une absence de rigueur comparable à celle qu'on a dû admettre dans la théorie des parallèles.

» *Il est vrai que la représentation des choses elles-mêmes que nous avons dans l'esprit nous garde de faire de faux raisonnements en géométrie*[1], à partir de premières notions générales aussi peu claires; nous cherchons aussi les raisons de la justesse des vérités à accepter sans les démontrer dans leur simplicité ou dans leur accord avec l'expérience, par exemple à l'aide d'observations astronomiques; mais jamais on ne pourra satisfaire ainsi un esprit habitué à la rigueur[2]. »

Mais comment LOBATSCHEFSKI va-t-il pouvoir reprendre à son compte l'édification de la géométrie à partir de sa conception toute réaliste de la connaissance ? Le succès de son entreprise paraît tout d'abord d'autant plus problématique qu'il commence par répudier l'essentiel de la tradition géométrique, contestant la rigueur du raisonnement géométrique et se refusant à voir dans son caractère abstrait et rationnel la garantie de sa validité.

« Les premières notions, continue-t-il un peu plus loin[3], avec lesquelles une science, quelle qu'elle soit, entend commencer, doivent être claires et réduites à leur nombre minimum : c'est seulement alors qu'elles peuvent offrir à la discipline une base solide et suffisante.

» Les notions de ce genre sont acquises par l'exercice des sens, on ne saurait se fier aux idées innées. »

À elles seules, ces deux citations marquent déjà un changement radical du climat géométrique.

[1] *Über die Anfangsgründe in der Geometrie*. Einleitung.
[2] *Ibid.*, § 1.
[3] *Neue Anfangsgründe der Geometrie*. Einleitung, p. 80.

Mais à quoi donc tient l'insuffisance et l'obscurité des notions géométriques traditionnelles (notions que l'on se plaisait à donner comme des exemples de parfaite clarté). La raison, répond LOBATSCHEFSKI, en est précisément leur caractère abstrait.

« En un mot : espace, étendue, lieu, corps, surface, ligne, point, direction, angle sont des mots avec lesquels on commence à faire de la géométrie, mais auxquels n'est jamais liée une notion claire et précise.

» On peut cependant regarder toutes ces choses d'un autre point de vue. Il faut remarquer que l'obscurité de ces notions est le fait de leur caractère abstrait, caractère qui devient superflu lorsqu'il s'agit de mesures véritables, et qui par conséquent a été inutilement introduit dans la théorie. »

Mais si l'on rejette l'édification déductive de la discipline géométrique, quelle sera donc la méthode qui permettra de la construire ? Les citations qui précèdent sont déjà révélatrices à cet égard. Qu'on veuille bien y remarquer le rôle attribué à l'activité sensorielle dans la formation de nos connaissances assurées. Ce rôle est décisif. LOBATSCHEFSKI admettra bien que, dans leur saisie du réel, les sens puissent être aidés par des moyens artificiels. Le jugement de nos sens n'en reste pas moins l'instance dernière et définitive.

Le passage suivant prépare l'intervention des deux notions auxquelles LOBATSCHEFSKI rattachera toute sa construction géométrique, le corps et le contact.

« Les surfaces, les lignes et les points qu'on définit en géométrie n'existent que dans notre imagination...

» C'est pourquoi nous n'avons à parler des surfaces, des lignes et des points que suivant le rôle qui leur revient dans les mesures vraiment effectuées. Nous n'aurons alors à nous en tenir qu'aux seules notions qui dans notre entendement se rattachent directement à la représentation que nous avons des corps que nous utilisons couramment, et que nous trouvons directement réalisées dans la nature, sans avoir à nous arrêter tout d'abord à d'autres notions étrangères et artificielles[1]. »

(On croit entendre ici par avance : l'énoncé des thèses du réalisme opérationnel de certains physiciens modernes.)

« ... Il n'existe dans la nature ni ligne droite, ni ligne courbe, ni surface plane ni surface gauche, on n'y rencontre que des corps, de sorte que tout le reste n'est que création de notre imagination et n'existe que dans la théorie[2]. »

La façon dont LOBATSCHEFSKI imagine que les notions à la fois simples et adéquates au réel nous sont en quelque sorte apportées par l'activité des sens équivaut à un principe d'abstraction. On ne peut s'empêcher de songer, par

[1] *Neue Anfangsgründe*. Einleitung, p. 80.
[2] *Ibid.*

comparaison, au principe d'abstraction de la philosophie aristotélicienne ou de la philosophie thomiste. La philosophie lobatschefskienne présente cependant certains caractères qui lui sont propres. Elle tient par exemple les idées de surface, de ligne, de point, etc., c'est-à-dire les notions primitives habituelles de la géométrie, pour obscures et pour capables de nous induire en erreur, ajoutant même que leur obscurité provient de leur caractère abstrait.

Elle reçoit, en revanche, l'idée de corps géométrique et la notion de contact entre les corps comme des conceptions totalement assurées, dans lesquelles s'exprime immédiatement un certain aspect, l'aspect géométrique des choses réelles. L'idée de corps géométrique est-elle véritablement moins abstraite que les autres idées primitives que LOBATSCHEFSKI rejette ? Pour nous, le corps géométrique est à l'égal de l'idée de droite, une idée abstraite et schématisante.

Pour nous, ces deux notions sont l'une et l'autre sommairement adéquates au réel qu'elles visent. Nous pourrions dire aussi, en prenant les choses par un autre bout, que la droite réalisée par un rayon lumineux ne nous paraît pas moins réelle qu'un corps réalisé par une certaine distribution de molécules.

C'est d'ailleurs le choix des deux notions primitives, de corps et de contact, de préférence aux notions classiques, qui donne son caractère propre à la doctrine géométrique de LOBATCHEFSKI.

« Entre toutes les propriétés qui sont communes à tous les corps, il en est une qui doit être nommée géométrique : le contact.

» Rendre complètement par des mots ce que nous entendons par là n'est pas possible : la notion nous est fournie par les sens, nous comprenons ce dont il s'agit. La faculté d'être en contact est une propriété caractéristique des corps; nous ne la retrouvons ni pour les forces, ni pour le temps, ni nulle part ailleurs dans la nature. Si l'on fait abstraction de toutes les autres propriétés d'un corps, ce qui reste est un corps géométrique[1]. »

Il faut cependant bien que LOBATSCHEFSKI rejoigne les notions habituelles de la géométrie. Comment s'y prendra-t-il ? L'idée qui va le lui permettre est celle d'une coupe à travers un corps géométrique.

« Nous appellerons une coupe le partage (fait en pensée) d'un corps en deux parties. Chacune des parties détermine un côté de la coupe. On parvient aux propriétés des corps en les décomposant de différentes façons en parties[2]. »

La coupe conduit à l'idée de surface. En recoupant une coupe on obtiendra une ligne, et en recoupant une ligne, c'est finalement au point qu'on parviendra. Mais cette façon de voir ne conduit-elle pas à une contradiction avec ce que nous disions tout à l'heure, avec LOBATSCHEFSKI, de la surface, de la ligne et du point ?

[1] *Anfangsgründe der Geometrie*, § 1, p. 2.
[2] *Ibid.*, § 2, p. 3.

Pour être introduites au moyen de l'idée de coupe, celles-ci cessent-elles d'être des notions abstraites, et par conséquent obscures ?

La pratique des coupes et des recompositions va-t-elle nous permettre de rejoindre la rigueur et la clarté sans lesquelles il n'y a pas (selon LOBATSCHEFSKI) de science véritable ? Pas encore : les coupes à travers les corps sont des opérations qu'on fait *en pensée*; nous sommes donc encore dans l'abstrait (donc dans l'obscur), et nous n'avons pas encore touché le fondement concret des certitudes.

On se demandera si, dans ces conditions, il était bien indiqué de renoncer aux notions à la fois intuitives et traditionnelles et si le recours aux notions de corps, de contact et de coupe a vraiment créé une situation nouvelle. C'est cependant ici que se place le tournant décisif. LOBATSCHEFSKI estime que les trois notions qu'il admet sont les seules à permettre une bonne saisie des opérations de mesure. Or c'est par la mesure que le passage du géométrique au numérique est assuré.

Pour traduire la géométrie en équations, il faudra attribuer des mesures bien définies aux grandeurs : c'est à cette condition que la théorie se fera rigoureuse : mais la pratique ne suivra pas la théorie jusqu'aux limites de la précision mathématique. En fait, et pour ce qui concerne l'interprétation réelle des équations, les variables n'y seront jamais fixées qu'avec une certaine marge d'indétermination. Ce sont des grandeurs *ouvertes*, c'est-à-dire fixées approximativement et toujours capables d'une plus fine détermination :

« On[1] mesure un corps en le partageant en parties égales, en même temps qu'un autre corps qu'on prend comme unité; on forme ensuite le rapport du nombre de ces parties qui sont comprises dans le corps au nombre de celles qui sont contenues dans l'unité. La possibilité de déterminer la grandeur d'un corps présuppose donc la possibilité de reconstruire ce corps à l'aide d'un certain nombre d'exemplaires (adjacents les uns aux autres) d'un seul et même corps unité.

» Si la chose n'est pas exactement possible, on commencera par donner une certaine forme au corps-unité, puis on le décomposera en parties qui, devant rester égales entre elles, pourront être aussi petites qu'on le voudra — et cela de telle façon qu'en accolant les uns aux autres un nombre suffisant d'exemplaires du corps et de ses parties on puisse former un corps d'un seul tenant remplissant l'espace jusqu'au-delà de toutes bornes qu'on aurait fixées. Dès lors, on pourra, par le même procédé, former un corps quelconque jusqu'au degré de congruence au-delà duquel nos sens cessent de distinguer une différence. »

[1] Chap. I : *Les premières notions de la géométrie*, § 2, p. 87.

« Pour les surfaces bordées par des lignes courbes ou pour des volumes limités par des surfaces courbes, il n'y a pas non plus de mesure au sens strict du mot, si c'est la première fois un carré, et la seconde un cube qui doive servir d'unité. Tant que notre intention se borne à chercher la limite dont la mesure réelle peut s'approcher, il suffit de montrer qu'une telle limite existe sûrement; mais ensuite il nous faut indiquer comment imaginer le procédé de mesure qui devra nous mettre en état d'atteindre la précision voulue. Pour que ces exigences puissent être remplies, il faut nécessairement adopter un certain nombre de règles préalables, qui auront à jouer le rôle d'axiome :

» 1. Deux surfaces sont égales si on peut les recomposer l'une et l'autre à l'aide des mêmes parties, l'ordre de ces parties n'étant pas nécessairement le même dans l'une et dans l'autre.

» 2. Une portion de surface est plus petite qu'une autre, si elle trouve complètement place dans cette dernière sans la recouvrir totalement.

» 3. La surface de tout triangle s'annule si l'un de ces côtés s'annule.

» Des règles analogues sont aussi indispensables dans le calcul des volumes. »

Le mot d'axiome surprend ici comme un élément étranger. Nous y reviendrons un peu plus loin. En adoptant les règles précédentes on va pouvoir attribuer une mesure exacte ou une mesure-limite précise à tel ou tel corps *selon la représentation que nous en avons dans l'esprit*, que ce soit par exemple une pyramide ou une sphère. Par l'intermédiaire des coupes, la mesure pourra s'étendre aux surfaces et aux lignes. La géométrie ainsi arithmétisée est désormais une science rigoureuse : l'intervention du calcul engendre la rigueur.

Mais le but du géomètre est-il ainsi complètement atteint ? Certes non, puisque la rigueur à laquelle on atteint ainsi se rapporte à la représentation que nous nous faisons des choses, et non aux grandeurs réelles qui sont cependant celles que le géomètre réaliste doit viser.

Il reste donc à articuler la connaissance sensible et l'activité opérationnelle à l'aspect numérique.

Or, la première remarque à faire, c'est que la connaissance que les sens nous procurent ne comporte pas une précision absolue. Même aidée d'instruments adéquats, elle laisse toujours, au contraire, une certaine marge d'indétermination. La géométrie rigoureuse n'est donc qu'un cadre où vient s'insérer, de façon plus ou moins fine, mais jamais totalement exacte, l'activité sensorielle ou opérationnelle.

Après avoir rappelé dans quelles conditions la mesure doit s'opérer, LOBATSCHEFSKI ajoute, par exemple :

« Il[1] serait d'autre part impossible et sans utilité d'ajouter et de compter des

[1] § 38, p. 110.

parties trop petites pour que nos sens puissent les distinguer. En choisissant l'unité, il faut donc aussi fixer quelles seront les parties de l'unité qui, à cause de leur petitesse, pourront être négligées. Supposons, par exemple, qu'on ait pris b comme unité et que des parties plus petites que b sur m puissent être négligées. Nous n'avons alors qu'à prendre une ligne de grandeur $m - a$ et de porter sur celle-ci la grandeur b autant de fois que cela sera possible. Supposons qu'après n-fois le reste soit plus petit que b. En le négligeant, nous obtenons alors $\frac{n}{m}$ comme étant le rapport des lignes a et b.

» ... L'exactitude des mesures et des calculs pourra être poussée aussi loin qu'on voudra, compte tenu cependant des limites que nous impose l'imperfection de nos sens, limite que nous avons cependant la liberté de déplacer par l'habileté avec laquelle nous mettrons des moyens supplémentaires en œuvre. »

Mais l'écart inévitable entre le cadre numérique rigoureux et la connaissance sensorielle et opérationnelle ne tient pas seulement à l'imprécision des données fournies par les sens et les instruments de mesure : elle tient à plus profond que cela. La constitution même du réel ne se prête pas à une saisie par des parties aussi petites qu'on a la faculté de les imaginer. Par l'intermédiaire des grandeurs géométriques, la connaissance du réel ne peut avoir qu'un caractère sommaire.

« Dans la nature, écrit LOBATSCHEFSKI, il n'y a en effet aucune structure continue. Par conséquent aucune loi de formation (telle que l'on se la représentait tout d'abord pour un ensemble de grandeurs) ne pourra être maintenue jusque dans les plus petites parties. »

Remarquons-le en passant : cette façon de voir enlève toute acuité au problème des rapports irrationnels. « Il est vrai, dit LOBATSCHEFSKI, que nous engendrons dans notre imagination des corps incommensurables. Il suffira pour les traiter de faire des conventions adéquates quant au plus grand et au plus petit. (C'est ainsi, d'ailleurs, qu'EUDOXE maîtrisait les rapports irrationnels.) Quant aux mesures, on pourra les faire tenir entre deux bornes qu'on pourra choisir aussi rapprochées qu'il le faudra. »

Des géomètres dont nous avons parlé, LOBATSCHEFSKI n'est pas le premier pour lequel la géométrie juste est celle qui se réalise dans la nature. Il n'en reste pas moins que ce point de la doctrine préalable prend chez lui un relief tout nouveau. Dans la philosophie géométrique lobatschefskienne, la géométrie science-de-l'espace ne se réduit totalement ni à son cadre numérique rigoureux, ni à son aspect expérimental ouvert (sensoriel et opérationnel). Dans son intégrité, la discipline géométrique est une synthèse toute guidée par une intention réaliste.

On comprendra donc qu'une certaine analyse des procédés de mesure ne soit pas seulement un complément d'importance secondaire, mais bien une partie intégrante de la discipline.

À la page 112, LOBATSCHEFSKI fait observer que l'exactitude d'un ensemble de mesures tient à deux facteurs qui agissent en sens contraire l'un de l'autre : à la précision par laquelle l'erreur de chaque opération peut être diminuée, et au nombre des opérations où les erreurs s'additionnent. La mesure la meilleure correspond à un certain équilibre optimal entre ces deux facteurs. La convenance d'un procédé de mesure devra donc être jugée premièrement sur la façon dont il permet de corriger les erreurs des sens, et deuxièmement sur la façon dont il amène les erreurs à se sommer. Mais, quelles que soient les procédures mises en œuvre, il existe une borne au-delà de laquelle l'exactitude ne peut pas être poussée.

Dans la théorie, on pose que cette borne existe fatalement, mais en même temps pour indéterminée et même pour arbitraire. C'est pourquoi l'on y considère le rapport de deux grandeurs comme étant le rapport de deux nombres entiers — mais pas avant qu'un procédé de mesure ne soit véritablement connu.

Cette intégration du procédé de mesure à la discipline elle-même nous semble devoir être soulignée : elle confirme ce que nous disions il y a un instant du caractère indissoluble de la synthèse de la rigueur théorique et de l'ouverture expérimentale dans la doctrine lobatschefskienne.

Est-il possible d'intégrer la doctrine géométrique, la philosophie géométrique de LOBATSCHEFSKI dans notre propre perspective ? Il est clair qu'elle représente elle-même un essai de synthèse dialectique. Elle représente évidemment un essai de synthèse dialectique qui va plus loin que ce que nous avons nommé notre première synthèse dialectique. L'idée directrice paraît en être de ne pas accorder à l'aspect théorique une portée qui dépasse la connaissance (toujours sommaire et en devenir) que les procédés de mesure peuvent nous donner du monde réel.

L'accord ainsi réalisé entre l'aspect théorique et l'aspect expérimental doit cependant être payé d'un très haut prix : la synthèse lobatschefskienne se voit obligée de rejeter comme obscur et indigne de confiance presque tout le côté intuitif de notre connaissance. Ce n'est que par un long détour à travers l'expérimental qu'elle pourra s'intégrer les connaissances de notre horizon naturel.

Il est d'ailleurs douteux qu'une aussi stricte éviction de tout élément d'évidence puisse être maintenue : dans l'exposé même de LOBATSCHEFSKI, on trouve maintes traces d'une intervention plus ou moins masquée de l'intuition spatiale. Citons-en seulement deux exemples :

a) L'espace, dit-il, n'existe que dans notre imagination. Il n'hésite cependant pas à poser qu'en adjoignant un nombre suffisant de fois un corps unité à lui-même et à ses parties, on puisse remplir une portion de l'espace. De quel espace s'agit-il ?

b) LOBATSCHEFSKI, nous l'avons vu, se voit obligé de faire intervenir un

certain nombre d'axiomes. Mais, dans sa doctrine, le statut de l'axiome n'a pas été précisé. Il est douteux qu'il y soit précisable.

Il nous paraît assez juste de dire que nos deuxièmes et troisièmes synthèses dialectiques réalisent l'intention de LOBATSCHEFSKI sans avoir à renoncer à notre propre insertion dans le monde naturel.

194. MORITZ PASCH (1843-1930). *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, 2e éd. 1912. — *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, 27, 1918 : *Über die Forderung der Entscheidbarkeit*.

À PASCH est due une place dans ces considérations historiques par le fait que ses travaux marquent la fin d'une évolution des conceptions géométriques, orientée vers la géométrie projective, et le commencement de l'évolution moderne tendant à établir les fondements logiques des mathématiques.

C'est dans la période qui va de la découverte par CAYLEY (1859) des métriques projectives, aux travaux de KLEIN (1871) sur les modèles projectifs des géométries euclidiennes et non euclidiennes qu'une nouvelle conception très générale de la géométrie s'était fait jour, qui consistait essentiellement à tenir pour fondamentale la seule géométrie projective. L'euclidicité traditionnelle qui avait dominé l'idée de réalité spatiale s'était finalement subordonnée à la projectivité en devenant interprétable comme cas singulier des modèles projectifs, ce qui d'ailleurs permettait d'élucider la question de l'indépendance du postulat des parallèles, il est vrai d'une manière verbale seulement, en termes de projectivité. Les géomètres s'étaient donc accoutumés à l'idée que la ligne de légitimité géométrique devait passer par la discipline intermédiaire de la géométrie projective, considérée comme productrice de modèles réinterprétables ensuite dans leur signification spatiale; alors que la ligne de légitimité traditionnelle allait, comme chez EUCLIDE, directement, sans discipline interposée, d'une base axiomatique, rendue évidente par la réalité de l'espace, à ses conséquences.

Il faut remarquer ici qu'une légitimité géométrique à base projective impliquait naturellement que le projectif pouvait être conçu en soi, indépendamment de l'euclidicité, plus particulièrement du postulat des parallèles. En fait ce n'était que progressivement, au fur et à mesure, qu'il devenait l'instrument principal de la géométrie que l'espace projectif se libérait. de l'euclidicité traditionnelle. Sans vouloir faire l'histoire de la géométrie projective, disons simplement que les initiateurs en cette discipline, tels que PONCELET et CHASLES définissaient le projectif à l'aide de l'euclidien, sans se poser encore la question de savoir si celui-ci était nécessaire pour concevoir celui-là; que le BOLYAI de la dernière période paraît s'y être intéressé, mais que ce fut VON STANDT (1847, *Geometrie der Lage*) qui, le premier, vit la possibilité

d'abstraire le projectif de la seule linéarité par une séparation complète des propriétés métriques et des propriétés graphiques des figures. Jusqu'à ce que KLEIN eut reconnu (1871), en donnant ses modèles projectifs, qu'on peut fonder la géométrie projective sans recourir au postulat d'EUCLIDE, l'idée de rechercher la légitimité géométrique dans le projectif devait rester non formulée, bien que dominante par la tendance générale et soutenue par des succès de méthode tels que la construction des métriques de CAYLEY.

Finalement, la description la plus précise et la plus générale des nouvelles conceptions fut donnée par KLEIN encore dans son « programme d'Erlangen » (1872-1873). Déclarant qu'une géométrie doit être définie en termes d'invariants d'un groupe de transformations, il se trouvait en mesure d'expliquer clairement la géométrie projective, comme discipline fondamentale ainsi que la possibilité de représenter les différentes géométries comme modèles projectifs en remarquant que les groupes de mouvements correspondants étaient des sous-groupes du groupe projectif.

Avec PASCH on assiste à un rétablissement de la ligne directe de légitimité géométrique, non pas précisément dans sa signification traditionnelle, mais bien dans une signification analogue, et cela dans le temps même où KLEIN présente la légitimité géométrique comme garantie par l'espace projectif (programme d'Erlangen 1872-1873; les cours de PASCH furent donnés à Giessen en 1873-1874 et publiés en 1882). PASCH réintroduit la méthode axiomatique, dans un sens il est vrai assez différent de celui d'EUCLIDE. Pour celui-ci, la géométrie était une discipline rationnelle, le modèle même d'une discipline rationnelle. PASCH, outre qu'il axiomatise la géométrie projective, la « *neuere Geometrie* » précisément, et des notions, telles que l'ordre, qu'EUCLIDE ne nommait pas, prétend d'abord en faire une science naturelle de l'espace. Il dit dans la préface de la première édition de ses *Vorlesungen über neuere Geometrie* : « Dans les tentatives qui ont été faites jusqu'ici de donner aux parties fondamentales de la géométrie une forme qui réponde à des exigences devenant plus rigoureuses avec le temps, l'origine empirique de la géométrie n'a pas été mise en valeur de manière pleinement décisive... On a beau rattacher à la géométrie toutes sortes de spéculations; le succès constant des applications de la géométrie aux sciences naturelles et à la vie pratique est dû en tout cas au fait qu'à l'origine les concepts géométriques correspondaient exactement aux objets empiriques, bien qu'ils eussent été recouverts peu à peu par un réseau de notions artificielles propres à favoriser les développements théoriques; et si l'on s'en tient tout d'abord au noyau empirique de la géométrie, le caractère d'une science naturelle lui reste acquis, mais elle se distingue des autres sciences naturelles par le fait de n'utiliser qu'un nombre très restreint de notions et de lois tirées immédiatement de l'expérience. »

Si l'on serre maintenant de plus près les considérations de PASCH, on

s'aperçoit qu'il ne tient pas, cependant, la géométrie-science naturelle pour réalisée immédiatement et exactement par les corps et les figures réels. Ce seront donc des notions abstraites que l'examen des objets réels évoquera en nous, et ce sera entre ces notions abstraites que la géométrie établira des relations « vraies » telles qu'un axiome (« *Grundsatz* » ou *Kernsatz*) ou un théorème.

Voici par exemple comment il introduit la notion abstraite de point (fin de l'introduction, *loc. cit.*) :

« Dans un corps que nous nommons « cubique » nous pouvons distinguer les faces, les arêtes, les sommets, etc., et les mettre en relation. Par contre la « distance » de deux corps reste mal déterminée tant qu'il est possible de distinguer des parties de l'un de ces corps sans sortir des limites d'observation qu'imposent les moyens et les fins de l'observation. Ces limites varient avec le cas considéré. Un même corps qui dans telle circonstance peut être pris pour un tout ne peut plus l'être dans telle autre; ces parties deviennent alors des composantes d'un système qui doit être examiné d'un point de vue géométrique.

» Mais nous appellerons toujours points les corps dont une décomposition en parties est incompatible avec les limites d'observation. »

Sur la base de sa doctrine préalable et de son procédé d'abstraction, PASCH axiomatise. Voici encore la voie qu'il suit pour arriver aux axiomes « de la ligne droite » :

Remarquant d'abord que l'idée d'une droite indéfinie est insoutenable comme ne correspondant à aucun objet de l'expérience sensible et que celle-ci ne donne au contraire que l'idée de segment rectiligne, il énoncera tous ses axiomes d'incidence en termes de points et segments rectilignes rejoignant en ceci les idées de KLEIN selon lequel une géométrie projective peut être fondée en un certain sens dans le fini, et donc sans le postulat des parallèles. Cela étant acquis, les axiomes, affirme-t-il, lui sont « fournis » par les observations les plus primitives. Ses premiers axiomes sont ainsi :

Axiome I. — Entre deux points on peut toujours tirer un segment rectiligne et un seul.

Axiome II. — On peut toujours donner un point à l'intérieur d'un segment rectiligne.

Axiome III. — Si un point C est à l'intérieur du segment AB, le point A est à l'extérieur du segment BC.

Axiome IV. — Si le point C est à l'intérieur du segment AB, alors tous les points du segment AC sont aussi des points du segment AB.

Axiome V. — Si le point C est à l'intérieur du segment AB, alors un point qui n'est ni sur AC ni sur BC ne peut pas être sur AB.

Il ajoute immédiatement à ces premiers cinq axiomes cette remarque, qui s'impose autant que ces derniers par sa vérité empirique, que si le point C est

à l'intérieur de AB, D à l'intérieur de BC, alors C est à l'intérieur de AD. C'est son premier théorème, dont il montre qu'il est une conséquence des axiomes III, IV, V.

Si PASCH en était resté là, on pourrait dire qu'il aurait à peine dépassé la première synthèse dialectique. Son axiomatisation pourrait être appelée une axiomatisation par abstraction essentielle, en accord avec la doctrine de l'abstraction de la philosophie réaliste.

Cependant les idées de PASCH durent certainement suivre une évolution dont on s'aperçoit qu'elle s'est arrêtée à deux stades successifs.

Le premier est marqué par la conception chez PASCH d'une variante plus précise de sa théorie axiomatique produite à la fois par ses réflexions auxquelles il était forcé pour la conduite de ses travaux et un examen toujours renouvelé de l'« exigence de décidabilité » de KRONECKER (1823-1891). D'après celle-ci, une définition, pour être acceptable, doit être accompagnée d'un procédé déductif qui lui soit propre et qui permette pour chaque cas proposé de décider par une suite finie de déductions si la définition est applicable à ce cas ou non. Par exemple la définition usuelle du nombre premier satisfait à cette exigence. Car il existe un procédé de calcul, la division qui permet de décider par une suite finie de vérifications si un nombre donné est premier ou non.

Faisant allusion à ses différents travaux dans la deuxième édition (1912) de ses *Vorlesungen über neuere Geometrie* il dit : « Lorsque je commençais ces travaux, l'exigence de décidabilité de KRONECKER m'était bien connue, mais je n'en avais pas vu une justification et ne l'approuvais pas. Mais cependant que ces considérations avançaient et m'obligeaient à « décomposer mes raisonnements », je fus conduit à examiner sérieusement cette exigence et reconnus finalement qu'elle ne peut être rejetée si l'on veut être exact, lorsqu'il s'agit de poser le premier fondement d'une édification axiomatique des mathématiques. Si parfois, dans de telles constructions, un système quelconque de notions mathématiques et de théorèmes, comme ceux qui sont relatifs aux nombres naturels, est présenté comme un tout achevé, j'ai pour mon compte développé l'idée qu'on ne peut formuler un jugement sur le fondement des mathématiques sans une décomposition exhaustive de tels systèmes. »

Il suit de cela qu'un axiome, dans l'idée nouvelle que PASCH s'en faisait à la publication de sa deuxième édition, n'était plus conçu comme simplement « fourni par les observations les plus primitives », mais aussi comme résidu définitif d'une dissociation (« *Atomisieren* », dit PASCH dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*) de la substance mathématique, dissociation suivant un nombre fini des réductions, d'après l'exigence de décidabilité.

À ce stade donc sa théorie axiomatique s'inspire de deux idées dominantes : premièrement dissociabilité finie, des notions mathématiques livrées par

l'expérience sensible, deuxièmement construction axiomatique basée sur une certaine doctrine de l'abstraction des notions, réduites au niveau de ces notions. On pourrait dire aussi, plus simplement : axiomatisation par réduction et abstraction, ou axiomatisation analysante.

La théorie axiomatique de PASCH est ainsi d'une clarté remarquable.

Mais elle ne dépasse pas encore le niveau de la première synthèse dialectique.

Elle est donc exposée à toutes les critiques qui nous ont fait dépasser cette première synthèse. Il faut remarquer cependant qu'elle contient implicitement une synthèse entre le réel et son expression géométrique, structurée.

Le second stade auquel PASCH s'efforça de stabiliser sa théorie axiomatique paraît avoir été déterminé, sans qu'il soit possible de le vérifier directement, par la connaissance des *Grundlagen* de HILBERT (1902). Comme il l'explique dans le *Jahresbericht der deutschen Mathemaliker-Vereinigung* (27, 1918), il avait déjà reconnu en 1882, en rédigeant ses *Vorlesungen*, qu'une démonstration géométrique n'est satisfaisante que si elle peut être conduite en l'absence de figures dessinées ou simplement pensées, ce qui doit signifier que les déductions successives qui constituent la démonstration seraient aussi valables pour un « être pensant », ignorant des notions géométriques. Toute la géométrie doit donc conserver sa cohérence logique lorsqu'on remplace chaque notion géométrique comme « Point », « Droite », et cela déjà dans les axiomes, par des « étiquettes » (*Decknamen*) telles que « chose-P », « chose-D ».

Par cette nouvelle démarche théorisante, PASCH accède à l'horizon de la chose quelconque et réalise la deuxième synthèse dialectique. Il ajoute que la possibilité de concevoir ainsi la démonstration comme simple opération logique sur les choses, présuppose encore une dissociation totale des modes de raisonnements. C'est au fond se rallier aux tendances formalisantes. Mais nous ne connaissons pas de passage dans les écrits de PASCH qui indiquerait avec évidence qu'il sentait la différence entre sa première et cette dernière conception de la méthode axiomatique.

Quoi qu'il en soit, PASCH a rendu à la géométrie son caractère de synthèse, qui s'était quelque peu effacé depuis le succès des méthodes analytiques, et renouvelé la légitimité méthodologique.

Disons ici pourquoi nous n'avons pas à commenter dans cet exposé historique HILBERT et ses *Grundlagen der Geometrie*, que nous venons cependant de citer.

Si nous terminons avec PASCH, c'est qu'il se place à la fin d'un premier grand épisode de la crise de la légitimité en géométrie. HILBERT en ouvre un autre en dépassant, et de loin, ce premier retour à l'axiomatique. Abandonnant décidément un problème de l'espace pris dans son intégrité pour n'en retenir que l'aspect théorique, il va jusqu'à préciser cet aspect dans une vue spécifiquement logique, et donne ce qu'on peut appeler un modèle logique de la géométrie. La nouvelle problématique qu'il propose est une problématique de la méthode plus que de l'espace. Elle sera traitée sous le titre *La géométrie et le problème de la méthode*.

Les idées de HILBERT sont donc très éloignées de celles de PASCH qui restait engagé dans une conception assez scolastique du réel.

D. Conclusions

Il y a presque dix ans que paraissait le premier cahier de cet ouvrage. Nous voici maintenant arrivés au but que nous nous étions fixé. Dix ans de réflexions soutenues suffisent parfois pour qu'une pensée prenne une orientation toute nouvelle. Heureux celui dont l'effort se rajeunit dans sa propre révision. En dirons-nous autant de la tentative qui nous a menés jusqu'ici ?

Dès les premières pages du premier de nos six chapitres, nous avions indiqué dans quelles intentions nous allions entreprendre notre étude.

Nous en avions même esquissé d'avance les grandes lignes et indiqué les principales étapes de notre progression. Ce plan a-t-il dû être modifié en cours de route ? Nous a-t-il été possible de rester fidèle jusqu'au bout à l'idée générale que nous nous faisions alors de la question ? Certes, tout n'était pas d'avance exactement en place, et sur bien des points nous n'avions pas prévu la façon dont les choses allaient se préciser : pour nous non plus, « l'expérience géométrique » que nous disions vouloir tenter n'était pas complètement faite dès le départ. Et, pourtant, nous n'avons pas l'impression que nos intentions du début aient eu trop à souffrir d'avoir duré si longtemps : notre plan s'est réalisé sans que nous ayons eu à le retoucher sensiblement. Les résultats et les enseignements qu'on peut en tirer ne diffèrent guère de ceux que nous avions escomptés.

L'expérience que nous avons tentée

En un mot, les conclusions sont celles que nous espérions. C'est pourquoi nous trouvons juste de revenir avec plus d'assurance sur le problème que nous nous posions, sur la façon dont nous l'avons traité, sur les résultats auxquels nous sommes parvenus et sur les conclusions qui peuvent en être dégagées.

Esquissons tout d'abord la situation à laquelle ce problème appartient, la situation qui lui confère son sens et sa portée.

La question de la méthode

Si l'on avait prétendu, au commencement de ce siècle, qu'il était temps d'écrire un *Nouveau Discours de la Méthode*, du côté de la science, personne ou presque personne n'aurait pris cette affirmation au sérieux. N'avait-on pas mis au point, dans l'appui mutuel que se portent les raisonnements théoriques et les procédures expérimentales, la plus sûre et la plus définitive des méthodes pour découvrir la vérité dans les sciences ?

Et pourtant, en l'espace d'un quart de siècle, la recherche allait mettre en évidence un certain nombre de faits qui devaient modifier radicalement toute la perspective. Ces faits sont bien connus, aussi suffira-t-il ici de quelques brèves indications.

Du côté de l'abstrait, tout d'abord, l'intention de clarifier les fondements semblait devoir trouver son achèvement dans la théorie des ensembles et dans la logique mathématique. Sans avoir eu conscience de s'être égaré ou d'avoir fait une erreur de méthode, les mathématiciens et les logiciens y rencontrèrent les paradoxes aujourd'hui classiques.

Le souci de ne pas transiger avec l'évidence avait déjà conduit à l'édification des géométries non euclidiennes. Il devait engendrer la scission des mathématiques en mathématiques classiques et mathématiques intuitionnistes.

Sur la ligne de sa plus stricte authenticité, la recherche mathématique était ainsi ramenée aux *problèmes de la méthode dans les sciences mathématiques ou plus généralement dans les disciplines rationnelles*.

Du côté des sciences physiques, la volonté d'objectivité et le souci d'une précision croissante dans les mesures devaient aboutir aux conceptions de la physique relativiste et de la physique quantique.

Or celles-ci ne font pas que revenir sur les vues du sens commun et sur les conceptions de la physique classique pour les étendre, pour les compléter et pour les préciser : elles les remettent en question jusque dans leurs fondements. Même sur l'idée du réel les esprits sont divisés. Bien plus, on ne s'accorde plus sur les moyens que l'on aurait de se mettre d'accord.

La question de la méthode se pose ainsi dans des conditions toutes nouvelles en physique et dans les disciplines où l'expérimentation systématique joue un rôle irréductible. Il ne s'agit pas, soulignons-le, de satisfaire en physique à des exigences inédites et venues d'ailleurs, mais de retrouver une conception de la science et de la connaissance scientifique qui satisfasse aux exigences nées des pratiques mêmes de la recherche du réel, en physique.

La question de la méthode se pose également en biologie, en psychologie, en sociologie : en un mot, c'est sur tout le front de la recherche que le besoin d'un nouveau discours de la méthode se fait sentir.

Voulons-nous dire que ce besoin a été généralement méconnu, et qu'on n'a rien fait pour éclaircir la situation ? Ce serait contraire à la vérité. Mais la plupart des essais faits jusqu'ici n'ont pas abouti, et ne semblent pas devoir aboutir. Ils sont loin d'être sans mérite. Chacun d'eux représente une expérience de valeur. Sous des angles divers, ils éclairent tous l'œuvre à accomplir. Mais aucun n'en fixe de manière satisfaisante les lignes directrices.

Expérience et théorie dans le nouveau discours

Par ailleurs, il y a certains points sur lesquels l'hésitation n'est plus permise. La recherche de la connaissance scientifique dont le nouveau discours devrait établir le statut est un alliage

d'expérience et de théorie. La situation actuelle nous fait une obligation de tenir compte de l'une et de l'autre de ces deux composantes. Il est également arbitraire de poser la primauté du rationnel ou la priorité de l'empirique en doctrine préalable. Il est au contraire fondamental de dire et de décrire comment le rationnel et l'empirique peuvent s'accorder et se compléter. Mais comment saura-t-on que ce qu'on en dit est juste ? Le saura-t-on par évidence, ou si ce n'est pas le cas, ne retombera-t-on pas dans un problème de justification dont les données sont encore très obscures ? Pour être au bénéfice d'une doctrine plus ou moins juste, il faut naturellement l'avoir imaginée; mais il ne suffit pas de l'imaginer pour qu'elle soit fondée.

On peut imaginer, par exemple, que la situation se dénouera et se renouera d'elle-même lorsqu'on aura réussi à séparer les deux composantes l'une de l'autre et à bien reconnaître ce qui fait le caractère propre de chacune d'elles.

Les garanties offertes par les procédures formalisatrices

On pensait avoir trouvé le moyen de constituer le cadre théorique dans son autonomie (et d'écarter du même coup la possibilité de tout paradoxe) : les procédures formalisatrices de la logique moderne semblaient en offrir la garantie. Les recherches sur le sujet ont ouvert une nouvelle voie à la réflexion mathématique, mais elles ont en même temps fait voir que le but qu'on s'était primitivement fixé ne pouvait pas être rejoint de cette façon. Pour assurer la science du formel dans son autonomie, il aurait fallu pouvoir démontrer deux théorèmes fondamentaux : le théorème de la non-contradiction et celui de la décision dans les systèmes formels. Or les moyens mêmes qui devaient en assurer la démonstration permirent au contraire d'établir que ces démonstrations ne pouvaient pas, en général, être établies par ces procédés.

Sur l'un de ces points essentiels, la doctrine imaginée est donc mise en échec. Qu'en est-il du second : de l'autonomie de l'empirique ? Est-il plus facile de dégager ce qui fait le bien-fondé, la sécurité et l'univocité d'un jugement de fait ? Il n'en est rien. On en a bien souvent fait la remarque : le sens et la portée d'un jugement de fait ne sont pas déterminés de façon inconditionnelle et univoque. Ils dépendent, au contraire de ce qu'on pourrait appeler le contexte expérimental, de la situation, de l'horizon de connaissance dans lesquels il se place.

On pouvait espérer, disions-nous, que la situation se dénouerait et se renouerait d'elle-même si l'on arrivait à séparer la composante théorique de la composante expérimentale. Mais la condition préalable est irréalisable. Nous ne savons pas comment constituer un formel dont l'autonomie soit assurée à l'avance, et nous ne savons pas mieux saisir un réel dont l'authenticité soit à jamais valable.

Comment la situation se présente-t-elle en géométrie, par exemple ? N'avons-nous pas inutilement compliqué les choses ? Si nous avions choisi de

l'édifier selon les méthodes analytiques, n'aurions-nous pas évité les circonstances qui nous ont conduit de synthèse dialectique en synthèse dialectique ?

Valeur relative de la géométrie analytique

Édifier une géométrie analytique, c'est instituer un modèle arithmétique (au sens large) de l'espace. Or l'institution d'un tel modèle pose, à son tour, de difficiles problèmes dont la recherche sur les fondements des mathématiques n'a pas encore fait le tour. Le modèle en particulier ne peut pas être considéré comme parfaitement fondé en l'absence d'une démonstration de non-contradiction relative au substrat mathématique dont il est fait, démonstration que nous ne possédons pas, et dont nous ne savons pas sur quelle base elle pourrait être faite. Est-il, d'autre part, permis d'admettre que le rapport d'un modèle mathématique à ce dont il est une représentation est un rapport d'adéquation entière et parfaite ?

D'ailleurs, si nous n'avons pas fait un usage systématique de la méthode analytique en géométrie, nous ne l'avons pas non plus systématiquement écartée. Nous l'avons employée à titre de moyen, mais non à titre de moment constitutif de l'aspect théorique. Certes, elle conduit aussi à conférer une certaine autonomie au Discours mathématique sur l'espace. Mais si le but qu'on se propose n'est pas de dégager cet aspect mathématique par les moyens les plus rapides, et de s'en tenir là, si l'on entend ne pas perdre immédiatement le contact avec l'aspect intuitif et surtout avec l'aspect expérimental de la géométrie, la méthode analytique n'offre aucun avantage de principe. Elle n'évite aucune des difficultés que nous avons déjà indiquées. Sous l'étiquette d'interprétation elle rencontre tous les problèmes auxquels nos synthèses dialectiques répondent.

Qu'on veuille bien ne pas se méprendre sur les intentions qui animent les remarques précédentes. Notre souci est de savoir de quelles instances pourrait se réclamer celui qui voudrait écrire le nouveau Discours de la méthode dont nous parlions. Il lui faudra bien, s'il s'engage dans cette aventure, affirmer que telles vues sont justes ou telles autres sont fausses. De quel droit le fera-t-il ? Suffira-t-il qu'il en soit convaincu ? Ne lui faudra-t-il pas, au contraire, indiquer quel est le terrain de sa propre légitimité ?

Les remarques précédentes avaient naturellement pour but de répondre à ces questions par un exemple péremptoire. La doctrine dont nous venons de parler (la doctrine de la séparation et de l'autonomie du théorique) avait, a encore ses partisans convaincus; et bon nombre d'entre eux estiment que ces défaillances ne suffisent pas pour la faire écarter définitivement. Quant à nous, nous la jugeons condamnée. Mais là n'est pas la question. Il ne s'agit pas simplement d'élever une opinion contre une autre opinion. Le fait qui compte, et qui doit désormais compter pour tout le monde, c'est que, dans les questions de méthode comme dans les autres questions scientifiques, la vérité ne s'impose pas nécessairement d'elle-même. Dans ces matières aussi, on ne peut concéder à

personne le droit d'affirmer sans justifier ce qu'il affirme, et sans indiquer en même temps de quels moyens de preuves il entend se servir.

Réponse à une erreur essentielle

Vous en exigez trop, me dira-t-on. S'il faut indiquer ces moyens de preuves, ce qui revient en somme à prouver que les preuves qu'on apporte sont bien des preuves, on ne pourra jamais en finir. Il se trouvera toujours quelque sophiste auquel on ne pourra pas défendre de demander si la dernière des preuves est bien une preuve. — Eh bien, et ce qui va suivre n'est pas une simple affirmation, mais une affirmation que nous allons motiver, cette dernière objection repose sur la plus essentielle des erreurs.

Revenons à la doctrine dont nous faisions la critique il y a un instant. Je dis qu'on nous l'a proposée sans la moindre preuve. En effet, a-t-on cherché à réédifier, selon cette doctrine, telle ou telle discipline qui aurait dû pouvoir s'y prêter, une discipline ayant à la fois, comme la géométrie, un versant théorique et un versant expérimental dont il faille tenir compte ? Ne disons pas qu'on ne l'a jamais tenté. On s'y efforce peut-être encore. Mais il est de fait qu'on n'y a jamais réussi. La doctrine n'est ici qu'un projet pour lequel la sanction du succès n'est pas encore venue.

Viendra-t-elle jamais ? Nous en doutons, parce que nous avons fait une expérience en quelque sorte contraire. Nous avons réédifié la géométrie en nous inspirant d'une tout autre doctrine, d'une doctrine dont les idées dominantes sont incompatibles avec celles dont il a été question plus haut.

Lorsque nous exigeons des preuves, nous ne parlons pas de preuves en un sens absolu, mais de la preuve au sens courant de la science; au sens dont la science a montré le bien-fondé.

La dernière garantie d'une preuve, dans les sciences, ce n'est pas une preuve dernière, une preuve au-delà de laquelle il n'y a plus rien à chercher. Cette garantie, c'est la science elle-même qui la fournit, par son existence, par sa cohérence, par son efficacité et par sa faculté de progrès. C'est l'ensemble du savoir scientifique déjà constitué, savoir dont la preuve est une partie intégrante.

Pour parler de la science réelle et non d'une science fictive, le nouveau discours doit se dégager au préalable de l'erreur fondamentale dont il vient d'être question. Exigera-t-on encore que la preuve de cette erreur soit faite de façon plus explicite ? Qu'à cela ne tienne :

Pour ce qui est du programme selon lequel la science aurait à lier un formel autonome à des faits de pure observation, il ne peut être que factice puisque la science réelle ne s'y conforme pas.

Et pour ce qui concerne l'objection faite à toute « solution » d'un autre type, elle ne peut être fondée puisque la science réelle n'en tient pas compte.

En effet, dans sa réalité, la science telle qu'elle va se constituant, s'éprouvant et se reconstituant, réalise une « solution » d'une tout autre structure. Il suffit d'examiner les grandes lignes de son développement pour s'en apercevoir.

(L'un des buts de la présente étude était d'ailleurs d'en apporter une confirmation.)

Le rythme du progrès de la connaissance

Voici, à grands traits, le rythme selon lequel la connaissance scientifique avance :

a) Aucune des démarches de la science réelle ne s'effectue à partir d'un état zéro de connaissances, état dans lequel le savant serait en mesure de recevoir des informations parfaitement épurées, et disposerait de méthodes parfaitement assurées. Une démarche scientifique ne peut s'effectuer qu'à partir d'une certaine situation de connaissance, situation dans laquelle le savant dispose d'un certain savoir préalable et d'un certain langage préconstitué. Ce savoir n'est, en général, assuré qu'entre certaines limites. Ce qu'il pourrait comporter éventuellement de parfaitement sûr n'est pas naturellement muni d'un signe qui le désignerait comme tel. Ce langage n'est pas établi dans une forme déjà invariable. L'inaliénable qu'il pourrait comporter ne se dégage pas de lui-même du caduc et du provisoire.

b) La recherche rencontre ou fait apparaître des éléments nouveaux qui ne s'intègrent pas d'eux-mêmes à la situation de départ.

c) Il arrive que pour intégrer les éléments nouveaux, il faille imaginer et mettre à l'essai des hypothèses nouvelles, et même des hypothèses incompatibles avec la situation de départ.

d) La mise à l'épreuve des nouvelles hypothèses rejaillit sur la situation de départ et sur son système discursif. Elle y apporte des exigences qui ne peuvent être parfois satisfaites que par une réorganisation de la situation de départ et par une révision des notions mises en cause. Cette révision peut descendre jusqu'aux notions les plus élémentaires et prendre l'aspect d'une véritable mutation de l'élémentaire.

Le passage de la situation de départ à la situation évoluée n'est pas le fait d'une nécessité logique. Il répond à certaines exigences de cohérence et d'adéquation ou, pour tout dire en un mot, à certaines exigences d'idonéité. Il comporte un moment de création (mentale ou technique) qui ne saurait être identifiée avec une procédure formalisatrice.

Le passage à la situation évoluée n'a pas pour effet d'effacer purement et simplement la situation de départ. Il arrive que la situation de départ comporte des éléments inaliénables qui ne puissent cependant pas être repris tels quels dans la situation évoluée. Un problème de coordination (de coordination dialectique) se pose alors entre la situation de départ et la situation évoluée. Il peut arriver que le sens et la portée des inaliénables en soient modifiés.

Tel est le schéma dont les quatre phases peuvent être distinguées déjà dans le passage du système du monde géocentrique de PTOLÉMÉE au système héliocentrique de COPERNIC-KEPLER, — aussi bien que dans le passage de la cinématique classique à la cinématique relativiste. L'activité scientifique qui s'y profile est à la fois plus souple et plus efficace, plus libre et plus complexe que la simple (et hypothétique) interprétation du formel dans le réel. Elle comporte en particulier, à côté du moment de création dont nous avons parlé, un retour sur l'acquis et une révision de ce dernier, faute desquels on ne voit guère comment l'évolution des conceptions scientifiques resterait possible.

Ainsi, l'examen des méthodes dont la science se sert avec succès nous libère de la conception erronée selon laquelle l'authenticité de la recherche scientifique tiendrait à son ancrage dans une situation de départ d'une validité inconditionnelle. Pour être dans le juste, il faut jusqu'à un certain point renverser la perspective, pour faire place à une conception en quelque sorte dynamique (et dialectique) selon laquelle les méthodes scientifiques prennent leur efficacité par un engagement actif dans le réel, engagement dont les moyens sont (à partir de toute situation préalable et provisoire) la recherche et l'examen, l'essai et l'hypothèse ad hoc, la mise à l'épreuve et la révision.

Voici donc le point de départ qui peut être offert à un nouveau discours : la simple conception d'une science qui ne soit pas invariablement liée à ses positions antérieures, mais libre encore d'expérimenter et de se corriger.

Quant à l'étude qui touche ici à sa fin, on peut l'envisager comme une recherche tendant précisément à préparer l'élaboration du nouveau discours, recherche dont le champ est la géométrie comme science de l'étendue.

La méthode de notre essai

Nous voulions donner à cette étude la forme d'une expérience, une expérience que le géomètre aurait faite au cours des siècles et dont nous allions recueillir le bénéfice. Mais cette expérience devait avoir elle-même sa méthode. Comment la choisir, et de quel droit la fixer ?

Allions-nous, devions-nous commencer par tenter de donner une solution enfin définitive aux problèmes du fondement de la géométrie en tant que discipline mathématique ? Ne devions-nous pas reprendre à zéro la question si discutée des *Éléments* dans la volonté de la mener à bonne fin (c'est-à-dire de procéder à l'édification de *Nouveaux Éléments* d'une validité enfin incontestable). Nous venons d'expliquer comment, si l'on pousse la question dans cette voie, on ne peut manquer d'aboutir à l'impasse d'une démonstration de non-contradiction. Pour atteindre notre but, nous allions certainement avoir à reconstituer la géométrie en tant que science de l'espace. Mais ce devait être selon d'autres principes.

Quels pouvaient être ces autres principes directeurs ?

Il y a un instant, nous insistions sur le fait que le succès de l'activité scientifique ne tient pas nécessairement à son enracinement dans une situation de départ définitivement assurée. La recherche scientifique jouit, en réalité, d'une liberté beaucoup plus considérable, de la liberté de ne pas remonter à un

fondement dernier, mais de commencer dans le relatif, avec tout ce que l'on a de connaissances approchées et provisoires, pourvu qu'on ne fasse pas injustement de celles-ci des connaissances achevées et immuables. Le droit à cette liberté est un droit réel. Il était donc tout indiqué que nous en usions.

Revenons maintenant à la situation où s'inscrivait notre problème, à la situation où ce problème revient s'inscrire pour celui qui consent à refaire avec nous le chemin que nous avons parcouru. Pour plus de clarté, imaginons que les faits soient appelés devant deux instances successives. Imaginons en outre que le schéma de tout à l'heure serve pour l'une et pour l'autre de base à la procédure. Cette dernière convention n'a rien d'arbitraire, puisque le schéma des quatre phases n'introduit aucune contrainte et ne fait que concéder en droit à la recherche des libertés dont elle.jouit en fait.

Jugements de première instance

La fonction de la première instance est de se prononcer (le plus souvent rétrospectivement) sur un certain nombre de cas relevant directement de telle ou telle discipline scientifique. Deux de ces cas vont être pris ici pour exemples. Ils sont aujourd'hui l'un et l'autre classiques.

Le premier cas est celui de la physique relativiste. On demande de considérer comme situation *a)* la situation dans laquelle se trouvait la théorie de la lumière quelque temps avant l'expérience de MICHELSON-MORLEY. Ce n'était déjà plus une situation tout à fait stable. Une situation *b)* commençait à s'y profiler. En particulier, la mise en accord des équations de MAXWELL avec la cinématique classique semblait déjà fort difficile à réaliser.

Une situation *b)* caractérisée devait être engendrée par l'expérience de MICHELSON-MORLEY.

La phase *c)* est, elle aussi, bien caractérisée. Elle comprend différents essais théoriques dont il suffit de retenir le plus efficace, celui de la relativité dite restreinte d'EINSTEIN.

Voici maintenant trois questions auxquelles les réponses « de première instance » ne font aucun doute :

1. Cette hypothèse a-t-elle été mise à l'épreuve ? A-t-elle subi l'épreuve avec succès ?

Incontestablement, elle a reçu les plus éclatantes confirmations.

2. Qu'en est-il, enfin, du rejaillissement sur la situation antérieure ?

L'adoption des vues relativistes n'entraîne-t-elle pas une grave altération des conceptions de départ ?

Pour passer de la cinématique classique à la cinématique relativiste, il faut, en effet (et ceci est la phase *d)* de notre schéma), opérer une révision descendant jusqu'aux notions d'espace et de temps, spécialement quant au rapport à établir entre ces deux notions élémentaires.

3. La situation finale est-elle complètement éclaircie ? Sommes-nous

capables d'effacer totalement en nous nos conceptions naturelles de l'espace et du temps, pour les remplacer purement et simplement par les conceptions relativistes ?

Sur ce 3e point, la réponse est loin d'être aussi affirmative que sur les deux points précédents. Une simple relève de l'ancien par le nouveau ne semble guère possible. Notre vision naturelle de l'espace et notre notion naturelle du temps pourraient bien être des moyens inaliénables de toute prise de connaissance du monde physique. Il faudrait alors, pour que les vues relativistes puissent développer tout leur sens, établir une perspective méthodologique dans laquelle l'inaliénable et l'évolué puissent entrer valablement en rapport. La chose est-elle déjà faite ?

Nous imaginerons que ce dernier point ne puisse pas être traité en première instance et qu'il ait a être repris en seconde instance.

Voici maintenant notre second exemple : Les paradoxes de la théorie des ensembles (ou de la logique formelle) y jouent le rôle central.

Nous conviendrons de prendre cette fois comme situation *a)* la situation en analyse avant la rencontre des paradoxes dont nous venons de faire mention. Les considérations sur les ensembles (de points, de nombres, d'éventualités, etc.) n'en étaient pas écartées. Elle semblait, au contraire, offrir un fondement à la fois plus explicite et plus sûr à certaines conceptions traditionnelles, en tout premier lieu à la notion même de nombres réels quelconques. La rencontre des paradoxes y engendre une situation *b)* d'une grande acuité : en quoi la théorie est-elle fautive, on se le demande avec perplexité. La phase *c)* fut caractérisée par des essais assez nombreux tendant tout d'abord à assurer la non-contradiction d'une théorie des ensembles rénovés, visant ensuite les mathématiques dans leur ensemble.

Comme pour notre premier exemple, les trois questions que voici sont maintenant à examiner :

1. Chaque essai représente la mise à l'épreuve d'une hypothèse correspondante. L'une de celles-ci s'est-elle confirmée au détriment des autres ?

La réponse n'est pas univoque : L'expérience montre qu'il est possible de poursuivre sans contradiction un certain nombre de procédures en concurrence les unes avec les autres. On peut entreprendre la reconstruction des mathématiques par les procédures logiques et formalisatrices, selon la méthode des postulats et des modèles aussi bien que selon les normes et les exigences de la doctrine intuitionniste.

2. Qu'en est-il du rejaillissement de ces essais et de ces résultats sur la situation de départ ?

Il est clair que la conception classique des mathématiques s'en trouve profondément altérée. Le caractère le plus frappant de l'évolution dans laquelle

les mathématiques se sont ainsi engagées est peut-être la *dispersion*[1] (nous dirions plutôt l'*ouverture*) de l'idée de rigueur ou de légitimité jusque dans les algèbres et dans l'arithmétique.

3. La situation est-elle d'ores et déjà complètement éclaircie ? Les différentes tentatives (et leur succès au moins partiel) ont-elles pu être intégrées dans une perspective d'ensemble, chacune venant y prendre la place qui lui reviendrait ?

Sur ce troisième point la réponse est encore une fois beaucoup moins affirmative que sur les deux points précédents. Comme pour notre premier exemple, nous conviendrons de suspendre ici l'examen de première instance, et de reprendre la question tout à l'heure en seconde instance.

Jugements de deuxième instance

Ouvrons maintenant le débat de seconde instance.

Il ne s'établira plus au sein de telle ou telle discipline, et ne prendra plus pour objet les situations *b)* engendrées par la recherche dans les limites de ces disciplines. Le for du débat doit être commun à toutes les sciences, c'est le lieu où s'évoquent les questions de doctrine, de principe et de méthode. Mais ces questions permettent-elles une solution de quelque valeur, de quelque précision ? Quelle que soit la réponse à cette dernière question, sa seule garantie est de chercher à réaliser les conditions d'un débat précis.

Si l'on évite parfois de parler de doctrine de principe ou de méthode dans les sciences, cela ne veut pas dire que les sciences n'aient ni doctrine préalable, ni principes qu'elles observent, ni méthodes qu'elles pratiquent. Cela veut simplement dire que l'on tient doctrine, principes et méthodes pour si assurés qu'il est simplement inutile d'en faire le sujet d'un Discours.

Est-il juste de dire que cette façon sommaire de voir était assez générale, dans les milieux scientifiques, vers la fin du siècle passé ? Nous le savons aujourd'hui, sur bien des points la situation était déjà de nature à éveiller d'assez vives inquiétudes méthodologiques. Ces points restaient cependant à l'arrière-plan. Il n'y avait, semblait-il, aucune urgence à songer à une révision des idées courantes quant aux méthodes propres à assurer la recherche de la vérité dans les sciences. Malgré certains signes précurseurs d'un trouble prochain, la situation méthodologique semblait offrir une certaine stabilité. En somme, les caractères d'une situation *a)* se trouvaient réalisés.

Les jugements de première instance qui viennent d'être portés au niveau des disciplines particulières (et dont les exemples pourraient être multipliés) viennent-ils facilement s'intégrer dans cette situation de départ ? Tout au contraire. Aucun d'eux n'est strictement conforme à ce qu'exige ou prévoit la

[1] L'expression est de M. BOULIGAND.

situation *a)*. Chacun d'eux équivaut à une expérience dont le résultat vient inscrire dans la situation de départ une question (concernant la Méthode) et pour laquelle il n'existe encore aucune réponse valable.

La question venue de la physique relativiste pose (entre autres) en problème les relations à établir entre la conception de la réalité au niveau de l'information naturelle et de la physique classique et la conception évoluée qu'on peut ou qu'on doit se faire « de ce même réel » au niveau de la physique atomique et quantique. Ces relations sont à établir dans la perspective de nos connaissances, elles se présentent elles-mêmes comme une réalité ayant sa propre spécificité, réalité qui fait précisément l'un des objets du discours sur la Méthode.

La question venue des mathématiques nouvelles, intuitionnistes, formalisatrices ou constructives, posent également (et entre autres) en problème les relations à établir entre les conceptions mathématiques que l'on dit intuitives et les conceptions évoluées qui prétendent les suppléer et les affiner. Encore une fois, ces relations existent avec leur propre spécificité, elles appartiennent à l'horizon méthodologique.

Nous l'avons dit, les deux exemples qui précèdent ne sont pas les seuls qu'on pourrait utilement citer ici. Ils suffisent cependant pour engendrer une situation *b)* bien caractérisée.

Il est clair, en effet, que ces deux exemples ne sont plus conformes à l'idée courante et traditionnelle selon laquelle les garanties d'une science positive sont simplement la mesure et le calcul. Cette idée est dès ici dépassée : dans la situation où nous nous trouvons maintenant, l'objectivité de la mesure et la rigueur du développement théorique sont redevenues elles-mêmes sujets d'étude et de réflexion.

D'autre part, l'indifférence quant aux questions méthodologiques a cessé d'être une attitude positive; le problème de l'organisation et de la mise en rapport de nos différents plans de connaissance est maintenant placé au rang des problèmes réels, au rang des problèmes authentiquement scientifiques dont la solution importe au progrès de la science.

Quelques-uns hésiteront peut-être encore à accepter les conclusions précédentes, disant que les considérations méthodologiques manquent par trop de précision. Ne devront-ils pas envisager comme une réponse valable celle qui consiste à soumettre ces considérations à des exigences plus strictes, à les engager ainsi dans une activité où elles se préciseront ?

Mais en avons-nous vraiment les moyens ? Sans aucun doute : il suffit, pour réaliser une procédure précisante, d'engager les considérations méthodologiques dans le jeu combiné de l'essai, de l'hypothèse et de l'épreuve, dans le jeu que la recherche ne cesse de pratiquer dans tous les domaines et depuis toujours.

En d'autres termes, tout va dépendre de la possibilité de faire passer notre question de la phase *b)* dont nous venons de prendre conscience à une phase *c)*

qui attend encore d'être imaginée et dégagée. Rien ne nous autorise à penser que ce passage puisse se faire fatalement et automatiquement. C'est ici que doit intervenir l'effort qui nous permettra, si tout va bien, de distinguer, de concevoir et de formuler les hypothèses à mettre en œuvre et à soumettre à l'épreuve.

Nous sommes ainsi arrivés au point crucial de nos explications, explications qui ne font d'ailleurs que reprendre et compléter celles que nous donnions dès les premières pages de cet ouvrage. Les considérations qui précèdent seraient simplement vides et vaines si nous n'avions pas eu certaines hypothèses à proposer et à essayer. Tout tenait à ces hypothèses, tout tient encore à ce qu'il en est advenu.

Quelles étaient nos hypothèses

Mais quelles étaient ces hypothèses, d'où pouvaient-elles sortir et quelles mesures fallait-il prendre pour les éprouver ?

Ces hypothèses s'offrent presque d'elles-mêmes à celui qui entend donner tout son poids à la faculté d'évolution et de progrès que la connaissance scientifique possède en fait. Le chercheur doit avoir la simple liberté de se tromper et de se corriger. Il suffisait de poser cette liberté en droit méthodologique. Nos hypothèses allaient simplement être ce qu'il fallait qu'elles fussent pour que ce droit ne fût pas illusoire.

Il fallait cependant les formuler, leur donner une existence discursive. Comment allait-il être possible d'éviter le recours à une instance antérieure de légitimité ? Toute notre argumentation était fondée sur la validité du schéma des quatre phases, sur l'authenticité des droits et des libertés qu'il reconnaît à la recherche et sur la liberté que nous avions enfin de nous y conformer nous-mêmes. En procédant ainsi, n'avions-nous pas déjà réintroduit l'instance antérieure dont nous prétendions nous passer ? Le rôle n'en était-il pas tout simplement assumé par le schéma des quatre phases ? En fait, le schéma sur lequel nous prenons appui n'a rien d'une instance antérieure ou extérieure à ce que nous faisons au sens traditionnel. Le penser, ce serait précisément commettre l'erreur fondamentale (et somme toute assez grossière), contre laquelle nous nous sommes déjà élevés. Lorsqu'on parle couramment du recours à une instance antérieure (ou à une discipline antérieurement fondée) on admet que cette dernière est déjà fondée ou pourra se fonder indépendamment de la discipline qui la prendra pour fondement. On présuppose que la validité de l'antérieur est préalablement assurée, et ne peut être en rien affectée par le rapport à établir avec tout ce qui devra y trouver sa base, et ses principes.

Le rôle du schéma des quatre phases, pour ce que nous en faisons, est tout à fait différent. C'est un tout autre rapport qui s'établit entre sa validité et la validité des considérations, des démarches qu'ils contribuent à établir. Il n'est aucunement nécessaire de supposer que le schéma soit d'ores et déjà d'un emploi universellement efficace et parfaitement délimité. Son statut est d'être

une hypothèse plausible ou même très plausible. Toute la pratique des sciences le suggère de la façon la plus pressante et la plus convaincante. Il reste cependant au rang des hypothèses qu'on n'est jamais définitivement dispensé de mettre et de remettre à l'épreuve.

Ni en droit ni en fait, la mise à l'épreuve d'une doctrine préalable dont la validité n'accède pas à l'inconditionnel ne se fait indépendamment du progrès de la recherche qu'elle inspire et qu'elle informe. Le banc d'essai, ce n'est pas une activité antérieure à cette recherche, c'est cette recherche elle-même. Ce qui est réellement antérieur, c'est le passé de cette recherche, passé dont les suggestions ont été peut-être recueillies pour être engagées dans une activité ultérieure dont les résultats ne sauraient être entièrement indiqués à l'avance, — pour être engagé à nouveau sous la forme déjà plus précise de la doctrine préalable.

Le schéma des quatre phases s'éprouve lui aussi

Dans l'emploi que nous en faisons, le schéma des quatre phases est donc à envisager comme étant lui-même compris au nombre de nos hypothèses fondamentales. Il n'y entre cependant pas comme une hypothèse hasardeuse, mais comme un aspect déjà éprouvé de la doctrine préalable. Même en ce qui concerne notre schéma, nous ne remontons pas à un état zéro où nous n'aurions à faire aucun emprunt à l'expérience. Ce qui nous est ainsi donné prend d'ailleurs la valeur d'une exigence relativement à toute hypothèse qui pourrait être ultérieurement faite : celle-ci doit être telle que la validité que nous venons de reconnaître au schéma des quatre phases n'en soit pas affectée.

Ainsi, en nous fiant au schéma des quatre phases pour fixer notre ligne de conduite, nous ne retombons pas dans l'ornière du recours à une instance antérieure au sens traditionnel. Nous nous engageons, au contraire, dans une méthodologie d'un tout autre type, dans une méthodologie dont, pour l'instant, certains traits élémentaires nous sont seuls donnés. Cette méthodologie élémentaire, mais de caractère général, est d'un seul tenant avec la méthodologie géométrique qu'elle doit aider à préciser. Elle se précise elle-même par l'aide efficace qu'elle apporte, nous le comprendrons encore mieux dans un instant.

Passage à une méthodologie ouverte

C'est donc d'un examen de la situation méthodologique *b)* que nous décrivions plus haut que doivent sortir les suggestions tendant à l'épuration et à la réorganisation de cette situation. Elles se résument en peu de mots : c'est une *méthodologie ouverte* que la recherche scientifique suggère. Et quant aux grands traits de cette méthodologie, ils sont inscrits dans l'histoire des disciplines particulières, de leurs premières démarches à leurs progrès récents.

Ces quelques considérations marquent déjà le passage (quant au problème de la méthode) de la phase problématique *b)* à la phase constructive *c)*.

Telle était donc la situation au moment où nous entreprenions cette étude. Notre intention n'était pas équivoque : nous nous proposions, — pour reprendre les termes dont nous venons de nous servir, — d'engager le problème de la *Nouvelle Méthode* dans sa phase *c)* — et peut-être dans sa phase *d)*. Mais pour la réalisation de ce programme, deux variantes principales s'offraient en concurrence, présentant des difficultés en quelque sorte complémentaires.

Voici la première de ces deux variantes :

Pour édifier sa théorie de la gravitation, NEWTON avait aussi une hypothèse réorganisatrice à faire valoir : la loi de l'attraction mutuelle des graves. Il l'énonça de façon claire et précise. Les conséquences qu'il en tira se trouvèrent d'ailleurs en accord suffisamment exact avec l'observation.

N'a-t-on pas là le modèle de ce qu'il faut faire dans toutes les circonstances analogues ?

Dans notre cas ne nous fallait-il pas aussi commencer par exposer notre hypothèse réorganisatrice en termes nets et clairs ? En d'autres termes, ne fallait-il pas commencer par proposer la Nouvelle Méthode, dans une formulation d'une certaine précision, — en ne laissant, bien entendu, aucun doute sur son caractère d'hypothèse à vérifier. La chose faite, l'attention se porterait alors tout entière sur le choix et l'examen des vérifications. Allait-il être possible de réédifier les disciplines particulières en s'inspirant au plus près de cette hypothèse, la géométrie prenant éventuellement la valeur d'un exemple privilégié ? La réussite ou l'échec eussent été clairement interprétables, pourquoi ne nous sommes-nous pas arrêtés à cette façon de faire ?

La raison doit en être cherchée dans les principes méthodologiques mêmes qui devaient être mis à l'essai. La pratique de la recherche a très suffisamment montré que les connaissances précises ne se donnent pas d'elles-mêmes d'un seul coup et dans leur dernière précision à un esprit avide de les conquérir. Elles se révèlent par degrés, en réponse à une activité qui se porte à leur recherche.

Cela veut dire que l'esprit qui n'adhère pas à sa recherche, mais qui prétend rester libre de précéder son engagement dans l'expérience court le risque d'entrer dans la fiction. Cela veut dire aussi que les hypothèses qui ont quelques chances de réussir ne sont pas fatalement précisables par avance.

Il faut des mots et des notions correspondantes pour formuler une nouvelle hypothèse. Mais ces notions ne sont pas toujours données au préalable. Certaines fois, il faut avoir recours à des notions nouvelles, à des notions inédites. Comment celles-ci viennent-elles en notre possession ?

Il nous faut nous garder ici de trop affirmer, de formuler une réponse trop précise dont les termes mêmes préjugeraient la question. Une chose est cependant certaine : C'est que les notions dont nous parlons ne nous sont pas données indépendamment de l'expérience qu'elles serviront à décrire, — par

une divination très sûre, par exemple, qui anticiperait sur l'expérience.

On ne se trouve pas gratuitement *en situation d'essais précisés*, ayant à sa disposition une hypothèse ou une série d'hypothèses bien formulées et un ensemble de circonstances bien délimitées pouvant servir de champ d'épreuve à ces hypothèses. Une telle situation doit être considérée déjà comme un aboutissement, comme l'aboutissement d'une activité intermédiaire où l'essai et la réflexion s'entremêlent et dont les différents moments ne sont pas toujours faciles à séparer.

Il n'en est pas autrement dans notre cas. Pour être en possession d'une doctrine préalablement formulée de la connaissance ouverte, et pour savoir comment la mettre en œuvre dans la réédification des disciplines particulières, il faut (la chose n'est-elle pas claire ?) se trouver justement en situation d'essais précisés. Et pour savoir que la doctrine-hypothèse est plausible, qu'elle vaut la peine d'être examinée, il faut avoir déjà tenté de l'appliquer et n'avoir pas complètement échoué dans cette tentative. Ainsi, l'épreuve de la méthode en situation d'essais déjà précisés ne fait que repasser par un chemin déjà frayé, par un chemin que la recherche a déjà dû se frayer. C'est en somme une seconde version, de caractère démonstratif, qui présuppose une première version de caractère plus inventif et plus hasardeux. Que répondre à celui qui prétendrait, par souci de justesse, ne pouvoir prendre parti que sur la foi de la seconde version, de la version épurée et systématisée ? La réponse résume tout le problème : c'est que la situation n'est peut-être pas précisable à l'aide des seuls moyens « antérieurs », — c'est-à-dire à l'aide des moyens que les situations *a)* et *b)* comportent. Il peut arriver que le passage à la situation précisée exige des moyens inédits, et que ces moyens n'émergent et ne prennent forme qu'au fur et à mesure de l'avancement de toute l'entreprise. Exiger la précision avant d'en avoir les moyens, avant de s'être engagé dans l'activité dont ces moyens devraient sortir, c'est alors installer tout simplement une situation d'emmurement.

En d'autres termes, c'est peut-être au cours de la première version, et par le fait même de cette première version, que doit surgir et prendre forme la substance même dont la seconde version ne saurait se passer. Voilà pourquoi, pour faire l'épreuve d'une méthodologie de la connaissance ouverte, la variante que nous venons d'examiner nous était interdite. En quoi la seconde variante, celle que nous avons choisie, en diffère-t-elle ?

Puisque première version il doit nécessairement y avoir, pourquoi feindre de ne pas la prendre au sérieux ? Pourquoi ne pas la mettre immédiatement en lumière et en faire du premier coup la version principale ?

Voici donc comment cette autre variante pouvait être imaginée : le projet de réédifier les disciplines particulières en situation méthodologique précisée n'était pas le seul qu'on pût envisager. Cette réédification, celle de la géométrie par

exemple, pouvait être tentée d'emblée, dans l'intention d'en faire une expérience méthodologique. Une entreprise de ce genre est toujours légitime, même si l'on n'a pas d'avance la certitude qu'elle réussira; qu'elle échoue ou qu'elle réussisse, on n'a pas à se justifier d'en avoir fait l'essai.

Le projet de refaire les Éléments

Que devions-nous, que pouvions-nous alors attendre d'une réussite ? Celle-ci, pour répondre à notre attente, devrait pouvoir se réaliser à deux échelons successifs : à l'échelon géométrique et à l'échelon méthodologique.

Réussir à l'échelon géométrique, c'était réussir à dresser une perspective cohérente dans laquelle viendraient se ranger, chacune à sa place, toutes les acquisitions que la discipline géométrique a faites au cours des siècles. C'était en particulier réussir à mettre sur pied, au moins dans leurs grandes lignes, les *Nouveaux Éléments* qui correspondraient à l'état actuel de nos connaissances géométriques, en ne négligeant, bien entendu, aucun des aspects, aucune des fonctions de cette connaissance. C'était aussi dépasser l'élémentaire sans avoir à le renier, mais en lui réassurant l'essentiel de ses droits.

Réussir à l'échelon méthodologique, c'était réussir à distinguer, au fur et à mesure de l'édification géométrique, les principes auxquels cette édification était conforme, c'était aussi réussir à dégager (au moins dans ses grandes lignes) une doctrine méthodologique susceptible d'éclairer et d'orienter l'activité dont il vient d'être question à l'échelon géométrique. Pour répondre à notre attente, cette doctrine devait d'ailleurs se présenter comme une doctrine de la connaissance ouverte.

Ainsi, pour réussir, il fallait bien doublement réussir. Mais rien ne nous obligeait à attendre une réussite totale à l'un des échelons avant de passer à l'autre échelon : il n'était pas interdit de penser que la situation sur l'un des fronts pût, à chaque instant, influencer la situation sur l'autre front, les deux ordres de recherche s'aidant et s'éclairant mutuellement.

Revenons à l'échelon géométrique. Nous venons de dire que la perspective à dresser devait être capable d'accueillir toutes les étapes du développement de la géométrie, depuis les origines. Il ne s'agissait cependant pas de faire de la simple succession historique des événements géométriques le principe dominant de l'intégration de toute la matière géométrique en un tout cohérent. Certes, tous les éléments à rassembler sont en quelque sorte dispersés tout le long du chemin de l'histoire. Il est donc tout naturel que leur ordre historique parfois, et même souvent, ait à être pris en considération. Mais l'ordre à établir était un ordre méthodologique, le sens de ces deux derniers mots n'étant d'ailleurs pas complètement donné d'avance, — ce sens devant se préciser encore par le succès même de l'entreprise. Nous reviendrons un peu plus loin sur le rôle qui devait être donné aux considérations historiques.

L'élémentaire à l'échelon géométrique

Au niveau géométrique dont nous parlons maintenant, la première tâche était de reconstituer la géométrie élémentaire dans toute sa plénitude. Nous nous gardons de dire qu'il fallait, avant toute autre chose, retrouver la géométrie telle que les Grecs l'avaient conçue. L'état initial d'une discipline n'est pas nécessairement l'état de son élémentarité la plus authentique. Il faut noter, au contraire, que l'idée d'élémentarité n'est pas une idée qui puisse être donnée à l'avance dans une signification tout-à-fait précise et par conséquent invariable. L'élémentarité, par exemple, dans une géométrie dont on ne conserve que l'aspect rationnel n'est pas la même que dans une géométrie dont aucun des trois aspects fondamentaux ne doit être négligé. Et dans ce dernier cas, la façon dont on conçoit la nature de l'élémentaire dépend de la façon dont on conçoit le rôle de l'abstrait dans la formation de la connaissance. Ainsi, on juge différemment de l'élémentarité de la notion de segment rectiligne, par exemple selon que les « êtres géométriques élémentaires » sont à considérer comme des idéalisations ou comme des schématisations, — comme des idéalisations dont on devrait pouvoir donner des réalisations physiques de plus en plus précises, ou comme des schématisations dont la fonction n'est pas d'épouser la forme du réel physique jusque dans ses plus infimes détails. L'idée de l'élémentaire dépend donc, en un certain sens, de l'état d'avancement de notre connaissance du monde physique.

Dans ces conditions, pensera-t-on peut-être, l'idée de l'élémentaire est trop peu sûre, trop mouvante et trop imprécise, pour qu'on puisse utilement y avoir recours. Et pourtant, la décision de l'écarter pour ne plus jamais avoir à s'en servir serait le modèle même d'*une décision à ne pas prendre*. Certes, l'élémentaire ne nous est pas donné d'avance dans une forme et dans un sens parfait et achevé. Les procédures par lesquelles il se précisera et se fixera ne sont pas non plus mises d'avance à notre disposition. Et rien ne nous autorise à penser qu'il en existe une définition valable inconditionnellement, valable par anticipation et sans recours à aucune procédure d'achèvement ou de spécification progressive. Mais qu'y a-t-il là d'étonnant ? C'est là le cas normal. Pour connaître, nous nous servons précisément d'idées ouvertes, d'idées à engager dans une expérience qui les précisera dans un sens ou dans l'autre. (Toute notre étude peut être envisagée, quant à l'idée d'espace, comme une procédure d'ouverture et de respécification.)

Si l'idée préalablement achevée de l'élémentarité nous fait défaut, il n'en est pas moins faux de conclure à l'impossibilité de dégager une perspective élémentaire d'une relative et suffisante sécurité. Cette perspective existe, et nous pouvons en prendre conscience sans grand effort : C'est sur elle que se fonde, en pratique, l'enseignement, le premier enseignement de la géométrie. Dans les premières heures de cet enseignement, le maître n'énonce pas les vérités géométriques, même les plus simples, comme des vérités rationnelles qui

s'imposent d'elles-mêmes à l'esprit. Pour préparer les voies de l'abstraction, il fait appel, au contraire, (et il a bien raison de le faire) à notre vision naturelle de l'espace et à la faculté que possède tout enfant normal de se représenter une ligne droite, une surface plane, un objet sphérique. Il engage en outre ces représentations dans une activité géométrique qui, à travers les mesures, le dessin, etc., vient se raccorder, en la précisant, à notre vision naturelle (intuitive) de l'espace étendu.

En un mot, l'enseignement de la géométrie pratique avec succès, dans ses premières démarches, la synthèse dialectique des trois aspects à laquelle une première étude attentive des méthodes géométriques devait aussi nous mener. Répétons-le, tout le succès de l'enseignement géométrique, dans ses débuts, tient à l'appui que les trois aspects sont capables de se prêter mutuellement. Pourquoi faudrait-il feindre de l'ignorer ? Nous pensons, au contraire, que ce fait doit être mis à sa place, avec toute l'importance qui lui revient.

Ainsi, le mot élémentaire, en géométrie, n'est pas un vain mot. Et notre étude n'allait pas s'engager dans le vide en entreprenant d'étudier et de préciser les conditions et les exigences à satisfaire pour que puisse être en droit ce qui était déjà dans les faits.

Il fallait, en d'autres termes, développer une perspective méthodologique dans laquelle les trois aspects puissent être mis en place avec le rôle qu'ils jouent réellement. La méthodologie géométrique allait ainsi faire ses premiers pas en acceptant d'être, de se réaliser elle-même telle qu'elle devait être pour fournir un cadre réglementaire (et désormais normatif) à une situation d'élémentarité. Celle-ci, bien entendu, ne devait pas être une situation d'élémentarité quelconque; il devait être au contraire possible de l'envisager comme une situation d'élémentarité désormais précisée, à partir de considérations et de procédés qu'une longue pratique de l'élémentaire avait d'ores et déjà assurés.

Qu'on veuille bien remarquer (car c'est là un point décisif) que la démarche constituante que nous décrivons ici ne se fait pas en deux étapes successives dont la seconde attendrait, pour pouvoir être franchie, que la première l'ait déjà été. L'élaboration d'une doctrine méthodologique est ici le moyen même par lequel se précise et se systématise la situation d'élémentarité. En retour, l'élaboration de la situation d'élémentarité représente également le moyen grâce auquel s'oriente et s'éprouve la constitution de la doctrine méthodologique. Il y a action et réaction d'un front sur l'autre, les progrès sur les deux fronts n'étant rendus possibles que par une convergence des intentions, par le soutien mutuel et le contrôle réciproque qui se réfléchit constamment d'un front vers l'autre.

Dernière réponse à une objection

Mais laissons s'exprimer encore une fois (une dernière fois) l'objection qui renaît constamment : d'où savions-nous que notre situation de départ allait pouvoir se prêter à une double démarche de ce genre ? D'où tenions-nous qu'une telle démarche était légitime ?

Quand avions-nous donné la preuve qu'une procédure aussi audacieuse, à laquelle aucun point d'ancrage définitif n'était offert, était plus qu'une simple fiction ?

Et voici notre réponse, qui n'est elle-même qu'une variante d'un thème maintes fois repris : cette preuve, la chose est claire, n'avait pas été faite. Elle n'aurait pu être faite sans recours à une doctrine antérieure. Or cette doctrine préalablement fondée nous manquait. Bien plus, notre intention la plus ferme était de nous en passer. Qu'avions-nous besoin de démontrer abstraitement, par avance, la possibilité de ce que nous allions précisément construire. La preuve allait être donnée par le fait. Elle résidait dans la reconstitution de la géométrie élémentaire, à laquelle nous allions procéder, et dans la mise au point de la doctrine géométrique des trois aspects. Édification et doctrine se rejoignent d'ailleurs sur l'idée de la première synthèse dialectique qui est manifestement l'idée dominante de toute cette première partie de notre étude. Notre conception de l'élémentaire en géométrie et la représentation que nous nous sommes faite du jeu des trois aspects dans la synthèse dialectique ne sont d'ailleurs pas indépendantes l'une de l'autre : elles se complètent l'une l'autre, elles se conditionnent l'une l'autre. Elles sous-tendent un horizon de réalité qui n'est déjà plus tout à fait notre horizon naturel de réalité, mais un horizon de réalité qui le prolonge et précise.

Ce qui vient d'être dit appelle et suggère un certain nombre de considérations non plus sur la constitution d'une perspective d'élémentarité en géométrie, mais sur la possibilité de dégager une perspective d'élémentarité en méthodologie. Nous y reviendrons par la suite, mais il nous faut tout d'abord reprendre la discussion de ce que nous avons appelé tant de fois notre expérience géométrique.

La première synthèse dialectique devait être dépassée

La doctrine des trois aspects permet donc de dégager les positions élémentaires à partir desquelles il est possible d'ériger les *Nouveaux Éléments*. Pouvions-nous nous contenter de cette première réussite, — de cette double réussite, puisqu'elle se situe aussi bien à l'échelon méthodologique qu'à l'échelon géométrique ? Il nous faut naturellement répondre par la négative : l'intention même qui cherchait cette réussite devait en même temps chercher à la dépasser. Nous savions d'avance (comme tant d'autres) que l'idée dominante qui allait présider au jeu des trois aspects ne pouvait déjà plus être considérée comme totalement et définitivement juste. En un certain moment de l'histoire de la science, et spécialement de l'histoire de la géométrie, la doctrine de l'équivalence de vérité des trois aspects avait pu s'imposer avec la force d'une évidence. Ce stade était désormais dépassé. La doctrine des trois aspects répondait à une certaine situation de connaissances, et tout spécialement à un certain état de notre connaissance du monde physique, de notre connaissance de la structure de la

matière en particulier. En abandonnant l'idée qu'une particule de matière est (au moins en principe) indéfiniment divisible, nous abandonnons aussi l'idée d'une adéquation indéfiniment perfectible entre l'aspect expérimental et l'aspect théorique, toute portion de l'espace mathématique étant, quant à elle, indéfiniment divisible. Cent fois, la remarque en avait été faite : l'avènement de l'atomisme pose en problème la réussite (au moins approchée) de la géométrie dans la description du monde physique.

Nous savions donc, au moment où nous nous efforcions de donner aux problèmes de l'espace la solution que constitue l'édification de nouveaux éléments tout appuyés sur la doctrine des trois aspects, que cette solution n'allait pas pouvoir être indéfiniment maintenue, nous savions même qu'elle avait déjà été mise en échec. Ne fallait-il pas penser que la voie dans laquelle nous nous engagions n'était qu'une fausse voie ? Ne fallait-il pas en déduire que la situation d'élémentarité dont nous pensions partir ne pouvait pas nous offrir un véritable point de départ ? Examinons donc à quelles autres idées dominantes nous aurions pu nous confier.

La question de la séparation des trois aspects

Comme on constate un fait, nous avons commencé par constater les différences existant entre les trois aspects sous lesquels nous avons, par la suite, constamment envisagé la discipline géométrique. Il n'y a pas à douter que ces aspects puissent être aperçus et distingués l'un de l'autre. Sommes-nous en mesure de les concevoir séparément, « à l'état pur », de conférer à chacun d'eux une existence explicite, autonome, qui ne doive rien à l'existence des autres ? C'est une question que nous nous sommes posée, mais que nous avons laissée en suspens : notre situation de départ ne nous offrait pas les moyens d'en décider. Nous nous sommes cependant gardé de poser par avance (et peut-être arbitrairement) que c'était là une éventualité à exclure. Nous évitions ainsi de commettre une erreur de méthode, laissant encore toutes les voies ouvertes.

Mais n'eût-il pas été tout aussi légitime de poser, à titre d'hypothèse à poursuivre, d'hypothèse à éprouver, que l'un ou l'autre ou que chacun des trois aspects peut assumer une existence autonome et bien spécifiée ? Dans bien des manuels de géométrie, par exemple, la discipline géométrique se trouve présentée (sinon véritablement édifiée) comme une discipline rationnelle dont la vérité est assurée de façon inconditionnelle. Les vérités élémentaires sont alors les vérités les plus simples, les plus proches, les vérités qu'on atteint sans trop de détours. Cette position devait-elle vraiment être abandonnée ?

D'autre part, les doctrines posant (toujours à titre d'hypothèses préalables) l'existence d'une intuition pure capable d'aller d'un coup aux vérités évidentes, ou la possibilité d'un recours à un expérimentalisme ou à un opérationalisme radical ne pourrait-elle pas être, ne devrait-elle pas être aussi essayée ?

Nous l'avons déjà dit, la position que nous avons prise n'excluait d'avance aucune de ces éventualités. Du reste, le moment est venu d'insister sur ce point, l'essai de ces solutions avait déjà été longuement et constamment fait et refait dans l'histoire de la géométrie. Et l'épreuve, répétée sous des angles divers, loin d'éclaircir la situation, en avait mis plutôt les difficultés en évidence.

Le problème des fondements

L'une des lignes d'essai est actuellement dessinée par les recherches logiques et formalisatrices sur les fondements. Nous en avons déjà parlé plus haut, aussi n'y revenons-nous ici que pour ajouter une brève remarque à ce que nous en avons déjà dit. Les recherches formalisatrices peuvent être envisagées comme un essai de dégager une nouvelle perspective d'élémentarité en logique et plus généralement dans les fondements des mathématiques. Cet essai échoue si l'on veut en tirer la preuve de la validité inconditionnelle des mathématiques, en particulier la preuve de la non-contradiction des procédures mathématiques et des procédures formalisatrices elles-mêmes. Au contraire, cet essai semble bien réussir, si on l'envisage sous l'angle que nous venons d'indiquer. Mais pour que le fait apparaisse clairement, il importe de ne pas séparer la recherche à l'échelon technique de la recherche à l'échelon méthodologique. On fausse la situation de départ en admettant que les recherches formalisatrices se fassent dans un cadre méthodologique fixé d'avance et dont on sait déjà parfaitement ce qu'il est et ce qu'il vaut. Il faut libérer les recherches formalisatrices de cette dernière hypothèque. Rien n'empêche de conjuguer le moment technique à la réflexion méthodologique pour en faire les deux moments d'un même essai. Tout ce que nous avons dit plus haut sur ce sujet, à propos du fondement de la géométrie, reste valable ici.

C'est d'ailleurs ainsi que doivent s'interpréter les considérations sur la théorie générale de l'objet, sur l'horizon axiomatique et sur la nature du formel par lesquelles nous avons préparé la seconde synthèse dialectique. Ces considérations instituent, à leur niveau, une nouvelle perspective d'élémentarité, la même d'ailleurs que celle à laquelle nous tendions déjà dans notre ouvrage *Qu'est-ce que la logique ?*

Dans cette perspective d'élémentarité, le problème du fondement des mathématiques et de la logique prend une portée et une signification toute nouvelle.

Les raisons qui précèdent auraient pu suffire. Or tout un ensemble de raisons historiques pesaient dans le même sens.

Nous saisirons à la fin de ces conclusions l'occasion d'expliquer de quelle utilité peuvent être certaines considérations historiques dans une étude telle que la nôtre.

Nous ne songerons pas d'ailleurs à faire l'énumération des indications défavorables dont il était indiqué de tenir compte, — défavorables à l'insertion dans la doctrine préalable d'une exigence d'autonomie ou d'achèvement en soi de l'un ou l'autre des trois aspects. L'une d'elles nous paraît cependant trop

importante pour que nous puissions la passer sous silence. Nous pensons ici à *la crise générale de l'évidence* qui, au début de ce siècle, s'étendait déjà et continuait à s'étendre à tous les secteurs de la connaissance.

Dans une discipline qui réaliserait l'idéal traditionnel de pure rationalité, une certaine forme de l'évidence (une évidence rationnelle) doit être installée en tant qu'ultime et légitime instance de jugement.

En géométrie, la crise de l'évidence géométrique remonte, nous le savons, aux premiers commentateurs d'EUCLIDE et à la critique qu'ils firent subir au postulat des parallèles. Dans les indications historiques qui précèdent ces conclusions, nous avons suivi le développement de cette crise jusqu'à son point culminant, où l'idée même d'une légitimité géométrique semblait s'être perdue, et jusqu'à son dénouement, c'est-à-dire jusqu'au moment où la légitimité géométrique reparaît sous la forme d'une légitimité axiomatique.

En analyse, la crise remonte peut-être aux éléates et aux paradoxes de ZÉNON.

Le *Nouveau Calcul* de NEWTON et de LEIBNIZ doit se frayer sa voie à travers le doute et la résistance. Conjurée une première fois par CAUCHY, CANTOR et WEIERSTRASS, la crise éclate de nouveau à la découverte des antinomies de la théorie des ensembles et de la logique mathématique. Les recherches sur les fondements s'efforcent encore de la surmonter.

Dans les sciences d'observation, (selon l'expression d'une méthodologie surannée) si loin qu'on repousse l'intervention directe de l'observateur, un certain recours à l'évidence sensible n'en reste pas moins inévitable. Or la physique moderne remet le sens et la portée de ces évidences en question.

Dans les sciences morales, il ne peut être question de renoncer à l'intervention de certaines valeurs morales inaliénables. Or l'intégrité de ces dernières se trouve remise en cause par la psychologie de l'inconscient.

Partout, d'ailleurs, la situation est en somme la même : on ne peut plus songer à rétablir les évidences rationnelles, sensibles ou morales dans leur légitimité originelle. Il s'agit au contraire de dégager et de développer à la fois, en satisfaisant à des exigences réciproques et conjuguées, une perspective d'élémentarité efficace et une perspective méthodologique cohérente dans laquelle l'élémentaire soit à sa place.

En bref, la situation au départ semblait bien comporter une indication d'ensemble défavorable à la doctrine des aspects purs.

Précarité de la première synthèse

Il serait cependant beaucoup trop simple d'interpréter cette indication générale comme une confirmation de la solution que vient offrir la première synthèse dialectique. Nos connaissances au départ portent beaucoup plus loin et ne laissent, d'avance, aucun doute sur la précarité de cette première solution. Il était clair d'emblée que celle-ci ne serait pas capable de rendre compte de deux découvertes fondamentales au moins :

sur la ligne géométrique, l'édification des géométries non euclidiennes vient compromettre l'unicité de l'aspect théorique. La première synthèse dialectique ne comporte rien qui puisse le laisser prévoir. L'équivalence de vérité entre l'aspect intuitif et l'aspect théorique s'en trouve profondément compromise.

Sur la ligne physique, les structures atomiques et quantiques viennent rompre l'accord entre le continu des apparences sensibles et le continu de l'étendue géométrique. L'équivalence de vérité entre l'aspect théorique et l'aspect intuitif d'une part et l'aspect expérimental d'autre part est essentiellement mise en défaut.

Il nous fallait donc avoir dès le départ la liberté de considérer la première synthèse dialectique et la perspective d'élémentarité qui s'en dégage comme une solution provisoire, comme un essai de solution susceptible d'être révisé et amélioré.

Dans cette intention, il nous fallait confronter cette première solution avec les expériences dont elles ne pouvaient précisément pas rendre compte. Comment allions-nous engager la procédure en révision ? Fallait-il prévoir un retour à la doctrine des aspects purs ? C'était là l'hypothèse la moins plausible. Mais c'était là aussi un des points centraux sur lesquels notre étude elle-même devait apporter une décision. Nous ne doutions pas que notre entreprise ne finît. par prendre la forme d'une expérience d'ouverture : pour que l'épreuve fût concluante, il fallait donc donner toutes ses chances à l'hypothèse contraire, à l'hypothèse de la fermeture en soi de l'aspect théorique, en particulier.

Les raisons de tenter une plus stricte spécification des trois aspects

Dès lors, la voie dans laquelle nous allions nous engager était toute tracée : il nous fallait reprendre l'examen des trois aspects, dans l'intention de leur conférer une plus grande précision, une plus complète autonomie et, bien entendu, une plus étroite correspondance à l'état de nos connaissances sur le monde réel. Allions-nous pouvoir aboutir à une spécification totale de chacun des trois aspects ou de l'un d'eux au moins ? La chose était douteuse, mais elle devait être tentée.

Dans tous les cas (si nous devions réussir) la spécification allait devoir être poursuivie jusqu'à l'apparition d'une situation nouvelle dans laquelle il redeviendrait possible de confronter les aspects mieux spécifiés et de les mettre en rapport. Pour être admissible, la nouvelle synthèse devrait naturellement pouvoir rendre compte des connaissances qui n'étaient pas encore intégrées dans la première synthèse dialectique, et qui nous avaient précisément obligés à dépasser celle-ci pour aller à la recherche d'une meilleure solution. Nous rappellerons dans un instant ce qu'ont été nos moyens de spécification. Nous reviendrons aussi à grands traits sur les conditions dans lesquelles le second palier, le palier de la seconde synthèse dialectique, a pu être atteint. Mais il nous faut tout d'abord faire place à une objection très naturelle, la réponse

qu'elle provoque mettant en lumière, à son tour, un des éléments essentiels de la situation. Voici cette objection :

Puisque la première synthèse dialectique doit être défaite et refaite pour donner lieu à une seconde synthèse dialectique, était-il vraiment indispensable de la prendre en considération ? N'eût-il pas été plus simple de tendre directement à la seconde synthèse dialectique ?

La réponse est nettement négative : la première synthèse dialectique n'est pas une étape qu'on peut supprimer dans la genèse de la situation où vient se placer la seconde synthèse dialectique. Sa fonction était de dégager et d'assurer une certaine position d'élémentarité. Or on conçoit difficilement comment une discipline scientifique, comment la géométrie en particulier, pourrait être convenablement édifiée en l'absence de certaines positions élémentaires. La fonction de la première synthèse dialectique est donc inaliénable. Avec les aménagements qui pourraient se révéler nécessaires, elle doit donc être reconstituée au sein de la seconde synthèse dialectique. Elle comporte un certain ensemble d'exigences à remplir qui conditionnent, pour une large part, la structure de toute synthèse ultérieure.

La fonction de la première synthèse est inaliénable

Le travail de révision et de spécification qui doit nous porter de la première à la seconde synthèse dialectique se fait donc sous un double contrôle, sous une double épreuve : la situation finale doit pouvoir s'intégrer, à sa manière, un certain ensemble de faits nouveaux, et doit pouvoir respecter, encore une fois à sa manière, un certain ensemble de conditions initiales.

(Cette dernière remarque appartient, bien entendu, à la méthodologie générale de la connaissance ouverte qui se dégage et se précise elle-même au fur et à mesure que progresse l'étude qu'elle contribue à orienter.)

Revenons maintenant à ce que nous nommions tout à l'heure nos procédures de spécification. Il nous a fallu faire appel à trois ordres distincts de considérations, car chaque aspect exigeait d'être traité selon sa nature.

(Pour les besoins de notre exposé, il nous parut d'ailleurs indiqué de ne pas chercher à intégrer toutes les exigences à la fois. Nous avons ainsi remis à plus tard le souci de tenir compte, dans une troisième synthèse dialectique, de l'existence des géométries non euclidiennes.)

Nouvel examen de l'aspect expérimental

Pour ce qui concerne l'aspect expérimental, les choses se présentaient de façon tout à fait simple. On dispose depuis longtemps d'un certain nombre de procédés techniques pour fabriquer certains objets, des plans, par exemple, revêtant une forme géométrique déjà fort approchée. Prenant comme exemple les procédés de rodage par usure mutuelle, nous avons examiné si l'emploi systématique de ces procédés permet de réaliser expérimentalement, techniquement, l'essentiel de la géométrie élémentaire. Il ne devait rien sortir d'imprévu de cet examen. L'emploi systématique de certaines techniques permet en effet, sans recours explicite à la théorie, de fabriquer une série de formes matérielles, des arêtes rectilignes, des surfaces planes, des coins droits, des triangles, etc., où les vérités géométriques se trouvent réalisées, dans une certaine marge d'approximation, comme des propriétés naturelles de ces corps.

Il n'est pas douteux que la géométrie puisse se présenter sous un aspect expérimental qui peut être réalisé dans une certaine indépendance des deux autres aspects. L'exemple traité permet-il de penser que cette indépendance puisse être totale ? Il montre au contraire que les techniques dont on use restent orientées par un certain nombre de vues intuitives immédiates, et par un certain nombre de conceptions théoriques élémentaires.

Le résultat de cette investigation de l'aspect expérimental peut donc se formuler comme suit : il est possible de préciser et de mieux spécifier, à partir d'une conception de simple bon sens, ce qu'il faut entendre par l'aspect expérimental de la géométrie. Le progrès de cette spécification exige la mise en œuvre de certaines techniques dont il existe déjà des exemples.

Nouvel examen de l'aspect intuitif

L'investigation dont nous attendions une connaissance précisée de l'aspect intuitif était loin de se présenter comme une entreprise aussi simple et aussi facile à comprendre. Rappelons quels étaient les éléments essentiels de la situation. La connaissance intuitive que nous possédons de l'étendue spatiale (et dont l'existence ne saurait être mise en doute) semble être indissolublement liée à deux caractères fondamentaux : *a)* elle est d'une efficacité éprouvée, *b)* elle nous paraît d'une entière évidence.

Nous avons déjà fait observer que la recherche scientifique moderne a d'ores et déjà franchi, dans nombre de secteurs, les limites de validité de nos conceptions naturelles. Pour la géométrie, deux faits dont nous avons déjà souvent fait mention sont à prendre sérieusement en considération : ce sont la découverte de la structure discontinue de la matière et celle des géométries non euclidiennes. La seconde consacre la crise de l'évidence rationnelle, la première celle des évidences sensibles. Or ces évidences sont les garanties mêmes de la perspective d'élémentarité qui assure le jeu de la première synthèse dialectique. On se trouve ainsi placé devant un dilemme des plus pénibles : s'élever contre l'expérience en maintenant les évidences dans leurs fonctions d'instances ultimes et sans appel, ou tenir compte de l'expérience en déclarant nulles et non avenues les garanties qui nous paraissaient les plus inaliénables.

Mais ce dilemme laisse échapper lui-même un des éléments les plus fondamentaux de la situation : il ne tient aucun compte de la validité éprouvée de la géométrie à l'échelle dite humaine, qu'on nomme ainsi pour la distinguer des grandes échelles de la cosmogonie et des petites échelles de la microphysique. Cette validité relative est aussi un fait d'expérience, c'est même l'un des

faits d'expérience les plus constants et les plus sûrs auxquels nous puissions nous référer. En renonçant à le faire valoir, on abandonnerait l'une des positions les plus fortes que nous puissions occuper; c'est donc dire que, en dépit de son apparente rigueur, le dilemme précédent doit être rejeté et qu'il nous faut chercher une troisième éventualité qui nous permette de rassembler et de mettre en valeur toutes les données essentielles de l'expérience.

Telle était donc la situation. À notre avis, la conclusion du rapide examen qui précède ne peut faire aucun doute : c'est l'évidence, rationnelle autant que sensible, qui devrait perdre sa validité absolue, afin de pouvoir conserver sa valeur réelle et relative. Allait-il être possible de relativiser les évidences sensibles et de subjectiviser les évidences rationnelles ? La conciliation de tous les éléments en présence semblait bien être à ce prix.

Il ne s'agissait donc pas de dévaloriser complètement l'évidence en tant qu'instance de garantie, et même en tant qu'instance dernière en tel ou tel état de nos connaissances. Il fallait réussir à en détacher, comme un moment subjectif, la valeur d'absolu qui nous semble en être inséparable. Il fallait arriver à comprendre pourquoi les évidences éveillent en nous, éveillent *nécessairement* en nous, la croyance en leur vérité inébranlable, même si leur domaine de justesse ne peut pas s'étendre indéfiniment vers les très grandes et vers les très petites dimensions.

Bien entendu, cette révision de l'idée d'évidence (c'est-à-dire de la conception que nous portons en nous du rôle et de la nature des évidences) ne devait pas, ne pouvait pas faire l'objet d'une simple et libre décision de notre part. Elle devait sortir d'une reprise en conscience assez pénétrante du jeu de nos propres facultés mentales.

Nous disions que chacun des trois aspects devait être étudié par des moyens appropriés à sa nature. Pour l'aspect intuitif, il nous fallait en quelque sorte procéder à un démontage des structures et des activités (réparties, pourrait-on dire, sur les versants psychiques et somatiques de notre être) qui déterminent et qui conditionnent, en nous et pour nous, la vision et la possession de l'étendue spatiale. La tâche pouvait sembler singulièrement difficile. Nous avions cependant un modèle du genre, le travail intitulé *Die Motorik als Organisationsproblem*, du savant zurichois R. HESS, prix Nobel de physiologie. Celui-ci entreprend de montrer, dans ce travail, par quel schéma d'organisation, par quel modèle formé d'enregistreur et d'effecteur on peut rendre compte des activités motrices dont nous sommes capables. Pour déboucher sur notre problème, il fallait introduire une conscience et la possibilité d'une prise de conscience dans le tableau. C'est pourquoi nous avons imaginé un modèle, ou plutôt une série de modèles, dans lesquels les rôles du corps et de l'esprit, unis dans l'être humain, sont répartis entre un robot et une personne adjointe. Il n'est pas difficile de comprendre comment le robot peut être le siège d'une

confrontation entre une image sommairement fidèle du monde environnant et un schéma de sa propre structure, confrontation dont la justesse sert de fondement à l'efficacité automatique et cependant limitée du robot. En interprétant, dans ce modèle, l'intuition géométrique par la prise de conscience (par la personne adjointe) de la structure du robot (structure qui joue pour elle le rôle d'un à priori), on rend compte de tous les caractères que l'expérience nous oblige à exiger de la connaissance intuitive : du caractère à la fois sûr et limité de sa validité en même temps que de son évidence. C'était là, précisément, le résultat dont nous avions besoin pour la suite.

En édifiant ces modèles que domine une certaine conception ouverte de l'homme, conception que nous avons résumée dans le principe de la poupée russe, c'est en somme une théorie de l'être humain, une anthropologie, que nous avons amorcée, — une théorie qui se borne à quelques traits d'ensemble pour prendre spécialement le secteur de nos activités mentales pour objet.

On nous objectera peut-être que cela n'est, en effet, qu'une théorie dont l'épreuve n'a pas encore été faite. Ce serait là une objection d'une entière justesse, mais qui ne toucherait en rien ce que nous avons voulu faire. Nous ne nous attarderons pas à défendre la validité de nos modèles, bien que toute une série d'arguments puissent être invoqués en leur faveur. En renonçant à cette défense, nous entendons mettre l'accent sur le point central des considérations auxquelles nous nous livrons ici : ce dont nous avons besoin, c'est uniquement de *pouvoir comprendre* que les deux caractères de l'intuition que nous avons à concilier ne sont pas fatalement inconciliables. Or, pour pouvoir comprendre, une hypothèse de quelque plausibilité suffit amplement.

Nouvelle spécification de l'aspect théorique

Pour ce qui concerne enfin l'aspect théorique, il suffisait de tirer la leçon de l'histoire de la géométrie élémentaire, pendant les deux derniers siècles. C'est précisément cette histoire que nous avons voulu esquisser dans les quelques indications historiques qui précèdent ces conclusions. On y voit comment, chose particulièrement frappante, le souci d'assurer une évidence complète aux fondements de la géométrie élémentaire, aboutit finalement à la crise de l'évidence, à la crise de toute légitimité géométrique. Cette crise finit cependant par se dénouer sur deux lignes de développement : sur la ligne analytique qui abandonne toute spécificité géométrique, et sur la ligne axiomatique qui renoue le fil de la légitimité géométrique. Pour l'élucidation de l'aspect théorique de la géométrie, seule cette seconde solution pouvait nous être de quelque utilité, la première ne devant intervenir que de façon plutôt indirecte. Le moyen d'investigation convenant spécialement à ce troisième aspect devait être simplement la réédification axiomatique de la géométrie élémentaire. Cette réédification devait cependant s'accompagner des précautions les plus minutieuses et d'un commentaire vigilant. La méthode axiomatique se présentait, en effet, comme

un moyen, — disons même comme le moyen — d'une spécification plus précise, plus exigeante, de l'aspect théorique. Allait-elle enfin nous permettre de lui conférer sa pleine et totale autonomie ? Il nous fallait examiner cette éventualité avec d'autant plus d'exactitude que nous nous attendions à devoir la rejeter.

Le résultat de notre examen fut tout d'abord de constater que la purification axiomatique ne réussit pas à expurger complètement le côté théorique de tout emprunt intuitif ou expérimental. Même dans le processus axiomatique, les trois aspects restent encore solidaires. Les liens qui subsistent entre eux sont plus ténus, mais ils sont peut-être plus essentiels.

Ce n'est pas sur cette ligne en quelque sorte interne que cette solidarité devait réapparaître de la façon la plus frappante. La méthode axiomatique présuppose, elle aussi, une doctrine préalable. Mais cette doctrine ne s'impose pas *au préalable* de façon univoque. Face au réel, plusieurs variantes peuvent entrer en concurrence :

Les variantes de la méthode axiomatique

a) La méthode axiomatique peut tout d'abord se présenter comme une méthode descriptive : les axiomes sont alors des vérités abstraites auxquelles répondent adéquatement des réalités du monde sensible.

Cette variante pourrait entrer telle quelle dans une première synthèse dialectique. Elle se heurte d'ailleurs à l'état de nos connaissances sur le monde physique.

b) Dans la variante que nous nommons analysante, la méthode axiomatique se présente comme un moyen d'analyse, de décomposition et de recomposition de ce que sont essentiellement les choses. L'édification axiomatique doit alors être précédée d'une analyse qui décompose les concepts géométriques en leurs éléments les plus simples, éléments dont la nature est de ne pas pouvoir être décomposés à leur tour. Les axiomes expriment alors les relations qui doivent nécessairement s'établir entre ces éléments. L'édification axiomatique nous ramène ensuite au niveau de la connaissance géométrique normale (PASCH).

Cette variante comporte une théorie du réel à laquelle le développement actuel des sciences physiques enlève toute plausibilité.

c) Dans sa variante logique, la méthode axiomatique peut être envisagée comme un moyen de construire un modèle purement logique de ce qui fait ordinairement l'objet de la géométrie (HILBERT).

Pour atteindre son but, la construction de ce modèle devrait se compléter d'une théorie de l'interprétation, théorie dont on ne voit guère comment elle pourrait se dispenser de refaire le chemin que nous avons fait.

Aucune de ces conceptions ne convient à la mise en rapport de l'aspect théorique sous sa forme axiomatisée et de l'aspect expérimental dans sa structure telle qu'elle nous est maintenant connue. Ni l'axiomatisation descriptive ni l'axiomatisation analysante ne pouvait être acceptée comme partenaire adéquate pour recréer le jeu d'une synthèse dialectique conforme aux données de la situation. Ce qui nous faisait défaut, c'était une axiomatisation schématisante, dans laquelle les axiomes ne sont plus simplement, mais schématiquement et sommairement adéquats à leur interprétation expérimentale. Dès ici et pour un certain temps, la situation se retourne complètement. Les exigences à faire valoir se portent de l'échelon géométrique vers l'échelon méthodologique. La géométrie, dans la validité sommaire de son interprétation expérimentale redevient l'exemple privilégié, l'exemple convaincant d'une certaine connaissance qu'il nous faut tenir désormais pour possible et même pour normale : de la connaissance par abstraction schématisante.

La connaissance par abstraction schématisante

C'était donc à l'élaboration de ce mode de connaissance qu'il nous fallait désormais nous attacher, nous réservant de revenir à l'aspect théorique de la géométrie, une fois ce point suffisamment élucidé.

Voici donc comment le raisonnement allait être conduit :

Peut-être avions-nous cru que les corps géométriques représentent un idéal dont les corps matériels peuvent s'approcher de plus en plus, la différence pouvant tomber au-dessous de toute limite. Il nous fallait dans ce cas reconnaître que nous nous étions trompés sur ce dont nous sommes capables. Le progrès de la connaissance physique nous révèle l'un des caractères fondamentaux de notre vision intuitive ou de notre reconstruction théorique des formes étendues : il existe entre ces formes et les réalités qu'elles prétendent saisir une différence analogue à celle qui sépare un schéma de la chose schématisée. Nous pouvions l'ignorer, tant que les mesures restaient à notre échelle; la chose devient patente aux échelles atomiques.

Va-t-on de ce fait conclure que les moyens que la géométrie nous offre ne conviennent pas à l'investigation du monde réel ? Nous sommes dans l'incapacité d'y renoncer. Le problème qui se pose n'est pas de remplacer la géométrie par quelque chose dont nous n'avons encore aucune idée. C'est au contraire, ayant accepté le fait tel qu'il est, d'en tirer les conséquences quant à l'idée que nous nous faisons de nos propres facultés de connaissance.

L'aide que la géométrie nous prête à ce moment, c'est d'être un irrécusable modèle d'un mode de connaissance qui est nôtre comme le sont nôtres les organes de nos sens. Le seul parti raisonnable est par conséquent de passer à l'élaboration d'une théorie de la connaissance schématique, en s'appuyant sur l'exemple de la géométrie. S'il le fallait, d'autres exemples pourraient d'ailleurs être tirés de toutes les autres disciplines scientifiques.

C'est donc là ce que nous avons fait pour la géométrie. On ne s'étonnera plus, nous l'espérons, que la chose ait été possible. Et l'on ne demandera plus sur quelles connaissances antérieures assurées nous avons pu nous fonder. Faut-

il le répéter, l'idée du fondement antérieur appartient à une méthodologie surannée, que rien ne soutient plus. La procédure qui s'affirme et se confirme de plus en plus n'est pas une procédure de fondement, c'est une procédure d'essai, — c'est simplement la procédure aux quatre phases dont il a tant été question plus haut.

La révélation du caractère irrémédiablement schématique de l'adéquation du théorique à l'expérimental, en géométrie, engendre une situation *b)*. Il faut imaginer une hypothèse intégrante, une hypothèse qui permette d'insérer le fait nouveau dans la situation primitive, une éventuelle révision de celle-ci étant également légitime. L'épreuve cruciale que doit subir l'hypothèse intégrante, celle qui consacre son droit à l'existence, c'est la réussite de la double procédure de l'insertion du nouveau et de la révision de l'ancien.

La doctrine de la connaissance schématisante n'a donc pas à recevoir sa légitimité d'une doctrine antérieurement constituée, la réussite de la double procédure dont nous venons de parler est elle-même créatrice de légitimité. Elle n'est pas tenue de ne faire appel qu'à des concepts déjà valables, l'esprit humain est libre et capable d'en inventer et d'en essayer à chaque instant de nouveaux. Elle n'est pas astreinte à n'avoir recours qu'à des moyens discursifs déjà formés et désormais invariablement fixés; comme les idées qu'il exprime, le langage qui les exprime est à la fois le moyen et l'objet d'une création sans cesse renouvelée.

Ainsi, les expressions-clés de la doctrine de la connaissance schématisante tels que le « schéma descriptif » ou le « schéma constitutif », la « structure propre du schéma », la « signification extérieure », 1'« horizon de réalité », etc., sont des expressions neuves qui ne prennent pas leur sens d'avoir été simplement formées avec des mots déjà connus, avec des mots ayant leur pleine et entière signification.

Le sens leur vient de la façon dont ils se sont prêtés à l'examen, à l'élucidation, à la conception, à l'élaboration discursive du rapport de l'idée à la réalité dont la géométrie (entre autres disciplines) nous offre un exemple d'une valeur indiscutable.

Nous ne songeons pas à reprendre ici par le détail l'élaboration de la doctrine elle-même. Mais nous croyons utile d'insister sur le fait que cette élaboration n'est qu'un moment de la révision qui doit nous mener de la première position d'élémentarité à une situation précisée où l'accord entre les trois aspects puisse être rétabli.

Nous n'avions pas à démontrer la possibilité d'une « connaissance par schématisation », puisque l'usage de cette forme de connaissance est un fait dont nous sommes coutumiers. Nous avions à intégrer ce fait dans l'idée que nous nous faisons de nos moyens et de nos façons de connaître. Nous pouvons maintenant revenir à l'examen des trois aspects, avec l'intention de les

envisager sous l'angle qui vient d'être ouvert. Nous pensions que la conception de la méthode axiomatique pourrait en être affectée en tout premier lieu. Cette attente se confirme-t-elle ?

Retour à la méthode axiomatique

C'est là précisément l'un des résultats les plus immédiats de notre analyse : toutes les idées-clés de la concordance schématique peuvent être très naturellement reportées sur la méthode axiomatique. Les axiomes, en particulier, représentent une certaine base de la concordance du schéma axiomatique avec sa signification extérieure, la déduction devant être, d'autre part, identifiée à une technique spécialement appropriée, dans l'horizon du schéma.

Cette interprétation de la méthode axiomatique n'est pas arbitraire : elle rend au contraire à l'axiomatisation sa fonction dans la connaissance du réel. Elle reste bien créatrice d'un aspect théorique et abstrait, mais ce dernier, mieux saisi et mieux compris, n'est plus interprétable comme une simple et fidèle représentation d'un réel donné et bien déterminé : cet abstrait a valeur de schéma, l'axiomatisation est une procédure d'abstraction schématisante.

Par le détour du modèle des robots et de leur personne adjointe, l'idée de la concordance schématique réagit aussi profondément sur l'idée qu'on peut se faire de la nature de l'intuitif. La représentation du monde extérieur dont un robot peut être le siège ne saurait être que schématique : le modèle atteint ici son but principal qui est de nous faire comprendre que la connaissance intuitive, (sans en excepter les évidences) puisse n'être, elle aussi, qu'une connaissance schématique.

Quant à l'aspect expérimental, il n'a qu'à être ce qu'il peut être.

La situation s'est ainsi éclaircie : les trois aspects étant tous trois interprétés dans le sens d'une validité, d'une représentation ou d'une réalisation schématiques, on retrouve la possibilité de les rapprocher et de rétablir entre eux les concordances (et les différences) dont le jeu constitue ce que nous nommons une synthèse dialectique.

L'idée de concordance schématique inspire une nouvelle synthèse des trois aspects

La synthèse des trois aspects est maintenant toute dominée par l'idée de concordance schématique qui, seule, en assure la reconstitution.

Remarquons qu'au point où nous en sommes, la question des *Nouveaux Éléments* peut être, au moins en principe, regardée comme éclaircie.

En fin de compte, c'est avec une facilité paradoxale qu'on écarte les difficultés auxquelles l'interprétation de la géométrie élémentaire se heurte : il suffit, en effet, de changer de doctrine préalable. La doctrine de l'équivalence de vérité des trois aspects s'étant révélée impropre à présider aux exigences nouvelles, il suffit de lui substituer l'idée directrice de la concordance schématique. La géométrie élémentaire reprend alors, sous sa forme mathémati-

que inchangée, son rôle théorique dans la synthèse dialectique des trois aspects.

Cette synthèse apporte, au moins en principe, la solution au problème des *Nouveaux Éléments*.

Dans notre étude, c'est la synthèse dont il vient d'être question que nous aurions pu choisir comme seconde synthèse dialectique. Nous aurions ainsi attaché une importance toute particulière à la question de la géométrie élémentaire *euclidienne*, et à sa mise en rapport avec les problèmes de la connaissance la plus moderne. Nous ne nous sommes cependant pas arrêtés à ce palier : c'est seulement une étape plus loin qu'est venue se placer la réorganisation provoquée et dominée par les idées de schéma et de concordance schématique. Avions-nous des raisons péremptoires de procéder de la sorte ?

C'est que, au moment où la solution du problème des *Éléments* se profile dans sa paradoxale simplicité, le problème perd lui-même son urgence et sa portée primitive. Il en fut ainsi historiquement : nous avons cherché à le faire voir dans nos considérations historiques. Tant qu'il s'agissait encore de démontrer le Postulat des parallèles ou de le remplacer par quelque autre propriété très évidente, c'était bien du problème des Éléments qu'on s'occupait. Mais dès le moment où, sous un nom ou sous un autre, les géométries non euclidiennes entrèrent en jeu, dès le moment où l'intérêt se porta non plus sur la vérité par évidence de tel ou tel énoncé, mais sur la vérité en soi de telle ou telle géométrie, le problème des Éléments était dépassé : c'est dans l'expérience de l'ouverture de l'idée de géométrie qu'on s'engageait.

Il en est de même dans la perspective méthodologique : dès le moment où l'analyse de la procédure axiomatisante nous a mis en présence de la fonction schématisante de cette procédure, c'est le problème de la « distance » entre la schématisation et la formalisation, entre le schéma et le symbole qui prend pour un temps au moins le pas sur tous les autres. Ce même problème va d'ailleurs aussi se poser dans la confrontation de la vérité euclidienne et des vérités non euclidiennes.

L'axiomatisation formalisante

Tout compte fait, il nous a paru plus utile (et plus commode aussi) de faire sans plus attendre un pas encore vers l'analyse de la procédure axiomatique. Celle-ci a naturellement pour objet (nous l'avons expliqué) et pour premier résultat de conférer au schéma une existence relativement autonome, en face de sa signification extérieure. Le rôle de l'intuition géométrique s'y trouve tout particulièrement réduit — sans parler de celui des modèles physiques. Pourquoi ne pas redoubler dans le même sens, en cherchant à éliminer le plus rigoureusement possible tout apport « extérieur » au schéma et toute signification antérieure du matériau dont il est fait ?

De schématisante, l'axiomatisation devient structurante et formalisante. Cette façon plus radicale et plus incisive de schématiser permet-elle de dégager un aspect abstrait ou théorique complètement autonome ? Il n'en est encore rien.

Les schémas de structure restent encore engagés dans l'intuitif et même dans l'expérimental par l'intermédiaire de certaines notions fondamentales telles que celles de l'objet logique (ou objet de nature quelconque), de la relation, elle aussi de nature imprécisée, pouvant s'établir entre les objets logiques de telle ou telle configuration.

L'axiomatisation venant de la géométrie science-de-l'espace, débouche ici sur la *théorie générale de l'objet* (théorie de l'objet quelconque) que nous traitions déjà dans l'ouvrage intitulé : *Qu'est-ce que la logique ?*[1].

Cette nouvelle « désincarnation » des idées et des énoncés géométriques doit d'ailleurs s'accompagner de la conception-création d'un horizon de réalité approprié, que nous avons nommé l'horizon axiomatique (mais qu'il eût été aussi juste de nommer l'univers des objets logiques).

C'était là que pouvait prendre place la grande synthèse qui organise, du réel au symbole, les aspects fondamentaux de la géométrie classique. La figure 73, chap. IV, p. 266, en donne le schéma descriptif.

Ce schéma résume, pour être intégré dans une théorie de la connaissance qui *devra* pouvoir s'y prêter, le statut méthodologique de la géométrie, dans sa version euclidienne.

La pluralité des géométries pures

Dès ici, nous avons en notre possession tous les moyens qui vont nous permettre de tenter, à travers l'édification des géométries non euclidiennes, l'expérience (méthodologiquement décisive) de l'ouverture de l'idée de géométrie et de l'idée d'espace.

Pour un certain temps, le théâtre de l'action va se retrouver du côté théorique. Il importe que ce dernier se présente maintenant sous son aspect le plus précis, dans son autonomie la plus entière. Les soins les plus minutieux ont été pris pour en arriver là. C'était là l'un, si ce n'est le principal, des buts auxquels tendait l'étude des procédures axiomatiques, et tout spécialement la mise au point de leurs variantes schématisantes et structurantes. Que sommes-nous, que pensons-nous être en droit d'attendre de cette épuration du théorique, du rationnel ? Selon les vues de la méthodologie classique, (nous voulons dire de la méthodologie qui pose en fait l'existence autonome et nécessaire d'un aspect mathématiquement vrai) toutes les chances, toutes les conditions devraient être remplies, pour que la vraie géométrie soit à l'aboutissement de cet effort. Rien ne devait être négligé pour que cette expérience d'épuration fût menée avec toutes les garanties possibles de clarté et de précision.

Ainsi s'explique le souci d'être à la fois rigoureux et complet qui a présidé à la démonstration du théorème de l'alternative, à l'édification du modèle de POINCARÉ, à l'étude de l'indépendance du postulat d'EUCLIDE, etc. (Ce même

[1] F. GONSETH, *Qu'est-ce que la logique ?* Paris, Hermann 1937.

souci nous a d'ailleurs obligé à reprendre entièrement la question à partir des énoncés traduits, énoncés qui n'ont donc plus qu'une validité verbale. Seul, nous semble-t-il, le recours à l'horizon axiomatique permet un raisonnement valable.)

Nous n'insisterons pas sur les détails de l'entreprise. Il nous fallait cependant souligner que sa valeur dépend essentiellement de la rigueur avec laquelle elle est conduite.

Dans la perspective classique, le résultat qu'on obtient est paradoxal à souhait : la procédure de purification d'où la géométrie aurait dû sortir à la fois pure et nécessaire, engendre une pluralité de « géométries pures », de géométries *également* pures. Entre elles, l'axiomatisation structurante ne peut plus établir aucune différence de vérité. En un mot, elles sont toutes également légitimes.

L'expérience d'épuration devient expérience d'ouverture

Ainsi, en édifiant les géométries non euclidiennes, en veillant à ne négliger aucune des précautions et des subtilités de la méthode axiomatique, on aboutit à un résultat tout différent de celui qu'on pouvait tout d'abord escompter : l'expérience d'épuration se transforme en une expérience d'ouverture. L'intention même de séparer le côté théorique pour le fonder de façon totalement sûre conduit à une scission de l'idée de géométrie en plusieurs variantes égales en légitimité rationnelle précisée. Quelle est la portée de ce résultat ? Il touche tout d'abord la méthodologie géométrique, puisqu'il apporte un renseignement imprévu, mais incisif, sur la nature, — sur ce qu'on hésitera désormais à appeler la nature des êtres ou des idées géométriques. On s'accorda longtemps dans la conviction que les idées géométriques offraient le modèle même des idées parfaitement achevées et arrêtées, des idées fermées en soi et invariables du fait de leur idéale perfection. Que venons-nous d'apprendre ? Il est maintenant devenu clair que cette conviction doit être sérieusement relativisée, si l'on ne veut pas être contraint de la jeter par dessus bord : au terme de notre expérience, la géométrie s'offre désormais comme le modèle d'une discipline ouverte, — ouverte jusqu'aux racines de la conscience que nous en pouvons prendre.

C'est là un résultat qui demande d'être intégré dans là méthodologie géométrique; mais c'est surtout, à travers la géométrie, une exigence à intégrer dans toute théorie de la connaissance. Une théorie de la connaissance qui veut rester en accord avec la pratique efficace de la connaissance doit elle-même être telle que les idées ouvertes y trouvent leur place légitime.

Du côté théorique, notre étude géométrique avait ainsi atteint son point culminant. Mais son retentissement méthodologique ne s'épuise pas dans les remarques qui précèdent. En refusant (comme une erreur essentielle) l'idée de fonder sur une légitimité antérieure la géométrie telle qu'elle nous apparaît à

travers vingt-cinq siècles d'histoire, nous disions que le progrès de la discipline et le progrès de sa méthodologie devraient s'appuyer l'un sur l'autre, s'engendrer l'un l'autre par les exigences qu'ils développeraient l'un par rapport à l'autre. L'édification de la géométrie hyperbolique (envisagée comme une expérience d'ouverture) nous offre précisément un exemple des plus frappants d'une double démarche de ce genre. En son point décisif, notre étude démontre donc par le fait, par la pratique et le succès, la non-nécessité et la facticité de la doctrine du fondement sur une instance première (ou antérieure) de légitimité.

Nous aurons d'ailleurs à revenir sur ce point d'une importance centrale.

Le résultat acquis sur le plan théorique doit naturellement être à son tour intégré dans la perspective d'ensemble. Il faut donc opérer une nouvelle confrontation de l'espace théorique (désormais ouvert) avec les deux autres aspects. Un examen renouvelé de ces derniers devient également indispensable. Une nouvelle synthèse organisatrice des rapports des trois aspects devra être enfin imaginée. La question qui se pose en cette ultime tentative est a suivante : la tentative de synthèse corrigera-t-elle ou prolongera-t-elle l'expérience aboutissant à l'ouverture de l'idée de géométrie ?

Synthèse organisatrice des trois aspects. Ouverture de l'idée d'espace

La réponse est sans équivoque : en intégrant dans une troisième synthèse l'expérience d'ouverture qui s'est déroulée sur le plan théorique, on amorce une nouvelle expérience d'ouverture dont la notion d'espace est cette fois l'objet. Cette notion, une fois la synthèse établie, se trouve scindée en un certain éventail de possibilités d'une égale légitimité méthodologique.

Le destin de la notion d'espace et de ses aspects est-il ainsi achevé ? Rien ne nous permet de le supposer. Notre étude pourrait être dès maintenant prolongée vers les espaces abstraits ou vers les champs physiques. Quant à l'expérience de caractère géométrique que nous nous proposions de faire, elle atteint ici son terme.

La géométrie, dans la structure et dans la fonction que lui confère la troisième synthèse dialectique, se place au niveau de la connaissance de notre temps. Il nous reste à prendre plus nettement conscience de la situation méthodologique à laquelle nous avons été ainsi conduits. Sous deux angles différents, nous allons donc jeter un regard sur l'ensemble du chemin parcouru :

La perspective méthodologique de la géométrie

a) tout d'abord, pour ce qui concerne l'aspect méthodologique de la doctrine géométrique,

b) pour ce qui regarde ce que nous avons déjà appelé un (éventuel) Nouveau Discours de la Méthode.

a) Pour ce qui concerne plus spécialement la géométrie, nous avons établi une *perspective méthodologique* qui fait corps avec la discipline elle-même. Celle-ci, nous l'avons vu, était loin d'être toute donnée et précisée par avance;

la perspective méthodologique ne l'était pas davantage. Quant à cette dernière, sa loi de formation ne fut pas de se développer avec nécessité à partir d'un fondement absolument sûr. Elle fut, tout au contraire et avant tout, de répondre aux exigences qui lui venaient du progrès de la discipline (qui lui venaient aussi du développement de la connaissance en général, — la discipline se trouvant, en retour, assurée de se prêter à une méthodologie qui lui convenait, et dans laquelle se reflète aussi le mouvement général de la connaissance).

Dans la perspective méthodologique qui s'est finalement dessinée, la discipline va tout d'abord s'ancrer non dans une position de légitimité à jamais incontestable, mais dans certaines positions d'élémentarité que la pratique a mises à découvert (et qui n'étaient pas clairement aperçues au départ historique de la discipline).

La perspective méthodologique comporte ensuite un cheminement orienté des positions élémentaires vers une succession de situations évoluées. Dans toute position évoluée, les positions antérieures sont à retrouver, à rétablir, à réintégrer et à réinterpréter. Une position évoluée n'est atteinte qu'à travers les positions qui la précèdent; sa signification reste donc engagée dans les significations antérieures. Celles-ci sont d'ailleurs informées et réformées par le fait d'être reprises et réinterprétées dans les situations postérieures. La perspective introduit donc, à défaut d'une univocité de signification, une pluralité cohérente, une organicité des significations.

Enfin, la perspective reste, par principe, ouverte. On ne saurait affirmer sans arbitraire que le cheminement qui s'y arrête ne pourra plus jamais la dépasser.

Il est bien évident que cette perspective méthodologique ne fait pas que lier des positions qui existeraient et prendraient leur sens chacune pour soi. Elle est au contraire un élément constitutif de la discipline, par quoi nous voulons dire qu'elle contribue à former le sens de chacune des parties, de chacun des aspects, de chacune des positions de la discipline. La discipline intégrale, c'est l'ensemble de tous les aspects avec le jeu des différenciations et des identifications que les synthèses dialectiques établissent entre eux, — et c'est l'ensemble des positions que la discipline est capable d'occuper, avec les liaisons que la perspective méthodologique permet de nouer ou de dénouer entre elles.

La perspective méthodologique dont nous parlons n'est naturellement pas une simple perspective historique. L'histoire de la discipline y a, certes, mis sa marque profonde. C'est cependant une perspective d'une autre nature recréée dans une intention qui a sa valeur propre, l'intention, pour dire la chose en peu de mots, qui préside à toutes les recherches sur la Méthode.

Les principes

Pour être idoine à sa fonction (telle que la perspective méthodologique l'institue) le matériau géométrique sous toutes ses formes doit satisfaire à certaines exigences qu'il est commode d'énoncer sous forme de principe.

1. Il doit satisfaire à un *principe d'ouverture* selon lequel aucun élément de la connaissance géométrique ne saurait sans arbitraire être posé fermé, achevé dans sa signification et par conséquent irréformable dans toutes ses acceptions. Rien ne s'oppose, selon ce principe, à telle ou telle hypothèse de fermeture, qu'on se proposerait de mettre à l'épreuve. Il doit cependant être interdit de décréter qu'un élément, d'ailleurs quelconque, de la connaissance géométrique ne sera jamais susceptible d'être réformé, qu'il ne sera jamais capable de la révision qui lui permettrait éventuellement d'entrer dans une position ultérieurement corrigée ou précisée.

2. Il doit satisfaire à un principe de pluralité des aspects selon lequel il peut exister plusieurs aspects différents et mêmes irréductibles les uns aux autres, de ce qui va constituer pour nous une seule et même réalité. Chacun de ces aspects est propre à un *mode d'approche* de cette réalité. Il lui appartient et le caractérise. Les formes que le « réel » prend ainsi pour nous tombent aussi sous la catégorie du réel : on ne saurait les concevoir sans leur attribuer également une certaine façon d'*être du réel*. L'appartenance d'un certain nombre d'aspects à un même réel se manifeste par la possibilité d'instituer entre eux un jeu d'identification, de différenciation et d'interprétation plus ou moins analogue à nos synthèses dialectiques.

3. Sous ses différents aspects, la connaissance géométrique doit satisfaire à un principe d'engagement, engagement qui peut en certains cas prendre la forme d'une activité technique plus ou moins étroitement délimitée (principe de technicité). On doit envisager, selon ce principe, que le progrès de la discipline, dans l'un ou dans l'autre de ces modes d'approche puisse dépendre de la mise en œuvre de moyens adéquats, moyens, d'ailleurs, qui ne sont pas nécessairement donnés d'avance. La découverte est éventuellement décisive pour le devenir de la connaissance.

4. La discipline doit enfin satisfaire à un principe d'intégralité selon lequel un ensemble de moyens (mentaux, verbaux, techniques, etc.) organisés en vue d'une certaine connaissance n'est pas démontable en parties séparées revêtant et conservant par elle-même une signification adéquate.

Comme la perspective méthodologique dont il était tout à l'heure question nous en offre un exemple (qui peut en quelque sorte être pris pour modèle), la façon dont il faut passer de l'une à l'autre, représente parfois un élément constitutif de l'organisme à constituer.

Les quatre principes précédents résument quatre aspects de la discipline géométrique telle qu'elle s'intègre dans l'ensemble de nos connaissances actuelles.

La perspective méthodologique dont ils sont issus est-elle la seule possible, la seule qui puisse éclairer la discipline en faisant corps avec elle, — en un mot, la seule idoine ? Nous ne pensons pas avoir le droit de l'affirmer. Peut-

être ce qui doit être finalement intégré pourrait-il l'être dans un autre ordre méthodologique. Les quatre principes n'en subsisteraient pas moins : ils sont inséparables de toute perspective méthodologique comportant à la fois une position d'élémentarité et un cheminement à partir de cette position.

L'exigence générale d'ouverture

b) Nous avons eu la prudence d'énoncer les résultats précédents comme s'ils ne devaient être valables que pour la géométrie et pour la connaissance qu'elle nous assure. C'était une prudence de pure forme. Ces résultats dépassent immédiatement les limites que nous semblions vouloir ainsi leur fixer. Aussitôt formulés, ils se constituent en exigences que toute méthodologie, que toute théorie de la connaissance auront à satisfaire.

Voici, par exemple, l'exigence que représente à elle seule l'ouverture des notions géométriques fondamentales : aucune théorie de la connaissance n'a plus le droit de laisser ce fait de côté, sans y prendre garde. Il est désormais illégitime de poser qu'une connaissance valable doit nécessairement se constituer à l'aide d'éléments achevés dans leur nature et dans leur signification. Il est au contraire obligatoire de faire une place légitime aux éléments ouverts, aux éléments capables d'une évolution ultérieure. Pour être elle-même valable, une théorie de la connaissance doit être imaginée de telle façon que l'exigence d'ouverture lui soit incorporée. Les notions géométriques ne devront d'ailleurs pas être les seules à en bénéficier. Elles ont été l'occasion d'une expérience qui va plus loin qu'elles. Avant cette expérience, la géométrie pouvait passer pour le modèle d'une science privilégiée dont toutes les parties et tous les éléments avaient été portés à leur perfection. Après l'expérience elle garde sa valeur de modèle, mais dans un sens tout à fait différent.

La géométrie est maintenant l'exemple d'une discipline sur laquelle l'expérience d'ouverture s'est faite en dépit du caractère purement rationnel qu'on avait cru pouvoir lui attribuer. Cet exemple suffit pour jeter une ombre sur toutes les autres disciplines rationnelles et sur leurs évidences.

Il est naturellement facile d'argumenter de façon tout analogue à partir des autres exigences (et des autres principes, en particulier) auxquelles la méthodologie géométrique doit désormais satisfaire. La valeur de l'exemple de la géométrie repose dans tous les cas sur le fait que, dans l'histoire, l'idéal rationnel a pu s'incorporer dans la rigueur et la clarté géométriques. Si la géométrie peut être atteinte par l'ouverture, comment démontrera-t-on que les autres disciplines rationnelles ne peuvent pas, ou ne doivent pas l'être ?

Nous avons toujours affirmé que la méthodologie de la géométrie n'est pas constituable d'un coup en tant que discipline antérieure à la géométrie elle-même. Maintenant que nous sommes devant le fait accompli, devant une méthodologie géométrique dont nous avons pu tracer les grandes lignes sans lui avoir donné la garantie d'un fondement explicitement assuré, nous avons, certes,

le droit de porter notre regard encore plus loin. Au-delà de la *Méthode en géométrie*, c'est la théorie de la connaissance et spécialement la Méthode de la connaissance scientifique que nous visions; c'est finalement à préparer le *Nouveau Discours de la Méthode* que notre analyse tendait. Le fait accompli en géométrie est-il de nature à éclaircir et à préciser le problème général de la Méthode ?

Le problème du Nouveau Discours

Que dire, tout d'abord, de l'aspect méthodologique des autres disciplines ? L'une d'elles, la Logique de la déduction, demandait à être traitée comme un aspect de la méthode axiomatique. Nous l'avons fait brièvement. Il s'en est déjà dégagé, en première esquisse, une méthodologie comparable à celle de la géométrie dans son ensemble; on y retrouve l'ancrage des procédures déductives dans les trois aspects d'une position d'élémentarité et le cheminement à partir de celle-ci vers une situation précisée.

Pour ce qui en est des autres disciplines, un regard qui en cherche les différentes faces suffit pour y retrouver une situation présentant des analogies avec la situation que la géométrie nous offre comme terme de comparaison.

Le Nouveau Discours ne pourra donc manquer de reporter sur la connaissance scientifique tout entière les résultats méthodologiques déjà formulés, — de les y reporter comme des hypothèses déjà plausibles et demandant à être mises à l'épreuve. Dès ici, il nous paraît probable que le Nouveau Discours devra mettre fortement en lumière l'opportunité de renoncer à la recherche d'un fondement dernier pour la remplacer par la recherche d'une position d'élémentarité (dans laquelle l'approfondissement de la connaissance puisse encore marquer sa trace). Il en résultera que la Nouvelle Méthode, acceptant l'exigence d'ouverture, aura à rechercher les conditions auxquelles la connaissance doit satisfaire pour pouvoir être ouverte.

Le moment décisif du Nouveau Discours

Le moment décisif du Nouveau Discours sera cependant, pensons-nous, celui où il se retournera vers lui-même pour se demander quelles sont les garanties de sa propre authenticité.

Il deviendra clair à ce moment-là que ces garanties ne peuvent pas être de caractère inconditionnel ou définitif, qu'elles ne peuvent être ni purement rationnelles, métaphysiques ou philosophiques, ni purement opérationnelles, empiristes ou constructives. En cherchant sa propre justification, le Nouveau Discours ne pourra (c'est, pour nous, une conviction que nous n'avons aucune raison de mettre en doute) que rendre plus explicite la position d'élémentarité méthodologique à partir de laquelle il réussit à se constituer. Cette position est complexe : l'antérieur de nos vues les plus élémentaires sur les activités, les engagements, les libertés aussi dont nous sommes capables y concourent, pour en former un aspect qu'on peut dire intuitif; sous différents angles, un moment discursif et théorisant l'accompagne, dans le schéma des quatre phases, par exemple; un aspect expérimental en est fourni par les essais, par tous les essais,

quels qu'ils soient, d'organiser la recherche et ses résultats en systèmes. L'analyse ne réussit pas à épuiser cette complexité, elle ne peut qu'ouvrir la voie à des procédures précisantes et spécificantes.

Ainsi, le Nouveau Discours prendra la forme d'un Discours de la Méthode de la connaissance ouverte, et la Nouvelle Méthode s'engagera dans le cheminement des méthodologies ouvertes.

Le moment est enfin venu d'exposer le rôle et la valeur que nous attribuons aux considérations historiques.

Valeur des considérations historiques

Qu'il soit tout d'abord bien entendu que nous n'envisageons pas l'histoire comme le milieu d'un développement qui porterait en lui sa fatalité et sa nécessité. En particulier, l'histoire de la géométrie ne doit pas être tenue pour un déroulement, pour un accomplissement progressif dont chaque phase préparerait la suivante avec une certaine rigueur méthodologique. Certes, tout progrès de la connaissance s'inscrit dans l'histoire, mais une perspective méthodologique n'est pas simplement une perspective historique. La dernière phase d'un développement, la phase actuelle, n'est pas nécessairement la seule possible et la meilleure possible au sens que les mots nécessairement et possible prennent dans une perspective explicative. Et ce seul fait, le fait qu'il nous est possible d'instituer une perspective génétique et méthodologique qui ne coïncide pas avec la stricte perspective des faits historiques suffit pour nous libérer d'une certaine contrainte déterministe ou causale dans l'appréciation des faits historiques. Cette liberté de ne pas tenir ce qui fut dans l'histoire comme ayant dû se produire fatalement est sous tous les rapports la condition sine qua non pour que l'histoire puisse nous servir d'enseignement.

Toute la question est là : quel enseignement entendons-nous tirer de l'histoire de la géométrie ?

Les lignes d'essai de la géométrie

Si l'on ne gagne rien à considérer le développement d'une discipline comme un processus nécessaire, bien des questions s'éclairent si l'on cherche à y distinguer les lignes d'essais qui s'y dessinent.

Pourquoi avons-nous spécialement étudié la période qui va de CLAIRAUT à PASCH et HILBERT ?

C'est qu'elle apporte, à bien des égards, un certain ensemble de confirmations aux thèses que nous avons exposées; elle peut être envisagée comme une période d'élaboration de ces thèses; nous avons pensé qu'en le faisant bien voir, nous renforcerions sérieusement notre argumentation.

a) Cette période offre tout d'abord le spectacle d'une crise profonde (et qui pouvait sembler irrémédiable) de la légitimité géométrique, — et du dénouement de cette crise par la reprise et la rénovation, en un climat tout nouveau, celui de la méthode axiomatique.

CLAIRAUT pensait avoir assuré la géométrie dans ses trois aspects à la fois

(usant aussi, du côté théorique, de raisonnements infinitésimaux que nous ne pouvons plus reconnaître pour valables). Mais les *Éléments* de CLAIRAUT ne mirent pas fin aux recherches sur les parallèles. Ces recherches s'alliaient déjà à une certaine mise en question de la doctrine des évidences. Ces recherches, nous l'avons vu au cours de nos brèves études historiques, devaient aboutir, en même temps qu'à l'édification des géométries non euclidiennes, à un véritable évanouissement de la valeur des évidences proprement géométriques.

C'est sur la ligne de la géométrie projective, spécialement sous sa forme analytique, que la géométrie devait retrouver son assise méthodologique, avant le recours à la méthode axiomatique.

Ce que l'histoire nous offre ici, c'est la preuve par le fait, que la doctrine de l'évidence rationnelle ne s'impose pas avec nécessité; c'est aussi que les vues sur ce qui fait la légitimité d'un énoncé, d'un raisonnement, d'une méthode en géométrie est susceptible de varier, d'évoluer et de progresser : c'est encore de par l'intermédiaire d'une perspective dans le temps, une perspective de cheminement méthodologique dans laquelle le jugement reprend sa liberté par rapport à l'histoire.

b) Dans la perspective historique, ce fut bien la question des parallèles qui inaugura, inspira et anima tout le débat sur les *Éléments*.

La question ne resta cependant pas posée de façon invariable : ce qui était tout d'abord simple souci de combler une lacune d'évidence finit par devenir problème d'indépendance mutuelle et de coexistence de systèmes géométriques incompatibles entre eux. Il nous a paru particulièrement intéressant de relever que l'aspect mathématique de la question n'était pas seul à varier, mais que les « doctrines préalables » évoluaient tout aussi rapidement, si ce n'est même plus rapidement et plus radicalement.

Ainsi l'histoire ne démontre pas la nécessité de telle ou telle évolution, mais elle justifie notre hypothèse d'ouverture, selon laquelle la faculté (mais non la nécessité) d'évoluer encore ne saurait être refusée aux moyens, autant qu'aux contenus de notre connaissance.

c) Pour chacun des géomètres dont nous avons examiné l'apport à une édification irréprochable de la géométrie, nous nous sommes efforcés de faire ressortir les traits essentiels de la doctrine préalable, qui était propre à chacun d'eux.

Or le fait suivant nous a semblé digne de remarque : ces doctrines préalables sont toutes différentes les unes des autres, mais toutes peuvent être interprétées dans le cadre de notre perspective méthodologique.

Nous trompons-nous en pensant que c'est là l'un des arguments les plus forts qui puissent être invoqués en faveur de nos propres thèses ?

Apollonius 289-292, 297, 298, 316-318, 322, 325
Bachelard 57, 419
Bertrand 57, 111, 114, 115, 431
Bessel 441
Bolyai . 6, 423, 436, 440, 443-447, 458, 514
Cantor 205, 484
Cauchy 484
Cayley 365, 366, 380, 381, 400, 458, 459, 512, 513
Chasles 458
Clairaut 109-111, 114, 115, 423-431, 436, 437, 502, 503, 514
Copernic 469
d'Alembert 440
Dedekind 205
Descartes 42, 59, 103, 109
du Châtelet 109
Einstein 470
Euclide 5, 6, 12, 29, 37, 59, 61, 90, 108-110, 117, 206, 207, 242, 275-279, 284, 285, 308-310, 312, 313, 329, 332, 333, 336, 396, 423, 424, 425, 430-434, 438, 439, 442, 443, 446, 447-449, 451, 458, 459, 484, 495, 510, 511, 512
Eudoxe 197, 423, 424, 456
Euler 99, 101, 102, 508
Galilée 109
Gauss 36, 277, 278, 432, 435, 438-445, 447-449, 514
Hess 63, 66, 488
Hilbert 58, 462, 463, 490, 502
Houël 59, 61, 448, 449
Kant 42, 442, 443
Kepler 469
Klein 332, 364-366, 380, 381, 389, 400, 458-460, 512, 513
Kronecker 461
Laguerre 381
Lambert 42, 76, 430
Legendre 6, 90, 91, 115, 278, 430-438 442, 444, 445, 447, 448-451, 514
Leibniz 484
Maxwell 470
Menger 354
Michelson 470
Morley 470
Newton 109, 476, 484
Olbers 440
Pascal 125
Pasch 159, 161, 169, 170, 191, 302, 303, 337, 372, 373, 395, 396, 458-463, 490, 502, 509, 513, 514
Platon 42, 82
Poincaré 40, 285, 313, 329, 330, 332, 336, 353, 359, 366, 373, 376, 395, 400, 402, 495, 511
Poncelet 458
Ptolémée 468
Pythagore 207, 427
Saccheri 430
Schumacher 442, 449
Schwab 442
Taurinus 440
Thalès 288, 423
von Standt 458
Weierstrass 205, 484
Zénon 484

TABLE DES MATIÈRES

Pages

AVANT-PROPOS 1

Introduction — LE PROBLÈME DE L'ESPACE 3

1. Le mouvement naturel de la connaissance 3
2. La crise de la connaissance : émergence du problème de l'espace . 6
3. Le principe de la solution : dialectiques de l'espace 9

Chapitre I — LA DOCTRINE PRÉALABLE DES VÉRITÉS ÉLÉMENTAIRES . . . 17

4. Les notions fondamentales 18
5. Nécessité d'une justification 19
6. La doctrine des vérités élémentaires 20
7. Qu'est-ce qu'une droite ? 22
8. Commentaires 26
9. Qu'est-ce qu'un axiome ? 27
10. Commentaires 32
11. Le choix d'une doctrine préalable 33
12. Le principe d'indifférence 34
13. Le procès de la solution de facilité 35
14. Le recours a une discipline antérieure 38
15. L'intention métaphysique et l'intention dialectique 40
16. Le procès du recours à une discipline antérieure 42
17. L'essai dialectique 44
18. La fable de la maison rêvée 45
19. Le principe d'idonéité 46
20. Quelques objections 47
21. La fable du calife, des dix architectes et du philosophe 49
22. La légitimité de l'essai dialectique 51
23. Conclusion 52

Chapitre II — LES TROIS ASPECTS DE LA GÉOMÉTRIE 55

24. Les trois aspects de la géométrie 56

L'aspect intuitif 58

25. Qu'est-ce que l'intuition ? 58
26. Les moyens de l'analyse de l'intuition 62
27. Un robot sensori-moteur élémentaire 64
28. Un robot sensori-moteur plus complexe 66
29. L'idée générale du robot sensori-moteur 68
30. Insuffisance de l'automate 69
31. L'idée directrice : le principe de la poupée russe 70
32. Le robot périphérique et sa personne seconde 71
33. Rôle de la personne-lambda 73
34. Le robot lambertien et la personne mathématicienne 74
35. Rôle de la personne-mu 78
36. Connaissance et géométrie intuitives 80

L'aspect expérimental 82
37. Comment révéler l'élément expérimental ? 82
38. Réalisation technique des êtres géométriques fondamentaux 83
39. Vérification expérimentale des propriétés de l'incidence et des déplacements 85
40. La notion de perpendicularité : coins droits et trirectangles 86
41. Le parallélisme 89
42. Vérification expérimentale de deux propositions 90
43. L'intention expérimentale 91

L'aspect théorique 93
44. L'intention théorique 93
45. Insertion du moment théorique : deux exemples 95
46. Premier essai de spécification du théorique 96
47. Troisième exemple : démonstration de la formule d'Euler relative aux polyèdres 99
48. Spécification du théorique au niveau de l'intuition 101

Synthèse dialectique au niveau de l'information naturelle . . . 103
49. Du rapport des trois aspects entre eux 103
50. Les trois aspects sont-ils spécifiables jusqu'à l'autonomie ? 104
51. Le problème de l'espace au niveau de l'information naturelle . . 106
52. Émergence historique de la dialectique des trois aspects 108
53. Les trois aspects dans l'enseignement actuel de la géométrie élémentaire 115
54. La solution et ses limites 120

Chapitre III — L'ÉDIFICATION AXIOMATIQUE DE LA GÉOMÉTRIE 123

Caractères de la méthode axiomatique 124

55. Les premières exigences de la méthode axiomatique 124
56. La base axiomatique 127
57. La dialectique de la déduction 128
58. La méthode axiomatique 129

L'édification axiomatique de la géométrie élémentaire du plan 131
59. Observations préliminaires 131
60. Les cinq groupes d'axiomes 133

L'incidence 134
61. La base axiomatique 134
62. Quelques déductions 135

L'ordination sur la droite 137
63. Généralités 137

Premier essai — La notion « de même sens » comme notion primitive 137
64. La base axiomatique 137
65. Les axiomes d'équivalence 139
66. Quelques déductions 140
67. La fable de la maison aux mille fenêtres 143
68. Reprise de la déduction 144
69. L'ordre linéaire 149
70. Définition et propriétés de la notion « entre » 150

Second essai — La notion « entre » comme notion primitive 153
71. La base axiomatique 153
72. Quelques déductions 154
73. Définition et propriétés de la relation p 157

L'ordination dans le plan 159
74. La base axiomatique : l'axiome de Pasch 159
75. Partage du plan par une droite 161
76. Partage du plan par deux droites 162
77. L'angle 164
78. Partage du plan par trois droites 166
79. Le triangle 168
80. Extension de l'idée d'ordre linéaire 170
81. L'ordre circulaire ou cyclique 172
82. L'ordination des faisceaux et l'orientation du plan 176
83. Remarques sur la dialectique de la déduction 179

La congruence sur la droite 180
84. Généralités 180

Premier essai — L'« égalité des segments » comme notion primitive 181
85. La base axiomatique 181
86. Définitions et déductions 182
87. Définition et propriétés des notions « plus grand » et « plus petit » 185
88. Définition et propriétés du « déplacement sur la droite » 187

Second essai — Le « déplacement sur la droite » comme notion primitive 188
89. La base axiomatique 188
90. Définitions et déductions 189
91. Définition et propriétés de l'« égalité des segments » 190

La congruence dans le plan 191
92. Généralités 191
93. La base axiomatique 192
94. Conséquences des axiomes de la congruence 194

L'ordre continu 196
95. Analyse de la mesure 196
96. Démonstration du postulat d'Archimède 202
97. Construction d'une suite de segments tendant vers zéro 203
98. Le continu 204

Le parallélisme 206
99. Le postulat d'Euclide 206
100. L'indépendance du postulat des parallèles 207

Conclusion 209
101. Signification et portée de l'expérience axiomatique 209

Chapitre IV — LA SYNTHÈSE DIALECTIQUE DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE 211

Introduction 211
102. Reprise du problème de la synthèse 211
103. Nécessité et faiblesse de l'axiomatisation 214

Le schéma 216
104. La fable de la boule dans la forêt 216
105. La correspondance schématique 218

106. La signification extérieure du schéma — L'horizon de connaissance 220
107. L'autonomie du schéma — Technique et dialectique 224

L'axiomatisation schématique 227
108. L'axiomatisation schématisante 227
109. L'horizon littéral 230
110. L'horizon syntactique 231
111. L'horizon de la dialectique de la déduction 233
112. Les moyens de la dialectique 235

La correspondance schématique et les trois aspects 236
113. L'aspect intuitif en tant que signification extérieure 237
114. L'aspect théorique en tant que signification extérieure 240
115. L'aspect expérimental en tant que réalisation extérieure 243
116. Les trois aspects en tant que schémas actifs 244

Le modèle et l'analogie 249

Le modèle 249
117. Premier exemple : le modèle et le concret 249
118. Deuxième exemple : le modèle et le formel 252
119. Troisième exemple : le modèle par transcription 255

L'analogie 257
120. Retour sur le problème fondamental 257
121. Définition et portée de l'analogie entre deux secteurs de réalité . 259

La synthèse dialectique au niveau axiomatique 262
122. Reprise du problème de la dialectisation 262
123. La nouvele idée dominante : la correspondance schématique . . . 265
124. Retour a la dialectique de la déduction 268

Conclusion 272
125. Pour préparer la suite 272

Chapitre V — LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES 275

A. Le théorème de l'alternative 275
126. Le Ve postulat d'Euclide 275
127. Le théorème fondamental « de l'alternative » 278

B. Le modèle de Poincaré 285

I. Les moyens mathématiques 285
128. Le calcul des nombres complexes 285

129. Quelques propriétés des cercles 288
130. Le birapport de quatre nombres complexes 290
131. Les homographies du plan des z 292
132. Homographies particulières 295

La propriété fondamentale du groupe des homographies-H 296

II. Le vocabulaire 299
133. Les deux colonnes 299
134. L'ordination sur une droite-*h* 301
135. La congruence 303
136. L'ordre continu 308
137. Les parallèles 308

III. L'indépendance du postulat d'Euclide 310
138. L'indépendance du cinquième postulat 310

IV. La géométrie hyperbolique 313
139. Le birapport de quatre nombres complexes (suite du n° 130) . . . 313
140. Homographies et faisceaux orthogonaux de cercles 314
141. La mesure des angles et des longueurs en géométrie hyperbolique 318
142. Les cercles-*h* 321
143. La perpendiculaire et les obliques 323
144. Les déplacements-*h* 324
145. Quelques différences caractéristiques entre la géométrie hyperbolique et la géométrie euclidienne 328

C. L'autonomie de la géométrie hyperbolique 329
146. Mise en cause de l'intuition 329
147. Remarques sur les moyens de la démonstration 333
148. Esquisse d'une théorie des parallèles hyperboliques 334
149. Quelques propriétés caractéristiques de la géométrie hyperbolique 342
150. Rôle réduit et rôle secret de l'intuition 350
151. Non-contradiction de la géométrie hyperbolique 354

D. Expérimentation dans l'horizon axiomatique 360
152. Le choix des axiomes 360
153. L'expérimentation dans le schéma 361
154. Ouverture de l'idée de géométrie 362

Chapitre VI — LE PROBLÈME DE L'ESPACE 365

A. Les modèles de Cayley-Klein 365
155. Introduction 365

I. La gerbe, modèle d'une géométrie elliptique 366
a) Les éléments 366
156. L'incidence 366

b) L'ordre 367
157. L'ordre sur les droites-*e* 367
158. L'ordre dans le plan-*e* 368
159. Orientation dans les plans euclidien et hyperbolique 370
160. Les triangles-*e*, l'orientation dans le plan-*e* 370

c) La congruence et les déplacements 373
161. Les déplacements, la question du parallélisme 374

II. La géométrie analytique de la gerbe, en tant que modèle de la géométrie elliptique 376
162. La géométrie analytique remplace la déduction par le calcul . . . 376
163. Quelques propriétés de la procédure analytique 377
164. L'incidence et l'ordre 378
165. Remarques complémentaires 379

III. Les modèles de Cayley-Klein 381
166. Le plan projectif et les transformations projectives 381
167. Le rapport anharmonique 383
168. Les champs quadratiques et les coniques 385
169. Les métriques projectives 388

IV. Les déplacements et les symétries du modèle de Klein . . 389
170. Ensemble des transformations qui laissent la métrique invariante 389
171. Figures projectivement homologues; classification des coniques (1e version) 391
172. Figures projectivement homologues; classification des coniques (2e version) 393

V. Le modèle projectif de la géométrie hyperbolique 395
173. Les deux classes de coniques non dégénérées 395

a) Cas hyperbolique, le champ est à l'intérieur de l'absolu 395
174. Définitions. Vérification des axiomes de l'incidence, de l'ordre et de Pasch 395
175. Le parallélisme 396

La congruence 397
176. La métrique à l'intérieur de l'absolu 397
177. Vérification des axiomes de la congruence 398
178. Quelques remarques 400

b) Le cas quasi hyperbolique et le cas elliptique 400
179. Le champ est à l'intérieur de l'absolu 400
180. L'absolu est imaginaire 401

B. Ouverture de l'idée d'espace 402
181. Préparation 402
182. Nouvel essai de synthèse dialectique 404
183. Le privilège de l'euclidien 407
184. Le théorème de l'approche 409
185. La troisième synthèse dialectique 414
186. L'ouverture de l'idée d'espace 418
187. L'idée de l'espace en situation dialectique 420

C. La crise moderne de la légitimité en géométrie et son dénouement 423
188. Introduction 423
189. Clairaut 424
190. A.M. Legendre (1752-1833) 430
191. Ch.F. Gauss (1777-1855) 438
192. Johann Bolyai (1802-1860) 443
193. I.N. Lobatschefski 447
194. Moritz Pasch (1843-1930) 458

D. Conclusions 463
L'expérience que nous avons tentée 463
La question de la méthode 463
Expérience et théorie dans le nouveau discours 464
Les garanties offertes par les procédures formalisatrices 465
Valeur relative de la géométrie analytique 466
Réponse à une erreur essentielle 467
Le rythme du progrès de la connaissance 468
La méthode de notre essai 469
Jugements de première instance 470
Jugements de deuxième instance 472
Quelles étaient nos hypothèses 474
Le schéma des quatre phases s'éprouve lui aussi 475
Passage à une méthodologie ouverte 475
Le projet de refaire les Éléments 478
L'élémentaire à l'échelon géométrique 479
Dernière réponse à une objection 480
La première synthèse dialectique devait être dépassée 481
La question de la séparation des trois aspects 482
Le problème des fondements 483

Précarité de la première synthèse 484
Les raisons de tenter une plus stricte spécification des trois aspects 485
La fonction de la première synthèse est inaliénable 486
Nouvel examen de l'aspect expérimental 486
Nouvel examen de l'aspect intuitif 487
Nouvelle spécification de l'aspect théorique 489
Les variantes de la méthode axiomatique 490
La connaissance par abstraction schématisante 491
Retour à la méthode axiomatique 493
L'idée de concordance schématique inspire une nouvelle synthèse des trois aspects 493
L'axiomatisation formalisante 494
La pluralité des géométries pures 495
L'expérience d'épuration devient expérience d'ouverture 496
Synthèse organisatrice des trois aspects — Ouverture de l'idée d'espace 497
La perspective méthodologique de la géométrie 497
Les principes 498
L'exigence générale d'ouverture 500
Le problème du Nouveau Discours 501
Le moment décisif du Nouveau Discours 501
Valeur des considérations historiques 502
Les lignes d'essai de la géométrie 502

INDEX 505

TABLE DES MATIÈRES 507